

# Непараксиальные диссипативные оптические солитоны

Н.Н.Розанов

*Развит вариант теории возмущений для определения распределения поля поперечно-двумерных пространственных оптических солитонов в среде с насыщающимся усилением и поглощением в условиях малых отклонений от параксиальности. Выведено приближенное (исходя из невозмущенного параксиального солитона с линейной поляризацией излучения) управляющее уравнение для поперечных компонент электрической напряженности поля в случае широких солитонов. Показано, что его решением является устойчивый слабонепараксиальный диссипативный оптический векторный солитон с аксиально-асимметричным распределением поля.*

**Ключевые слова:** оптический солитон, непараксиальное приближение, пространственная структура поля.

## Введение

Консервативные пространственные оптические солитоны представляют собой устойчивые самоканализующиеся образования (псевдочастицы) в прозрачной среде с самофокусирующей нелинейностью показателя преломления, для которых дифракционное расширение пучка уравновешивается его нелинейным сжатием. Они служили одним из первых объектов нелинейной оптики и интенсивно изучались с начала 60-х гг. [1]. Консервативные солитоны составляют семейство солитонов, основные характеристики которых, например максимальная интенсивность излучения, имеют сплошной спектр. Солитоны качественно другого типа – диссипативные оптические солитоны (ДОС), или автосолитоны, характеристики которых имеют дискретный спектр, – возникают в диссипативных системах, таких как пассивные нелинейные интерферометры, возбуждаемые внешним излучением [2, 3], лазеры с насыщающимся поглощением [4, 5] и т. д. (см. также [6–8]).

Дискретность спектра характеристик ДОС и жесткий (пороговый) характер их возбуждения приводят к повышенной стабильности и эффективному подавлению шумов, что представляет интерес для приложений при обработке оптической информации. Для большинства приложений, вообще говоря, и консервативных, и диссипативных солитонов следовало бы минимизировать их размеры. При этом, когда размеры солитона становятся сравнимыми с длиной волны света, существенным является непараксиальность, не учитываемая в рамках стандартного квазиоптического приближения (приближения медленно меняющихся переменных или огибающих). Непараксиальность может сильно влиять и на поляризационную структуру поля даже сравнительно широких солитонов.

Непараксиальность рассматривалась ранее в литера-

туре, насколько нам известно, только для консервативных солитонов. Так, для слабонепараксиальных солитонов был предложен метод теории возмущений, где малым параметром служит отношение длины волны света к ширине солитона [9–11]. В области сильной непараксиальности полуаналитическим и численным методами недавно были найдены «оптические иглы» – пространственные солитоны с шириной, меньшей длины волны света [12]. Задачей настоящей работы служит изучение слабонепараксиальных ДОС. Для выявления непараксиальности мы будем рассматривать поперечно-двумерные пучки монохроматического излучения в безрезонаторной схеме, представляющей собой сплошную среду с насыщающимся усилением и поглощением (см., напр., [7]). Основной интерес для нас будут представлять поляризационные эффекты, отсутствующие в параксиальном приближении.

## 1. Управляющее уравнение

Исходными уравнениями служат уравнения Максвелла для монохроматического излучения с частотой  $\omega$  в немагнитной среде (магнитная проницаемость равна единице):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – напряженности электрического и магнитного полей (в комплексной записи, множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен);  $c$  – скорость света в вакууме. Генерация третьей и высших гармоник считается неэффективной (условия синхронизма для них не выполнены). Для выделения непараксиальности используем упрощенное выражение для электрической индукции  $\mathbf{D}$ , отвечающее стрикционному механизму нелинейности в случае самофокусировки:

$$\mathbf{D} = [\varepsilon_0 + \delta\varepsilon(|\mathbf{E}|^2)] \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\delta\varepsilon$  – линейная (вещественная) и нелинейная диэлектрические проницаемости среды.

