PACS 42.65.Tg; 42.70.Nq

# Сохранение углового момента многомерных оптических солитонов

**А.С.Десятников*, А.И.Маймистов****

*Получены аналитические выражения для спинового и орбитального моментов многомерных оптических солитонов – двумерных пучков и трехмерных световых пуль. Показано, что при заданных направлениях падений световых пуль временная задержка в следовании импульсов определяет направление и величину орбитального момента и может служить параметром, который управляет возникающей при взаимном захвате структурой.*

***Ключевые слова**: оптические солитоны, световые пули.*

## Введение

В последнее десятилетие растет интерес к оптическим структурам, локализованным в объемной нелинейной среде, или многомерным световым солитонам [1]. Примером пространственного солитона является оптический пучок в состоянии волноводного распространения (самозахвата). При совместном распространении в нелинейной среде пространственно разделенных пучков нелинейность приводит к взаимодействию между ними и взаимному захвату – образованию связанного состояния. Новым эффектом в этой области является так называемый спиралинг – вращение оптических пучков в пространстве с образованием двойной спирали [2 – 8].

Суть эффекта заключается в том, что при взаимном захвате *некомпланарных* пучков возникает связанное состояние с образованием такой спиральной структуры. Многие авторы [4, 5] указывают на аналогию между вращением пучков и классической задачей двух тел, что позволяет описать взаимодействие нелинейных волн в рамках хорошо известной задачи о движении частицы в эффективном потенциале и, в частности, ввести понятие орбитального момента солитонной пары.

Другим примером пространственных солитонов являются пучки с кольцевым распределением поля, или вихри, обладающие ненулевым спиновым моментом. Известно, что в средах с квадратичной или насыщающейся нелинейностью такие уединенные волны формально существуют как стационарные решения нелинейного волнового уравнения, но они являются неустойчивыми и разрушаются при распространении [5, 9]. При этом сохранение углового момента в системе приводит к трансформации спинового момента начального состояния в орбитальный момент пучков, образующихся при разрушении вихря.

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; *эл.почта: asd124@rsphy1.anu.edu.au; **эл.почта: maimistov@pico.mephi.ru

Поступила в редакцию 13 марта 2000 г., после доработки – 2 августа 2000 г.

Относительно новым объектом исследования является так называемая световая пуля (light bullet), или пространственно-временной оптический солитон [11 – 14]. При взаимодействии световых пуль в бимодальном пространстве проявляются аналогичные закономерности: взаимодействие приводит к взаимному увлечению солитонов и в системе сохраняется угловой момент. В настоящей работе будет получено выражение для орбитального момента пары световых пуль, показывающее, что для одинаковых солитонов можно выбрать направление орбитального момента, совпадающее с направлением распространения, и тогда пули будут оставаться в одной поперечной плоскости. Если солитонная пара является асимметричной, т. е. энергии пуль различны, образующаяся структура имеет более сложную форму, т. к. в этом случае разность проекций групповых скоростей двух импульсов играет роль расстройки групповых скоростей и временная задержка имеет ненулевую величину.

## 1. Потенциал взаимодействия

Распространение световой волны в среде с фокусирующей керровской нелинейностью и дефокусирующей нелинейностью пятого порядка описывается параболическим уравнением, представляющим собой обобщение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial z} + \Delta u + |u|^2 u - |u|^4 u = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial \tau^2$ – пространственно-временной оператор Лапласа; $u$ – медленно меняющаяся нормированная огибающая световой волны.

