

# Численное исследование автоколебаний в лазере с неустойчивым резонатором

Н.Н.Елкин, А.П.Напартович

*Численно смоделирована динамика генерации в лазере с неустойчивым резонатором. Расчеты выполнены в нестационарном дифракционном приближении с учетом насыщения усиления активной среды. Обнаружено, что область параметров, в которой не достигается стационарная устойчивая генерация, значительно шире области неустойчивости, построенной на основании линейного анализа устойчивости стационарных мод. Выявленная неустойчивость автомодуляционного типа приводит к генерации последовательности коротких острых пиков мощности. Получена зависимость периода следования пиков мощности от времени релаксации коэффициента усиления среды и от степени превышения порога генерации. Обнаружены удвоение и учетверение периода пиков мощности, а также найдены режимы генерации с динамическим хаосом.*

**Ключевые слова:** лазер, неустойчивый резонатор, динамика генерации, дифракция, численное моделирование.

## Введение

Неустойчивые резонаторы применяются в мощных лазерах с большой апертурой для эффективной селекции одной поперечной моды [1]. Численные исследования спектра собственных мод неустойчивого резонатора без активной среды показали [1], что при использовании выходного зеркала с резкими краями моды с наименьшими потерями чередуются при изменении числа Френеля резонатора  $F = a^2/(\lambda L)$ , где  $a$  – радиус зеркала, выводящего излучение;  $\lambda$  – длина волны;  $L$  – длина резонатора. Эти исследования позволили сформулировать практические рекомендации по подбору параметров резонатора.

Для конфокального резонатора с увеличением  $M$  на положительной ветви диаграммы устойчивости, в частности, рекомендуется такой подбор параметров, чтобы эквивалентное число Френеля  $F_{\text{eq}} = F(M-1)/2$  было близко к полужелтому числу [1]. Если  $F_{\text{eq}}$  близко к целому числу, две поперечные моды обладают примерно одинаковыми потерями и могут одновременно участвовать в генерации. С точки зрения влияния на расходимость генерируемого излучения это не катастрофично, поскольку расходимости указанных мод мало отличаются друг от друга.

Однако можно ожидать, что нелинейная конкуренция рассматриваемых мод приведет к возникновению динамических режимов генерации при стационарной накачке. В частности, в работе [2] было показано, что для резонатора с  $F_{\text{eq}}$ , близким к точке вырождения мод по потерям, существуют условия, когда обе конкурирующие моды неустойчивы. Дестабилизировать стационарную одномодовую генерацию даже при оптимальных эквивалентных числах Френеля может также поток активной среды поперек оси неустойчивого резонатора [3].

Традиционно устойчивость как одномодового режима, так и пиковых режимов генерации исследуется в рамках модели квантовых генераторов с сосредоточенными параметрами или путем разложения по небольшому числу мод пустого резонатора. Результаты, полученные в этой области, детально обсуждены в книге [4], где содержится также обширная библиография. При таком подходе моды, по которым проводится разложение, и их частоты предполагаются неизменными, а структура полного поля – изменяющей во времени в соответствии с динамикой коэффициентов разложения.

Рассматриваемая нами ситуация относится к случаю, когда нелинейная деформация мод может быть значительной. Это позволяет нам ожидать возникновения новых эффектов, присущих лазеру как распределенной нелинейной системе. Для корректного исследования динамики генерации лазера в таких случаях необходимо решать нестационарные уравнения дифракционной оптики.

В настоящей работе на основе созданной численной модели рассмотрены вопросы динамики одномодовых режимов в лазере с неустойчивым резонатором. При этом эффекты пространственно-временных биений полей разных мод учитывались в рамках упрощенной модели среды с насыщаемым усилением. Основное внимание уделено анализу резонаторов с  $F_{\text{eq}}$ , близким к точке вырождения мод по потерям.

Биение мод в лазере связано с пространственной и временной неоднородностями электромагнитного поля в резонаторе, содержащем инерционную среду. Генерируемые в реальном лазере моды неустойчивого резонатора могут существенно отличаться от мод пустого резонатора вследствие их нелинейного взаимодействия, а также искажений, вызванных неоднородностью активной среды. Все эти эффекты учитываются в рамках созданной модели.