Методом, аналогичным использованному для консервативных солитонов в [11], выведем приближенное замкнутое уравнение для поперечных компонент поля  $\mathbf{E}_\perp = \{E_x, E_y\}$  стационарного диссипативного пространственного солитона. Для него продольное (вдоль координаты  $z$ ) изменение полей описывается множителем  $\exp(i\Gamma z)$  с вещественной постоянной распространения  $\Gamma$ . После исключения из (1) напряженности магнитного поля получим обобщенное нелинейное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp + (k^2 - \Gamma^2) \mathbf{E}_\perp + \frac{k^2}{\varepsilon_0} \delta\varepsilon \mathbf{E}_\perp - (\text{grad div} \mathbf{E})_\perp = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– поперечный оператор Лапласа;  $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_0}$  – волновое число света в линейной среде. Из последнего из уравнений Максвелла (1) с учетом малости  $|\delta\varepsilon|$  для продольной компоненты поля получим

$$E_z = \frac{i}{\Gamma} \left[ \text{div}_\perp \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{\varepsilon_0 + \delta\varepsilon} (\mathbf{E}_\perp, \text{grad}_\perp \delta\varepsilon (|\mathbf{E}_\perp|^2)) \right] \approx \frac{i}{k} \text{div}_\perp \mathbf{E}_\perp. \quad (4)$$

Таким образом, приходим к замкнутому приближенному уравнению для поперечных компонент поля широких стационарных пространственных солитонов:

$$\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp + (k^2 - \Gamma^2) \mathbf{E}_\perp + \frac{k^2}{\varepsilon_0} \delta\varepsilon (|\mathbf{E}_\perp|^2) \mathbf{E}_\perp = \mathbf{Q}_\perp(\mathbf{E}_\perp), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{Q}_\perp(\mathbf{E}_\perp) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \delta\varepsilon' (|\mathbf{E}_\perp|^2) |\text{div}_\perp \mathbf{E}_\perp|^2 \mathbf{E}_\perp + \text{grad}_\perp (\mathbf{E}_\perp, \text{grad}_\perp \delta\varepsilon (|\mathbf{E}_\perp|^2)) \right]; \quad (6)$$

$$\delta\varepsilon'(I) = \frac{d\delta\varepsilon}{dI}; \quad I = |\mathbf{E}|^2. \quad (7)$$

Для керровской нелинейности ( $\delta\varepsilon = \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ) эти соотношения переходят в соответствующие уравнения работы [11].

Чтобы подчеркнуть роль диссипации энергии, рассмотрим далее среду с нелинейностью только поглощения и усиления. Тогда

$$\delta\varepsilon (|\mathbf{E}|^2) = -i\varepsilon_0 \mu f (|\mathbf{E}|^2), \quad (8)$$

$$f (|\mathbf{E}|^2) = -1 - \frac{a_0}{1 + |\mathbf{E}|^2/I_a} + \frac{g_0}{1 + |\mathbf{E}|^2/I_g},$$

где  $k\mu$  – коэффициент постоянного (нерезонансного) поглощения (по интенсивности);  $\mu \ll 1$ ;  $a_0$  и  $g_0$  – линейные коэффициенты резонансного поглощения и усиления, нормированные на коэффициент нерезонансного поглощения;  $I_a$  и  $I_g$  – интенсивности насыщения для усиления и

поглощения. Для характеристики сдвига постоянной распространения введем безразмерную величину

$$\alpha = \frac{k^2 - \Gamma^2}{k^2 \mu}, \quad (9)$$

а также безразмерные поперечные координаты, получающиеся из размерных домножением на  $k\sqrt{\mu}$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp + \alpha \mathbf{E}_\perp - i f (|\mathbf{E}_\perp|^2) \mathbf{E}_\perp = i \mu \mathbf{q}_\perp(\mathbf{E}_\perp), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{q}_\perp = \mathbf{E}_\perp |\text{div}_\perp \mathbf{E}_\perp|^2 f' (|\mathbf{E}_\perp|^2) + \text{grad}_\perp (\mathbf{E}_\perp, \text{grad}_\perp f (|\mathbf{E}_\perp|^2)), \quad f'(I) = \frac{df}{dI}. \quad (11)$$