Рассмотрим случай стационарного пучка (размерность $D = 2$), когда $u(x, y, \tau, z) = u(\rho, \varphi, z)$; здесь использована система цилиндрических координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Солитонные решения уравнения (1) ищутся в виде

$$u(\boldsymbol{r}, z) = U(r)\exp(\mathrm{i}kz + \mathrm{i}s\varphi), \qquad (2)$$

где $s$ – топологический индекс солитона ($s = 0$ для солитона основной моды и $s = 1$ для вихря); $\boldsymbol{r} = (x, y, \tau)$. Функция $U(r)$ удовлетворяет действительному уравнению

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{s^2}{r^2}\right)U - kU + U^3 - U^5 = 0. \qquad (3)$$

При рассмотрении световых пуль (в этом случае $D = 3$) уравнение (1) можно переписать, используя сферические координаты $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $\tau = r\sin\vartheta$. Здесь угол $\varphi$ играет ту же роль полярного угла, что и в (2). Зависимость от времени $\tau$ входит в $u(x, y, \tau, z)$ через переменные $\vartheta$ и $r$. Следуя [12], положим, что солитонное решение (1), описывающее световую пулю, имеет вид

$$u(r, \vartheta, \varphi, z) = V(r, \vartheta)\exp(\mathrm{i}kz + \mathrm{i}s\varphi). \qquad (4)$$

В этом случае уравнение (1) переписывается как

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)V + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)$$
$$- \frac{s^2 V}{r^2\sin^2\vartheta} - kV + V^3 - V^5 = 0.$$

Более сильное по сравнению с (4) приближение получится, если фиксировать азимутальный угол $\vartheta = \vartheta_0$, считая тем самым, что зависимость от нормированного времени определяется только через переменную $r$. Для функции $U(r) = V(r, \vartheta_0)$ уравнение (1) сводится к следующему уравнению:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{\tilde{s}^2}{r^2}\right)U - kU + U^3 - U^5 = 0,$$

где $\tilde{s} = s/\sin\vartheta_0$. В частном случае, когда $\vartheta_0 = \pi/2$, вектор $\boldsymbol{r}$ лежит в плоскости, нормальной направлению распространения рассматриваемого солитона.

Если решением уравнения (1) является солитонное решение (2) или (4), то им может быть и функция

$$u(\boldsymbol{r}, z) = U(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(z)|)\exp(\mathrm{i}kz + \mathrm{i}s\varphi)$$
$$\times\exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(z)) + \mathrm{i}q^2 z\right] \qquad (5)$$

при условии $\boldsymbol{q} = \mathrm{const}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0/\mathrm{d}z = 2\boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{r}_0(z)$ – координата центра солитона. Этот результат является отражением галилеевой инвариантности уравнения (1) и не связан с выбором формы солитона.

Давно известно (например, [15, 16]), что многомерные солитоны вида (2), (4) с $s = 0$ неустойчивы в чисто керровских нелинейных средах. В то же время при определенных условиях они устойчивы в средах с насыщающейся нелинейностью [11, 17–20], в средах с квадратичной нелинейностью [21, 22] или в среде, одновременно обладающей квадратичной и кубической нелинейностями [23, 24]. Если пиковая интенсивность $I$ многомерного солитона мала по сравнению с интенсивностью насыщения, то оптические свойства среды с насыщением нелинейной проницаемости $n(I)$ хорошо описываются выражением $n(I) = n_2 I - n_4 I^2$. (Именно этот случай рассматривается в настоящей статье.) В таких средах многомерные солитоны также существуют [12, 25]. Они удовлетворяют критерию устойчивости Вахитова – Колоколова [16] и демонстрируют устойчивость в численных расчетах [13].

Случай многомерных солитонов с $s = 1$ (и $s \geqslant 2$) оказался более сложным. Критерий устойчивости Вахитова – Колоколова здесь неприемлем. Исследования [26] продемонстрировали неустойчивость двумерного солитона с $s = 1$ в среде с насыщающейся нелинейностью по отношению к азимутальным возмущениям. Для сред, нелинейные свойства которых описываются проницаемостью $n(I) = n_2 I - n_4 I^2$ с положительными коэффициентами $n_{2,4}$, с помощью вариационного метода были найдены условия устойчивости таких солитонов [12]. Однако прямое численное моделирование [13] продемонстрировало, что при этих условиях солитоны на самом деле являются просто очень долгоживущими образованиями, а общем случае стабильные солитоны с $s \geqslant 1$ отсутствуют. Так что лучше говорить о метастабильных вихрях или спин-солитонах. Результаты других исследований [18, 23, 27] позволяют убедиться, что при $s \geqslant 1$ возможны только метастабильные многомерные солитоны, следовательно, можно сосредоточить внимание на изучении картины их распада и/или формирования связанных состояний комплексов солитонов с нулевым топологическим числом.