Отметим, что ранее аналогичное численное исследование лазера как распределенной системы выполнялось лишь для полупроводниковых лазеров [5].

ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, Россия, 142190 Троицк Моск. обл.

Поступила в редакцию 11 апреля 2000 г.

## 1. Математическая формулировка модели и метод решения

Ограничимся рассмотрением двумерных неустойчивых резонаторов, образованных двумя цилиндрическими зеркалами с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ ; зеркала расположены в точках  $z = 0$  и  $z = L$  на оси  $z$ . Будем считать, что активная среда, заполняющая слой  $0 < z < L$ , в поперечном направлении захватывает всю апертуру излучения.

Для типичных условий излучение внутри резонатора описывается скалярным волновым полем вида

$$E(x, z, t) = [F(x, z, t) \exp(ik_0z) + B(x, z, t) \exp(-ik_0z)] \exp(-i\omega_0 t), \quad (1)$$

где  $\omega_0$  – несущая частота;  $k_0 = \omega_0/c$ . Несущую частоту будем считать совпадающей с центром спектральной линии лазерного перехода. Для определенности положим, что длина волны несущей укладывается целое число раз на двойной длине резонатора:  $2k_0L = 2\pi q$  ( $q$  – целое число). Так как для большинства лазерных сред ширина перехода намного больше спектрального интервала для продольных мод, пренебрежем изменением резонансного коэффициента преломления. Предположим также, что нелинейностью преломления вообще можно пренебречь.

Плавные огибающие  $F(x, z, t)$  и  $B(x, z, t)$  удовлетворяют волновым уравнениям параболического типа

$$2ik_0 \left( \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - ik_0 g B = 0, \quad (2)$$

$$2ik_0 \left( \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - ik_0 g F = 0, \quad (3)$$

где  $g$  – коэффициент усиления активной среды, заполняющей резонатор.

Предполагая поверхности зеркал хорошо отражающими, мы можем смоделировать отражение волн от зеркал приближенными граничными условиями:

$$B(x, L, t) = -F(x, L, t) C_2(x), \quad C_2(x) = \exp \frac{ik_0 x^2}{R_2} \rho_2(x), \quad (4)$$

$$F(x, 0, t) = -B(x, 0, t) C_1(x), \quad C_1(x) = \exp \frac{ik_0 x^2}{R_1} \rho_1(x). \quad (5)$$

Вещественные множители (функции отражения)  $\rho_{1,2}(x)$  определяются коэффициентами отражения поверхностей зеркал  $r_{1,2}$  и их размерами (вне зеркал функции отражения равны нулю). Например, если поперечный размер второго зеркала равен  $2a$  и оно расположено симметрично относительно оси  $z$ , то

$$\rho_2(x) = \begin{cases} r_2, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициент усиления  $g(x, z, t)$  найдем из уравнения, учитывающего процессы вынужденного излучения и релаксации в инверсной среде:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{g_0 - g(1 + I)}{\tau}, \quad (7)$$

где  $g_0$  – константа, определяемая условиями накачки;  $I = |B|^2 + |F|^2$  – усредненная по интерференционным биениям встречных волн интенсивность излучения, нормированная на интенсивность насыщения;  $\tau$  – время релаксации.

Начальные условия для электромагнитного поля в резонаторе можно задавать, вообще говоря, в виде произвольных функций

$$B(x, z, 0) = B_0(x, z), \quad F(x, z, 0) = F_0(x, z). \quad (8)$$

Мы же ограничимся такими функциями, которые являются линейными комбинациями мод пустого резонатора. Это облегчает физическую интерпретацию результатов расчетов. Поскольку перед началом генерации во многих случаях среду можно считать пространственно однородной, то начальное распределение коэффициента усиления в (7) будем полагать равным нулю или некоторой константе.