В декартовых координатах

$$q_x = \left| \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|^2 E_x f' + \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x \frac{\partial f}{\partial x} + E_y \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (12)$$

$$q_y = \left| \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|^2 E_y f' + \frac{\partial}{\partial y} \left( E_x \frac{\partial f}{\partial x} + E_y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

В уравнении (10) параметр  $\alpha$  играет роль собственного значения и подлежит определению. Напомним, что для рассматриваемых ДОС спектр  $\alpha$  дискретный, тогда как для консервативных солитонов он сплошной. Кроме того, для ДОС огибающая поля описывается комплексными функциями, т. е. волновой фронт ДОС обязательно искривлен, тогда как среди консервативных солитонов имеются и солитоны, обладающие плоским фронтом.

## 2. Решение управляющего уравнения в теории возмущений

При выводе (10) мы ограничились низшими поправками к стандартному квазиоптическому (парааксиальному) приближению, считая нелинейность малой, а ширину солитона достаточно большой (по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ). Это уравнение естественно решать методом теории возмущений по малому параметру  $\mu \sim (\lambda/w)^2$ , где  $w$  – характерная ширина солитона. При этом выражение (11) позволяет определить необходимые величины только в нулевом и первом порядках теории возмущений, а для их нахождения в высших порядках теории возмущений нужно включить в (11) дополнительные члены.

Таким образом, решение уравнения (10) ищется в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_{\perp 0} + \mu \delta \mathbf{E}_\perp + \dots, \quad \alpha = \alpha_0 + \mu \delta \alpha + \dots \quad (13)$$

Нулевое приближение ( $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_{\perp 0}$  и  $\alpha = \alpha_0$ ) отвечает стандартному парааксиальному описанию, при котором  $\mathbf{q}_\perp = 0$  и (10) переходит в векторное квазиоптическое уравнение

$$\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp + \alpha_0 \mathbf{E}_\perp - i f (|\mathbf{E}_{\perp 0}|^2) \mathbf{E}_\perp = 0. \quad (14)$$

В первом порядке теории возмущений получаем для  $\delta \mathbf{E}_\perp$  неоднородное линейное уравнение

$$\Delta_\perp \delta \mathbf{E}_\perp + \alpha_0 \delta \mathbf{E}_\perp - i f (|\mathbf{E}_{\perp 0}|^2) \delta \mathbf{E}_\perp - i \mathbf{E}_{\perp 0} f' (|\mathbf{E}_{\perp 0}|^2) (\mathbf{E}_{\perp 0}^*, \delta \mathbf{E}_\perp) + (\mathbf{E}_{\perp 0}, \delta \mathbf{E}_\perp^*) = -\delta \alpha \mathbf{E}_{\perp 0} + i \mathbf{q}(\mathbf{E}_{\perp 0}). \quad (15)$$

Выпишем уравнение (14) в декартовых координатах:

$$\Delta_{\perp} E_{x0} + \alpha_0 E_{x0} - if(|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2)E_{x0} = 0, \quad (16)$$

$$\Delta_{\perp} E_{y0} + \alpha_0 E_{y0} - if(|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2)E_{y0} = 0.$$

Решения этой системы уравнений наиболее полно изучены в литературе для случая линейной поляризации, которым мы далее и ограничимся (для ДОС справедливыми оказываются и более общие соотношения, приведенные в [11] для консервативных солитонов). Для определенности мы будем рассматривать низшие (фундаментальные) солитоны с линейной поляризацией и осесимметричным (в нулевом приближении) распределением поля:

$$E_{x0} = E_{x0}(\rho), \quad E_{y0} = 0, \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (17)$$