Таким образом, рассмотрим взаимодействие двух пространственно разделенных солитонов, каждый из которых описывается функциями $u$ и $v$ – решениями системы уравнений (векторное НУШ) с дополнительными слагаемыми, отвечающими фазовой кросс-модуляции пятого порядка [7]:

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial z} + \Delta u + \left(|u|^2 + \varepsilon|v|^2\right)u - \left(|u|^4 + 2\alpha|u|^2|v|^2 + \alpha|v|^4\right)u = 0,$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z} + \Delta v + \left(|v|^2 + \varepsilon|u|^2\right)v - \left(|v|^4 + 2\alpha|u|^2|v|^2 + \alpha|u|^4\right)v = 0.$$

Этой консервативной системе уравнений соответствует гамильтониан

$$H = H_u + H_v + U_{\mathrm{int}}, \qquad (6)$$

где

$$H_u = \int\left(|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 + \frac{1}{3}|u|^6\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r};\ \ H_v = H_u(u \leftrightarrow v);$$

$$U_{\mathrm{int}} = \int\left(-\varepsilon|u|^2|v|^2 + \alpha|u|^4|v|^2 + \alpha|u|^2|v|^4\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Как показано в [7], учет фазовой кросс-модуляции более высокого порядка, чем модуляция, определенная эффектом Керра, приводит к малым аддитивным поправкам к потенциалу взаимодействия солитонов в керровской среде. Поэтому достаточно изучать потенциал взаимодействия вида $U_{\mathrm{int}} = -\varepsilon\int|u|^2|v|^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, где $\varepsilon$ – коэффициент кубической фазовой кросс-модуляции. Будем искать решение исходной задачи (6) в виде (5):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = V_n(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n(z)|)\exp(\mathrm{i}k_n z + \mathrm{i}s_n\varphi)$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_n}{\mathrm{d}z}[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n(z)] + \mathrm{i}\alpha_n(z)\right\}, \qquad (7)$$

где $n = 1, 2$, а функции $V_n$ удовлетворяют уравнению (3). Тогда гамильтониан системы можно представить в виде

$$\tilde{H} = H - H_u - H_v = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \varepsilon I(R), \tag{8}$$

где $I(R) = \int V_1^2(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|)V_2^2(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ – интеграл перекрытия солитонов; $\boldsymbol{R}(z) = \boldsymbol{r}_1(z) - \boldsymbol{r}_2(z)$; $\mu = E_1E_2(E_1 + E_2)^{-1}$ – приведенная масса двух солитонов; $E_n = \int V_n^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

В рассматриваемой здесь бимодальной системе обмен энергией между солитонами невозможен. При значительном перекрытии солитоны деформируются, но снова восстанавливают свою форму, если являются устойчивыми. Предположив, что $H_{u,v}$ мало отличаются от своих невозмущенных (при $\varepsilon = 0$) значений $H_{u,v}^0$, можно рассматривать $\tilde{H}$ (8) в качестве гамильтониана классической частицы с массой $\mu$, положение которой определяется радиус-вектором $\boldsymbol{R}(z)$. Предложенная процедура аналогична приближению «эффективной частицы» [10].