Для физической интерпретации результатов расчета важно сопоставить динамическое поле генерации лазера со стационарными типами колебаний:

$$B(x, z, t) = B_0(x, z) \exp(-\delta t) \exp(-i\Delta\omega t), \quad (9)$$

$$F(x, z, t) = F_0(x, z) \exp(-\delta t) \exp(-i\Delta\omega t), \quad (10)$$

где  $\delta$  – коэффициент затухания;  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  – сдвиг частоты колебаний относительно несущей частоты. Параметры  $\delta$  и  $\Delta\omega$ , а также стационарные распределения поля  $B_0(x, z)$  и  $F_0(x, z)$  находятся из решения задачи на собственные значения для оператора, производящего преобразование поперечного распределения поля при круговом обходе резонатора. Дадим краткую характеристику двух типичных постановок задачи на собственные значения.

Первая задача возникает в предположении «замороженной» среды, когда коэффициент усиления не определяется из уравнения (7), а является заданной функцией координат:

$$g(x, z, t) \equiv \bar{g}(x, z). \quad (11)$$

В этом случае мы имеем линейную задачу на собственные значения для неэрмитова оператора, комплексное собственное число  $\gamma$  которого связано с частотой колебаний и коэффициентом затухания соотношением

$$\gamma = \exp(-g_1 L - i2\Delta k L), \quad (12)$$

где  $g_1 = 2\delta/c$  – пороговое усиление для низшей моды;  $\Delta k = \Delta\omega/c$ . Собственное число  $\gamma$  однозначно определяет  $g_1$  и, следовательно, затухание собственной моды. Сдвиг частоты собственной моды относительно несущей частоты определяется неоднозначно:

$$\Delta k = \frac{-\arg \gamma + 2\pi n}{2L},$$

где  $n$  – индекс продольной моды.

В настоящей работе мы не будем исследовать эффекты взаимодействия различных продольных мод, поэтому всюду полагаем  $n = 0$ . Решение линейной спектральной задачи позволяет строго определить понятие по-

рога генерации. Если при заданном распределении коэффициента усиления среды  $\tilde{g}(x, z)$  все собственные моды удовлетворяют условию  $|\gamma| \leq 1$ , то лазер находится в подпороговом режиме и генерация в нем развиваться не может. Если же хотя бы для одной моды выполняется условие  $|\gamma| > 1$ , то поле этой моды будет нарастать до тех пор, пока в соответствии с моделью, описываемой в нашем случае уравнением (7), не проявится эффект нелинейного насыщения коэффициента усиления среды.

В этом режиме, называемом надпороговым, возможны различные сценарии развития генерации. Одним из них является выход на стационарный режим, когда интенсивность поля не зависит от времени. Из (7) следует, что коэффициент усиления при этом удовлетворяет уравнению

$$g = \frac{g_0}{1 + I}. \quad (13)$$

Коэффициент затухания поля  $\delta$  в этом случае равен нулю, а выражение для поля является решением задачи на собственные значения для оператора, физический смысл которого состоит в том, что оператор описывает преобразование поперечного распределения поля при круговом обходе резонатора; заметим, что в данном случае оператор, как видно из (13), нелинеен.

Собственное число задачи  $\gamma$  связано с собственной частотой соотношением

$$\gamma = \exp(-i2\Delta kL). \quad (14)$$

Найденные стационарные решения задачи могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Чтобы определить их устойчивость по отношению к возбуждению соседних мод, нужно в найденном решении нелинейной задачи «заморозить» среду и найти линейные собственные моды. Если при этом лазер окажется в надпороговом режиме, то решение неустойчиво; в противном случае решение нелинейной задачи устойчиво по отношению к возбуждению соседних мод. Численные алгоритмы сформулированных здесь стационарных задач описаны в [2, 6–8]. Метод численного решения основной (нестационарной) задачи изложен в [9].

## 2. Результаты численного моделирования

Расчеты проводились при следующих параметрах лазера:  $L = 150$  см,  $\lambda = 1.06 \cdot 10^{-3}$  см,  $M = 2$ ,  $T = 2L/c = 10^{-8}$  с. Надпороговый режим генерации характеризовался коэффициентом превышения порога генерации  $\kappa = g_0/g_t$ . С учетом особенностей пространственного распределения поля в неустойчивых резонаторах достаточно ввести сетку по переменной  $z$  из небольшого числа расчетных ячеек  $N_z$ . Большинство расчетов проводилось при  $N_z = 4$ .