В первом порядке теории возмущений линеаризованные по малому возмущению  $\delta E_{\perp}$  уравнения можно записать в виде

$$L_x(\delta E_x) = -\delta\alpha E_{x0} + iq_{x0}, \quad L_y(\delta E_y) = iq_{y0}, \quad (18)$$

где

$$L_x(\delta E_x) = [\Delta_{\perp} + \alpha_0 - i(f + f'|E_{x0}|^2)]\delta E_x - if'E_{x0}^2\delta E_x^*;$$

$$L_y(\delta E_y) = (\Delta_{\perp} + \alpha_0 - if)\delta E_y; \quad (19)$$

$$q_{x0} = f'E_{x0} \left| \frac{\partial E_{x0}}{\partial x} \right|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( E_{x0} \frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad q_{y0} = \frac{\partial}{\partial y} \left( E_{x0} \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Решения отвечающей (18) однородной системы

$$L_x(\delta E_x) = 0, \quad L_y(\delta E_y) = 0 \quad (20)$$

с граничными условиями конечности и достаточно быстрого убывания  $\delta E_{\perp}$  с ростом поперечных координат имеют тот же вид, что и для консервативных солитонов [11].

Для решения линейных неоднородных уравнений (18) представим  $q_{\perp 0}$  в виде

$$q_{x0} = q_0(\rho) + q_2(\rho) \cos 2\varphi, \quad q_{y0} = q_2(\rho) \sin 2\varphi, \quad (21)$$

где

$$q_0(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) G; \quad q_2(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \right) G; \quad (22)$$

$$G = E_{x0} f' \frac{d|E_{x0}|^2}{d\rho}.$$

Второе из уравнений (18) принимает вид

$$(\Delta_{\perp} + \alpha_0 - if)\delta E_y = iq_2(\rho) \sin 2\varphi. \quad (23)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет единственное нетривиальное осесимметричное решение  $\delta E_y = E_{y2}(\rho)$ . Так как это решение (равно как и решение соответствующего сопряженного уравнения) ортогонально правой части уравнения (23), то (23) разрешимо. Без ограничения общности можно приравнять нулю решение однородного уравнения, отвечающее повороту ДОС как

целого в плоскости  $xу$ . Тогда можно считать, что уравнение (23) с надлежащими граничными условиями имеет единственное решение вида

$$\delta E_y = \delta E_{y2}(\rho) \sin 2\varphi. \quad (24)$$

Функция  $\delta E_{y2}(\rho)$  определяется как конечное на интервале  $0 < \rho < \infty$  решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \delta E_{y2}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\delta E_{y2}}{d\rho} + \left( \alpha_0 - \frac{4}{\rho^2} - if \right) \delta E_{y2} = iq_2(\rho). \quad (25)$$

Линеаризованное уравнение для  $\delta E_x$  имеет вид

$$[\Delta_{\perp} + \alpha_0 - i(f + f'|E_{x0}|^2)]\delta E_x - if'E_{x0}^2\delta E_x^* = -\delta\alpha E_{x0} + iq_0(\rho) + iq_2(\rho) \cos 2\varphi. \quad (26)$$

Можно утверждать, что уравнение (26) также имеет единственное решение вида

$$\delta E_x = \delta E_{x0}(\rho) + \delta E_{x2}(\rho) \cos 2\varphi. \quad (27)$$

Определение радиальных функций  $\delta E_{x0}(\rho)$  и  $\delta E_{x2}(\rho)$  с учетом найденного значения  $\delta\alpha$  сводится к нахождению конечного на интервале  $0 < \rho < \infty$  решения двух линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta E_{x0}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\delta E_{x0}}{d\rho} + (\alpha_0 - if - if'|E_{x0}|^2)\delta E_{x0} \\ - if'E_{x0}^2\delta E_{x0}^* = iq_0(\rho) - \delta\alpha E_{x0}(\rho), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta E_{x2}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\delta E_{x2}}{d\rho} + \left( \alpha_0 - \frac{4}{\rho^2} - if - if'|E_{x0}|^2 \right) \delta E_{x2} \\ - if'E_{x0}^2\delta E_{x2}^* = iq_2(\rho). \end{aligned}$$