Для пучков в [6, 8] показано, что сохранение величины

$$\frac{\mu}{2}\left|\boldsymbol{R} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}z}\right| = M = \mathrm{const} \tag{9}$$

является следствием вариационных уравнений. Далее мы покажем, что сохранение орбитального момента имеет более глубокую причину и есть следствие инвариантности исходных уравнений (1) к преобразованию поворота. Используя закон сохранения момента (9), гамильтониан (8) можно записать в хорошо известной форме:

$$\tilde{H} = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \frac{M^2}{2mR^2} - \varepsilon I(R). \tag{10}$$

Здесь $m = \mu/2$, т. е. масса «частицы» в два раза меньше приведенной массы солитонов. Основной задачей при таком подходе является вычисление зависимости $I(R)$ и определение углового момента для световых солитонов. Для достаточно удаленных солитонов известны аналитические выражения для потенциала взаимодействия [7]. В отличие от одномодовых систем [2, 3], в бимодальной системе возможны устойчивые связанные состояния с взаимным вращением солитонов, т. е. с ненулевым орбитальным моментом.

## 2. Вычисление углового момента

Сохранение вращательного момента является следствием инвариантности параболического уравнения (1) к преобразованию поворота в плоскости, поперечной к направлению распространения. Соответствующий этому уравнению лагранжиан также инвариантен по отношению к преобразованию поворота. Применение теоремы Нетер к такому функционалу в случае размерности $D = 2 + 1$ показывает сохранение величины

$$M = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left[x\left(u\,\frac{\partial u^*}{\partial y} - u^*\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - y\left(u\,\frac{\partial u^*}{\partial x} - u^*\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right],$$

которую удобно записать в виде

$$M = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u^*|\boldsymbol{r} \times \nabla u|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор в плоскости $x$, $y$. Для солитона основной моды этот интеграл равен нулю, а для вихрей с топологическим индексом $s$ величина $M = sE$. Так что для пучка с кольцевым распределением поля сохраняется спиновый момент; при этом топологический индекс часто называют *спином* солитона. Солитон с ненулевым спином называют еще *спин-солитоном*.

Используя галилееву инвариантность уравнений, можно показать, что для решения в виде (5) угловой момент солитона является суммой его спинового и орбитального моментов:

$$M = \frac{E}{2}\left|\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}z}\right| + sE. \tag{12}$$

В бимодальной системе, описываемой уравнениями для медленных огибающих двух пучков $u$ и $v$, сохраняющейся величиной будет сумма $M = M(u) + M(v)$, которую можно записать в виде

$$M = \frac{\mu}{2}\left|\boldsymbol{R} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}z}\right| + s_1E_1 + s_2E_2. \tag{13}$$

Здесь начало отсчета выбрано в центре инерции солитонной пары

$$E_1\boldsymbol{r}_1 + E_2\boldsymbol{r}_2 = 0. \tag{14}$$

Как показано в [6], условие (14) всегда можно выполнить соответствующим выбором начала отсчета и граничных условий. Физически такой выбор отвечает состоянию покоя центра инерции пары солитонов в поперечной плоскости и не ограничивает общности задачи. Тогда явное выражение для орбитального момента двух пучков принимает вид

$$M = R_0R_0'\tan\beta = R_0(\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2)\sin\beta, \tag{15}$$

где $R_0' \equiv (\mathrm{d}R/\mathrm{d}z)|_{z=0} = (\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2)\cos\beta$; $\varphi_{1,2}$ – углы падения пучков на границу нелинейной среды; $\beta$ – угол между начальными направлениями векторов $\boldsymbol{R}$ и $\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}z$.

Сохранение момента для поля вихря проявляется при разрушении таких пучков. В работах [5, 9] исследовалось взаимодействие двух филаментов, возникающих при разрушении вихрей. Как в случае свободного спиралинга [5], так и при стабилизации филаментов в поле пучка основной моды [9] сохранение момента приводило к вращению филаментов. Аналогичная закономерность выполняется для дифракционных автосолитонов, распространяющихся в поле излучения с дислокацией волнового фронта [15].