Напротив, в направлении оси  $x$  поле имеет сильно изрезанный профиль, использованное в большинстве расчетов число ячеек  $N_x = 512$ . Для контроля точности некоторые варианты пересчитывались на сгущенных сетках  $\{N_z = 8, N_x = 512\}$  и  $\{N_z = 4, N_x = 1024\}$ . Вопрос о точности расчетов будет обсуждаться при описании результатов численного моделирования. Отметим, что края зеркал в расчетах не сглаживались, т. е. для моделирования отражения от зеркала использовалось выражение (6).

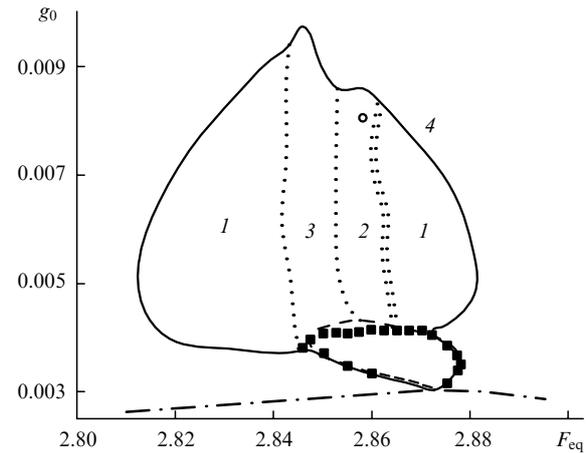


Рис.1. Границы устойчивости стационарной генерации (сплошная кривая), линейной неустойчивости (штриховая кривая) и области биений поперечных мод (кривая из квадратов), а также порог генерации (штрихпунктир). Пунктирные линии разделяют области с различными видами колебаний мощности: область с периодической последовательностью одинаковых пиков (1), область с чередующейся последовательностью из двух пиков разной высоты (2) и область с последовательностью пиков, не образующей периодической структуры (3). Внешнее пространство 4 – область стабильной одномодовой генерации.

### 2.1. Биения двух поперечных мод

В работах [2], [10] численно исследовалась задача об устойчивости стационарной одномодовой генерации в лазере с телескопическим резонатором по отношению к возбуждению других поперечных мод. В случае среды с насыщаемым усилением было показано, что для резонатора с  $F_{eq}$ , близким к точке вырождения мод пустого резонатора по потерям, существуют условия, когда ни одна из двух конкурирующих мод не может генерироваться устойчиво. Рассмотренная неустойчивость соответствует приближению линейной теории, когда влиянием развивающейся моды на усиление можно пренебречь.

Такие условия реализуются в области на фазовой плоскости  $(F_{eq}, g_0)$ , имеющей форму лепестка, нижняя точка которого совпадает с точкой  $(F_{eq}^*, g_t)$ , где  $F_{eq}^*$  – эквивалентное число Френеля, при котором две низшие моды имеют одинаковые потери. На рис.1 эта область для  $M = 2$  в окрестности точки вырождения с  $F_{eq}^* = 2.872$  окружена штриховой линией. Штрихпунктир показывает зависимость порогового усиления от  $F_{eq}$ .

Естественно ожидать, что для вариантов, соответствующих точкам внутри области линейной неустойчивости, в рамках нестационарной модели стационарный режим генерации устанавливаться не будет. Это подтверждается, в частности, расчетами в точках, лежащих внутри замкнутой кривой, помеченной квадратами. Зафиксированное в данных расчетах время релаксации  $\tau$  составило 2.6 мкс.

Результаты расчетов для типичного варианта из серии расчетов внутри области биений поперечных мод представлены на рис.2. Параметры расчета:  $F_{eq}^* = 2.872$ ,  $\kappa = 1.12$ . На рис.2,а показана временная зависимость мощности волны, падающей на выходное зеркало:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, L, t)|^2 dx.$$