Продольная компонента поля в соответствии с (4) имеет вид

$$E_z \approx \frac{i}{k} \frac{\partial E_{x0}}{\partial x} = \frac{i}{k} \frac{dE_{x0}}{d\rho} \cos \varphi. \quad (29)$$

Нам представляется, что наиболее ярким экспериментальным проявлением непараксиальности ДОС служит изменение поляризационной структуры излучения. А именно, поляризация излучения становится эллиптической, причем состояние поляризации меняется по поперечному сечению. Низшей непараксиальной поправкой служит продольная компонента поля  $E_z$  (29). При этом конец вектора электрической напряженности вращается со временем по сильно вытянутому эллипсу, расположенному в плоскости  $xz$ . В следующем порядке возникает более слабая компонента поля  $\delta E_y$ , с ее учетом указанный эллипс выходит из плоскости  $xz$  и ориентация его плоскости меняется по сечению.

Полученный численным решением линейного уравнения (25) радиальный профиль функции  $\delta E_{y2}(\rho)$  показан на рис.1, тогда как угловая зависимость  $\delta E_y$  имеет простой вид (24). Радиальный профиль интенсивности  $y$ -компоненты излучения  $I_y = |\delta E_y|^2$  обладает четким макси-

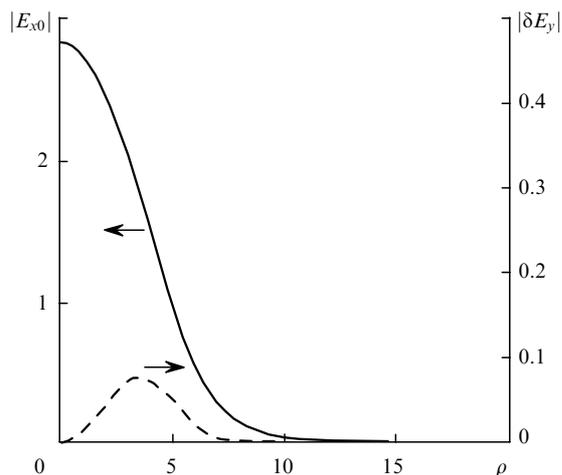


Рис. 1. Радиальные профили модулей амплитуд исходного параксиального солитона  $|E_{x0}|$  (сплошная кривая) и  $y$ -компоненты нормированной непараксиальной поправки  $|\delta E_y|$  (штриховая кривая) при параметрах среды  $a_0 = 2$ ,  $g_0 = 2.1$ ,  $I_g/I_a = 10$ .

мумом вблизи точки перегиба радиальной зависимости  $|E_{x0}|$ . Ввиду этого интенсивность  $I_y$  в плоскости  $xu$  представлена четырьмя симметрично расположенными пиками, тогда как интенсивность  $z$ -компоненты – двумя пиками (см. (29)). Заметим, что подобная структура поля характерна и для «оптических игл» – сильно непараксиальных консервативных солитонов [12].

Устойчивость слабонепараксиальных ДОС не требует дополнительного анализа. Действительно, исходные параксиальные солитоны рассматривались нами только внутри области их устойчивости (последняя приведена, например, на рис.3 работы [8]). В этом случае собственные значения соответствующих линеаризованных уравнений для малых возмущений либо нулевые (для нейтральных мод, отвечающих симметрии задачи), либо обладают конечной отрицательной вещественной частью, что и соответствует устойчивости солитона. Непараксиальные поправки сохраняют симметрию задачи, и, следовательно, нулевые собственные значения. А для ненулевых собственных значений изменение знака их вещественной части невозможно хотя бы из малости непараксиальных поправок, в действительности же следует ожидать, что непараксиальность дополнительно стабилизируют солитоны. В этом отношении ДОС вновь проявляют особую устойчивость по сравнению, например, с консервативными солитонами в прозрачной среде с керровской нелинейностью. В последнем случае для непараксиальных солитонов существуют чисто мнимые собственные значения, так что малейшее возмущение может качественно менять характер устойчивости. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной публикации.