Проведенные недавно численные исследования устойчивости световой пули с кольцевым распределением поля в среде с нелинейностью третьего и пятого порядков показали [13], что при разрушении спин-солитона образуются одинаковые пули основной моды и спиновый момент трансформируется в орбитальный момент взаимодействующих солитонов. При размерности $D = 3$ переменные $x$, $y$, $\tau$ входят в уравнение (1) в симметричной форме. Это означает, что уравнение и соответствующий лагранжиан инвариантны к преобразованию поворота, затрагивающему любую пару из этих переменных. Соответствующие интегралы движения, т. е. проекции орбитального момента пары световых пуль, удобно записать в виде

$$M_z = \frac{\mu}{2}\left|\boldsymbol{R}_t \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_t}{\mathrm{d}z}\right|, \quad M_y = \frac{\mu}{2}\left(T\frac{\mathrm{d}R_x}{\mathrm{d}z} - R_x\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right),$$

$$M_x = -\frac{\mu}{2}\left(T\frac{\mathrm{d}R_y}{\mathrm{d}z} - R_y\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right), \tag{16}$$

где $\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{e}_x R_x + \boldsymbol{e}_y R_y$ – проекция вектора, соединяющего центры световых пуль, на поперечную плоскость; $T - \tau_1 - \tau_2$ – расстояние между пулями на оси сопутствующего времени, т. е. временная задержка в следовании импульсов. При выводе этих выражений предполагались выполненными два условия. Первое условие (14), как отмечено выше, можно без ограничения общности рассматривать как граничное условие, при выполнении которого центр инерции находится в поперечной плоскости. Второе условие, $E_1\tau_1(z) + E_2\tau_2(z) = 0$, соответствуют выбору начала отсчета в центре инерции солитонной пары. В направлении оси $z$ центр инерции движется со скоростью, имеющей отрицательную проекцию:

$$E_1\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}z} + E_2\frac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}z} = E_1(\cos\varphi_1 - 1) + E_2(\cos\varphi_2 - 1)$$

$$\approx -\frac{1}{2}\left(E_1\varphi_1^2 + E_2\varphi_2^2\right).$$

Действительно, в изотропной среде импульс распространяется с групповой скоростью в произвольном направлении, поэтому относительная скорость движения импульсов в направлении оси $z$ определяется проекциями групповых скоростей на эту ось. Линейное по $z$ движение с отрицательной скоростью соответствует меньшей скорости центра инерции по сравнению с групповой скоростью.

Проекции момента зависят от начальной скорости относительного движения импульсов:

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \frac{\mathrm{d}\tau_1(0)}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}\tau_2(0)}{\mathrm{d}z} = \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2. \tag{17}$$

При выполнении граничных условий (14) выполняется соотношение $E_1\tan\varphi_1 = E_2\tan\varphi_2$ [6], с учетом которого выражение (17) можно записать в виде

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \frac{E_1^2 - E_2^2}{2}\left(\frac{\varphi_i}{E_{3-i}}\right)^2, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Для случая одинаковых солитонов ($E_1 = E_2 = E$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) относительная скорость световых пуль (18) равна нулю и выражения для момента и его проекций (16) принимают вид

$$M^2 = E^2\tan^2\varphi\left(R_t^2(0)\sin^2\beta + T^2(0)\right),$$
$$M_t = T(0)\frac{E\tan\varphi}{2}, \; M_z = \frac{\mu}{2}\left|\boldsymbol{R}_t \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_t}{\mathrm{d}z}\right|. \tag{19}$$

Здесь $M_t$ (проекция момента на поперечную плоскость) зависит только от начальной временной задержки между импульсами. Такая закономерность позволяет предположить новую интересную возможность управления параметрами процесса спиралинга.