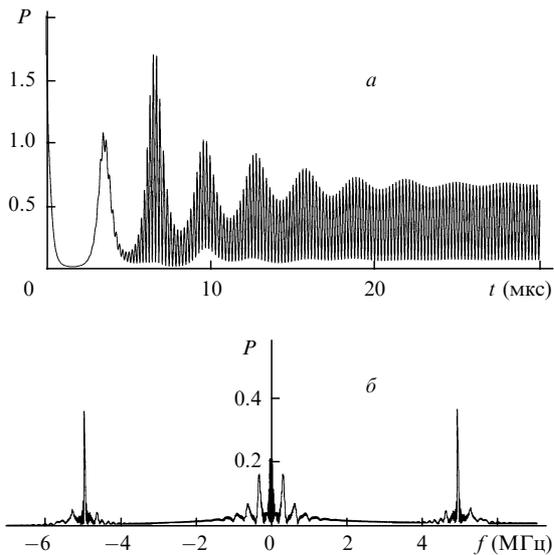


Рис.2. Биения поперечных мод при  $\tau = 2.6$  мкс,  $F_{\text{eq}} = 2.872$ ,  $\kappa = 1.12$ : зависимость мощности от времени (а) и спектр ее осцилляций (б).

Спектр осцилляций мощности, т. е. модуль преобразования Фурье функции  $P(t)$ , показан на рис.2,б. Четко видны пики, свидетельствующие о колебаниях на частоте 4.9 МГц. Зная фазы собственных чисел линейных мод резонатора, можно точно определить частоту биений поперечных мод по формуле  $\omega_b = |\arg \gamma_1 - \arg \gamma_2| / (2\pi T)$ .

Для двух низших мод исследуемого пустого резонатора частота биений равна 5.8 МГц, что заметно отличается от найденной частоты колебаний мощности. Причиной этого является сдвиг частоты генерирующей моды под влиянием нелинейной среды. Расчет нелинейных мод позволил найти частоту биений двух наиболее добротных мод, равную 4.9 МГц, что практически совпадает с частотой колебаний мощности лазера.

Другой особенностью функции  $P(t)$  (рис.2) являются глубокие провалы мощности в минимумах. Эту особенность можно качественно объяснить на языке линейных мод, фаза поля которых зависит от времени по закону  $\sim \exp(-i\Delta\omega t)$ . В [11] показано, что в пустом телескопическом резонаторе с цилиндрическими зеркалами в точке вырождения мод по потерям пространственные распределения полей лишь незначительно отличаются друг от друга.

В рассматриваемом варианте нелинейные искажения мод малы, и если в резонаторе генерируются две практически одинаковые моды, то их линейная комбинация с коэффициентами  $\exp(-i\Delta\omega_1 t)$  и  $\exp(-i\Delta\omega_2 t)$  дает временную зависимость интенсивности вида  $(1 + \cos(\omega_b t))$  с частотой  $\omega_b = |\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2|$ . Отметим, что биения поперечных мод промодулированы плавной осциллирующей огибающей с характерной частотой 0.3 МГц.

Установление стационарной моды в резонаторе сопровождается релаксационными колебаниями, частота которых приближенно определяется формулой [4]

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(\kappa - 1)cg_1}{\tau} - \frac{\kappa^2}{4\tau^2} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Расчет по этой формуле дает  $\nu_r = 0.326$  МГц, что позволяет интерпретировать плавные осцилляции на рис.2 как релаксационные колебания. Начальное поле в приведенном варианте задавалось в виде одной из мод пустого

резонатора. В течение первых 4 мкс генерация происходит на этой моде, затем вследствие неустойчивости начинает развиваться другая поперечная мода и на графике появляются растущие осцилляции, соответствующие биениям поперечных мод.

Следует отметить, что область биений на рис.1, строго говоря, не совпадает с областью линейной неустойчивости. Граница области биений (кривая из квадратов) сливается с границей линейной неустойчивости (штриховая кривая) лишь в нижней части, а в верхней части эти кривые заметно расходятся.