## Заключение

Таким образом, развитый вариант последовательной теории возмущений позволяет определить низшие непараксиальные поправки к структуре поля поперечно-дву-

мерных пространственных диссипативных оптических векторных солитонов. Полученная поляризационная и азимутальная структура поля имеет простой вид. Отклонение от параксиальности приводит к появлению заметной продольной компоненты поля, в связи с чем анализ непараксиальности для электромагнитного поля в рамках скалярного нелинейного уравнения Гельмгольца не оправдан. Экспериментально, по-видимому, наиболее легко можно наблюдать вызванное непараксиальностью появление характерной азимутальной структуры компоненты поля с линейной поляризацией, ортогональной по отношению к основной.

Порождаемый параксиальным солитоном с линейной поляризацией непараксиальный солитон аксиально асимметричен. Развитый подход позволяет рассмотреть и непараксиальность трехмерных консервативных и диссипативных солитонов – «оптических» и «лазерных пуль» [7, 13, 14]. Интерес может также представить не рассматривавшийся в настоящей работе случай сильно непараксиальных сверхузких пространственных солитонов – «оптических игл» [12], которые наиболее естественно возникают в средах с нелинейностью не только усиления и поглощения, но и показателя преломления (керровская нелинейность).

Автор благодарен Н.А.Веретену за помощь в вычислениях. Данная работа входит в план исследований МНТЦ (проект № 666) и частично поддержана РФФИ (грант № 98-02-18202) и INTAS (грант № 1997-581).

1. Власов С.Н., Таланов В.И. *Самофокусировка волн* (Н.Новгород, изд-е Ин-та прикл. физики РАН, 1997).
2. Розанов Н.Н., Ходова Г.В. *Оптика и спектроскопия*, **65**, 1375 (1988).
3. Rosanov N.N., Fedorov A.V., Khodova G.V. *Phys.Stat Sol.B*, **150**, 545 (1988).
4. Розанов Н.Н., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **72**, 1394 (1988).
5. Fedorov S.V., Rosanov N.N., Khodova G.V. *Proc.SPIE*, **1840**, 208 (1991).
6. Rosanov N.N. *Prog.Optics*, **35**, 1 (1996).
7. Розанов Н.Н. *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (М., Наука, 1997).
8. Розанов Н.Н. *УФН*, **170**, 462 (2000).
9. Абакаров Д.И., Акопян А.А., Пекар С.И. *ЖЭТФ*, **52**, 463 (1967).
10. Chi S., Guo Qi. *Optics Letts*, **20**, 1598 (1995).
11. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **89**, 974 (2000).
12. Семенов В.Е., Розанов Н.Н., Высотина Н.В. *ЖЭТФ*, **116**, 458 (1999).
13. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **16**, 1020 (1973).
14. Калитеевский Н.А., Розанов Н.Н., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **85**, 533 (1988).

### N.N.Rozanov. Nonparaxiality of dissipative optical solitons.

A version of the perturbation theory is developed, which is intended for determining the field distribution of spatial solitons with a 2D transverse profile in a medium with saturable absorption and gain in the case of small deviations from paraxial conditions. Starting from the unperturbed paraxial soliton with linear polarization of radiation, an approximate master equation for transverse components of the electric field in the case of wide solitons is derived. It is shown that its solution represents a stable weakly nonparaxial dissipative optical vector soliton with an axially symmetric field distribution.