При сохранении момента, как и в задаче двух тел, движение происходит в плоскости, перпендикулярной направлению момента. Если импульсы изначально находятся в одной поперечной плоскости ($T(0) = 0$), то момент направлен вдоль оси $z$ и движение происходит в поперечной плоскости. В этом случае траектории пуль образуют спираль, аналогичную показанной в [8] для пучков. Изменяя величину $T(0)$, можно изменять направление момента (в продольной плоскости), т. е. изменять положение плоскости, в которой будут вращаться солитоны. Другими словами, изменяя задержку в следовании импульсов, можно изменять пространственные параметры спирали.

Предположим, что в качестве опорной волны выбрана последовательность одинаковых импульсов (световых пуль) с заданной скважностью, причем задержка между импульсами достаточно велика, чтобы пренебречь их взаимодействием. Пусть в качестве сигнальной волны используется последовательность таких же импульсов, но с модулированной скважностью, т. е. в качестве единицы информации выступает временная задержка между соседними импульсами. Детектирование сигнала осуществляется в элементарном акте взаимодействия двух импульсов – опорного и сигнального. Тогда, в соответствии с (19), образующаяся при взаимном захвате опорного и сигнального импульсов структура будет определяться временной задержкой.

Другими словами, произойдет преобразование модуляции последовательности импульсов в модуляцию их пространственного положения. Для оценки времени такого переключения отметим, что световая пуля представляет собой ультракороткий импульс с длительностью порядка десятка фемтосекунд и поперечным размером порядка нескольких микрометров [14]. В качестве длины взаимодействия можно выбрать период спиралинга, который равен дифракционной длине [8] и составляет для световой пули около 1 мм. Тогда время переключения будет равно нескольким пикосекундам, что соответствует тактовой частоте более 1 ТГц. Приведенные оценки совпадают с полученными при прямом численном моделировании в [14], где подчеркивается, что энергии переключения могут составлять $\sim$25 пДж.

В заключение отметим, что взаимодействие оптических пуль с разной энергией имеет более сложный характер. В этом случае углы наклона траекторий двух солитонов к оси $z$ не равны, поэтому относительная скорость импульсов (17) не равна нулю. Можно провести аналогию с задачей о взаимодействии ортогонально поляризованных импульсов в двулучепреломляющем волокне, когда существенной становится расстройка групповых скоростей [29]. Известно, что такие импульсы могут образовывать связанное состояние, называемое векторным солитоном, в котором происходит периодическая модуляция относительной скорости. В применении к оптическим пулям такой захват значительно усложнит картину взаимодействия, сделав ее более богатой.

Авторы признательны Ю.Кившарю за ссылки на LANL-архив [9] и Б.Маломеду за предоставленный до публикации препринт статьи [13]. Мы также благодарны Н.Н.Розанову за ряд важных замечаний, полученных нами во время подготовки настоящей статьи. Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного INTAS (грант № 96-0339).

1. *Новые физические принципы оптической обработки информации.* Под ред. С.А. Ахманова (М., Наука, 1990); Segev M., Stegeman