## 2.2. Автоколебательные режимы генерации

Вне области линейной неустойчивости, ограниченной на рис.1 штриховой кривой, существуют стационарные нелинейные моды, устойчивые в линейном приближении по отношению к возбуждению других поперечных мод. Численные расчеты показали, что, вопреки ожиданиям, развитие генерации далеко не всегда приводит к установлению стационарной нелинейной моды. На рис.1 сплошная замкнутая кривая определяет область, где по разным причинам не реализуется устойчивая стационарная генерация. Внутри этой области, полученной на основании численных расчетов при  $\tau = 2.6$  мкс, находятся как область линейной неустойчивости, так и область биений поперечных мод, значительно уступающие области неустойчивости в размерах. Структура области, где не реализуется стационарная генерация, довольно сложна. Помимо уже упомянутой области биений поперечных мод здесь существуют несколько видов автоколебательных режимов, к описанию которых мы приступаем.

Рассмотрим более подробно динамику генерации для варианта, характеризуемого параметрами  $F_{\text{eq}} = 2.872$  и  $\kappa = 1.97$  и принадлежащего подобласти I, состоящей из двух не связанных между собой частей. На рис.3,а изображена зависимость мощности волны, падающей на выходное зеркало, от времени. После первых 5 мкс пе-

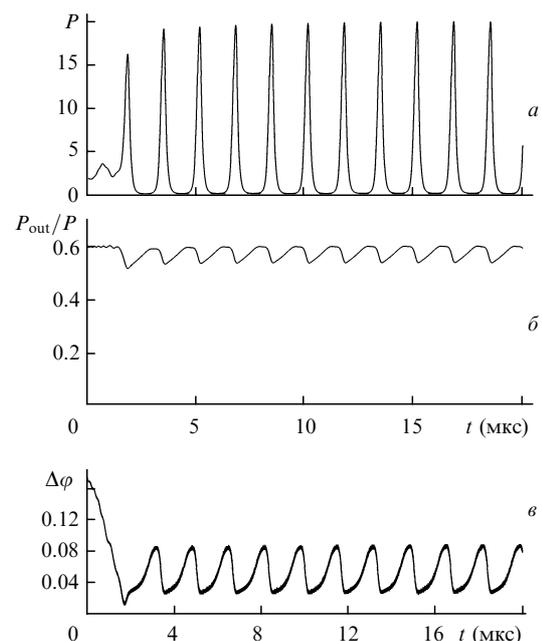


Рис.3. Режим периодической последовательности пиков мощности при  $\tau = 2.6$  мкс,  $F_{\text{eq}} = 2.872$ ,  $\kappa = 1.97$ : мощность волны, падающей на выходное зеркало (а), доля мощности выходной волны (коэффициент потерь) (б) и изменение фазы поля (в).

реходного процесса устанавливается периодическая последовательность одинаковых коротких импульсов с высокой пиковой интенсивностью.

В связи с представленными результатами естественно возникает вопрос о точности численного моделирования. Расчет каждого из вариантов нестационарной генерации требует нескольких десятков тысяч временных шагов. В такой ситуации нереально требовать, чтобы с высокой точностью находились поля в резонаторе во все моменты времени. Задачей численного моделирования является получение достоверной качественной картины в рамках сформулированной модели. Контролировать точность расчетов целесообразно по тем или иным параметрам, представляющим физический интерес.

Одним из таких параметров является период следования пиков, изображенных на рис.3,а. В расчете на сетке с  $\{N_z = 4, N_x = 512\}$  данный период составил 1.71 мкс, на сетке с  $\{N_z = 8, N_x = 512\}$  – 1.67 мкс, на сетке с  $\{N_z = 4, N_x = 1024\}$  – 1.79 мкс. Таким образом, период, полученный при расчетах на сгущенных сетках, отличается от периода, полученного на основной расчетной сетке, не более чем на 5 %, что представляется нам вполне удовлетворительным.

Пространственное распределение интенсивности поля от времени зависит слабо, и поскольку моды пустого резонатора имеют близкие пространственные распределения, то по поперечному распределению интенсивности трудно определить, какая (или какие) моды участвуют в генерации. Более четкие выводы можно сделать, если найти частоту генерируемого излучения и сопоставить ее с частотами мод пустого резонатора.

Для этого будем следить за фазой поля в какой-либо выбранной точке, например в центре выходного зеркала. Введем обозначение

$$\varphi(t) = -\arg F(0, L, t).$$

В случае стационарных колебаний  $\varphi(t) = \Delta\omega t$ , где  $\Delta\omega$  – сдвиг частоты моды относительно несущей частоты  $\omega_0$ . Определим мгновенную частоту (точнее, ее сдвиг относительно  $\omega_0$ ) по формуле  $\Delta\omega = d\varphi/dt$ . Для удобства будем приводить частоты в безразмерном виде, умножая их на  $T$ , для чего введем обозначение

$$\Delta\varphi(t) = T \frac{d\varphi}{dt}.$$

Величина  $\Delta\varphi(t)$  представляет собой сдвиг фазы поля за время  $T$ , создаваемый текущей мгновенной частотой. В линейном случае  $\Delta\varphi(t) = -\arg \gamma$ .

На рис.3,в приведена зависимость  $\Delta\varphi(t)$  для рассматриваемого варианта. Частоты двух наиболее добротных мод пустого резонатора в безразмерных единицах равны соответственно 0.172 и  $-0.192$ . Начальное поле бралось в виде первой из этих мод, о чем свидетельствует тот факт, что  $\Delta\varphi(0) = 0.172$ .

В установившемся режиме функция  $\Delta\varphi(t)$  совершает колебания около  $\Delta\varphi \approx 0.05$ . Устойчивая стационарная нелинейная мода в данном варианте имеет частоту 0.036. Частота другая (неустойчивой) нелинейной моды равна  $-0.022$ . Обе эти моды происходят от упомянутых выше мод пустого резонатора. Приведенная зависимость частоты от времени позволяет говорить о том, что генерируемое в лазере поле близко к устойчивой стационарной

моду, но к ней не стремится, а совершает около нее незатухающие автоколебания.

Таким образом, автоколебания не связаны с нелинейным взаимодействием разных мод, а обусловлены изменением частоты за счет деформации поперечной структуры.

Интересно также выяснить, как зависит от времени коэффициент потерь  $P_{\text{out}}(t)/P(t)$ , где  $P_{\text{out}}(t)$  – мощность выходного излучения. На рис.3,б приведена временная зависимость коэффициента потерь, имеющая периодический характер, при этом период модуляции тот же, что и на рис.3,а. Для стационарной нелинейной моды коэффициент потерь равен 0.559. Модуляции коэффициента потерь в нестационарном режиме вызваны нелинейным насыщением усиления в неоднородном поле.

Помимо представленного на рис.3 варианта мы рассчитали тот, в котором начальные распределения поля и коэффициента усиления были взяты из соответствующего устойчивого решения стационарной задачи. На начальном этапе (порядка нескольких микросекунд) поле в резонаторе не изменялось, но затем из погрешностей машинного счета и погрешностей решения стационарной задачи развилась неустойчивость, которая привела к таким же автоколебаниям, как на рис.3. Полученное подобным образом «мягкое» возбуждение автоколебаний свидетельствует о том, что режим генерации на стационарной моде неустойчив, но механизм неустойчивости здесь другой, нежели рассмотренный в предыдущем разделе механизм биений двух поперечных мод.

Следовательно, есть все основания говорить о новой обнаруженной в численном эксперименте неустойчивости автомодуляционного типа. В ее механизме задействованы изменение частоты в зависимости от распределения поля и модуляция потерь вследствие насыщения усиления. Легко видеть, сравнивая кривые на рис.3,а и б, что лазерный пичок развивается в момент уменьшения коэффициента потерь. В свою очередь изменение коэффициента потерь может быть инициировано изменением частоты моды.

Рассмотрим вариант с параметрами  $\kappa = 2.5$ ,  $F_{\text{eq}} = 2.872$ , отвечающий области 4, внешней по отношению к области неустойчивости, для которого на рис.4 приве-