G. I. *Phys.Today*, **51**, №8pt1, 42 (1998); Stegeman G. I., Segev M. *Science*, **286**, 1518 (1999).
2. Poladian L., Snyder A. W., Mitchell D. J. *Optics Comms*, **85**, 59 (1991); Steblina V.V., Kivshar Yu.S., Buryak A.V. *Optics Letts*, **23**, 156 (1998); Buryak A.V., Kivshar Yu.S., Shih M., Segev M. *Phys. Rev.Letts*, **82**, 81 (1999).
3. Malomed A. *Phys.Rev. E*, **58**, 7928 (1998).
4. Shih M., Segev M., Salamo G. *Phys.Rev.Letts*, **78**, 2551 (1997); Meng H., Salamo G., Segev M. *Optics Letts*, **23**, 897 (1998).
5. Tikhonenko V., Christou J., Luther-Davies B. *Phys.Rev.Letts*, **76**, 2698 (1996); Schjodt-Eriksen J., Schmidt M. R., Rasmussen J. J., Christiansen P. L., Gaididei Yu. B., Berge L. *Phys.Letts A*, **246**, 423 (1998).
6. Десятников А. С., Маймистов А. И. *ЖЭТФ*, **113**, 2011 (1998).
7. Maimistov A., Malomed B., Desyatnikov A. *Phys.Letts A*, **254**, 179 (1999).
8. Десятников А. С. *Физическое образование в вузах*, № 5, 67 (1999).
9. Malmberg J. N., Carlsson A. H., Anderson D., Lisak M., Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S. arXiv: patt-sol/9912001; Garcia-Ripoll J., Perez-Garcia V. M., Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S. arXiv: patt-sol/9912003.
10. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. *Physica D*, **3**, 428 (1981); Karpman V. I., Solov'ev V. V. *Physica D*, **3**, 487 (1981).
11. Silberberg Y. *Optics Letts*, **15**, 1282 (1990); Edmundson D.E., Enns R.H. *Phys.Rev. A*, **51**, 2491 (1995); Edmundson D.E., Enns R.H. *Optics Letts*, **18**, 1609 (1993).
12. Desyatnikov A., Maimistov A., Malomed B. *Phys.Rev. E*, **61**, 3107 (2000).
13. Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C., Malomed B. A., Lederer F. *Phys.Rev. E*, **61**, 7142 (2000).
14. McLeod R., Wagner K., Blair S. *Phys.Rev. A*, **52**, 3254 (1995).
15. Kuznetsov E.A., Turitsyn S.K. *Phys.Letts A*, **112**, 273 (1985).
16. Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. *Phys.Rep.*, **142**, 103 (1986).
17. Захаров В.Е., Соболев В.В., Сынах В.С. *ЖЭТФ*, **60**, 136 (1971).
18. Rosanov N.N. *Progr. in Optics*, **35**, 1 (1996).
19. Snyder A. W., Mitchell D. J., Poladian L., Landouceur F. *Optics Letts*, **16**, 21 (1991).
20. Tikhonenko V., Christou J., Luther-Davies B. *Phys.Rev.Letts*, **76**, 2698 (1996).
21. Malomed B.A., Drummond P., He H., Berntson A., Anderson D., Lisak M. *Phys.Rev. E*, **56**, 4725 (1997).
22. Mihalache D., Mazilu D., Dorring J., Torner L. *Optics Comms*, **159**, 129 (1999).
23. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *ЖЭТФ*, **70**, 2060 (1976).
24. Berge L., Bang O., Rasmussen J. J., Mezentsev V.K. *Phys.Rev. E*, **55**, 3555 (1997).
25. Pushkarov Kh.I., Pushkarov D.I., Tomov I.V. *Optics and Quantum Electron.*, **11**, 471 (1979).
26. Высотина Н.В., Нестеров Л.А., Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *Оптика и спектроскопия*, **85**, 460 (1998).
27. Edmundson D.E., Enns R.H. *Phys.Rev. A*, **51**, 2491 (1995).
28. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **72**, 447 (1992); Розанов Н.Н., Федоров А.В., Федоров С.В., Ходова Г.В. *ЖЭТФ*, **107**, 376 (1995).
29. Kivshar Y. S., Malomed B. A. *Rev.Mod.Phys.*, **61**, 763 (1989); Кившарь Ю.С., Конотоп В. В. *Квантовая электроника*, **17**, 1599 (1990); Кившарь Ю.С. *Квантовая электроника*, **17**, 1603 (1990).

**A.S.Desyatnikov, A.I.Maimistov. Conservation of the angular momentum for multidimensional optical solitons.**

**Analytic expressions are obtained for spin and orbital moments of multidimensional optical solitons – two-dimensional beams and three-dimensional light bullets. It is shown that for given directions of the incidence of light bullets, the time delay in the pulse sequence determines the direction and value of the orbital moment and can be used as a parameter to control the structure appearing during the mutual capture.**