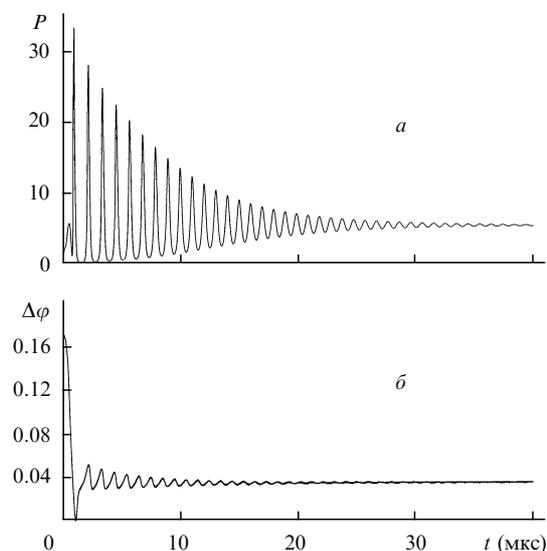


Рис.4. Установление стационарной генерации (мощности (а) и фазы (б)) при  $\tau = 2.6$  мкс,  $F_{\text{eq}} = 2.872$ ,  $\kappa = 2.5$ .

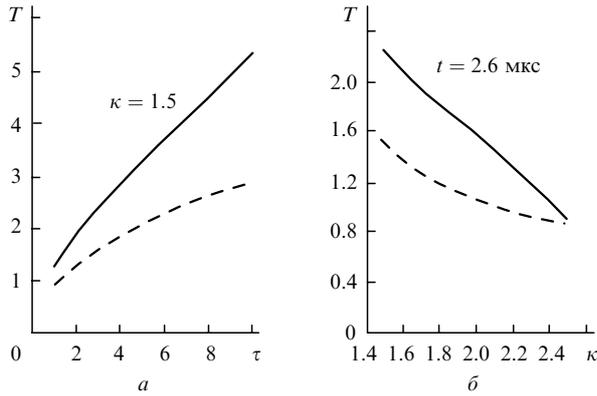


Рис.5. Зависимости от  $\tau$  (а) и  $\kappa$  (б) периода колебаний мощности (сплошные кривые) и периода ( $1/\nu_r$ ) релаксационных колебаний согласно формуле (15) (штриховые кривые);  $F_{eq} = 2.872$ .

дены зависимости  $P(t)$  и  $\Delta\varphi(t)$ . Видно, что генерация развивается по сценарию установления стационарной моды. Мощность  $P(t)$  совершает затухающие колебания с периодом 1 мкс. Период релаксационных колебаний, найденный по формуле (15), составляет 0.87 мкс, что близко к значению, наблюдаемому в численном эксперименте.

Зависимость  $\Delta\varphi(t)$  стремится к постоянному значению 0.034. Устойчивая стационарная мода в этом варианте имеет частоту 0.0339, что практически совпадает с предельным значением  $\Delta\varphi(t)$ . Таким образом, мы можем с уверенностью констатировать, что вне области неустойчивости генерация развивается по сценарию установления устойчивой стационарной моды, причем в процессе установления мощность совершает релаксационные колебания, период которых может быть оценен по формуле (15).

Возвращаясь к области автоколебательных режимов, попытаемся выяснить, от чего зависит период колебаний лазерной мощности. Для этого мы провели серию расчетов при  $F_{eq} = 2.872$ , варьируя параметры  $\kappa$  и  $\tau$ . Зависимость периода колебаний от параметров  $\kappa$  и  $\tau$  изображена на рис.5, где она сравнивается с соответствующими зависимостями для частоты релаксационных колебаний, посчитанной по формуле (15).

Отметим, что характер колебаний был аналогичен изображенному на рис.3. А.Н.Ораевский указал нам на выражение, полученное в [12] (см. также [4]), для периода нелинейных автоколебаний

$$T_{NL} = \frac{2}{\kappa - 1} \left( \frac{2I_{max}\tau}{cg_t} \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Чтобы сопоставить эту зависимость с приведенными на рис.5 численными результатами, нужно определить  $I_{max}$ . В нашем случае интенсивность заметно неоднородна по сечению и длине. Зависимость  $T_{NL}(\tau)$  может быть оценена путем замены интенсивности пиковой интенсивностью, падающей на выходное зеркало. Расчет по формуле (16) показывает, что период почти пропорционален  $\tau$ , что согласуется с данными рис.5. Это означает, что реальная пиковая мощность лазера не меняется с  $\tau$  (напомним, что мощность нормирована на мощность насыщения, которая пропорциональна  $\tau^{-1}$ ).

Другой характерный тип автоколебаний состоит в том, что пики двух разных высот образуют чередующуюся

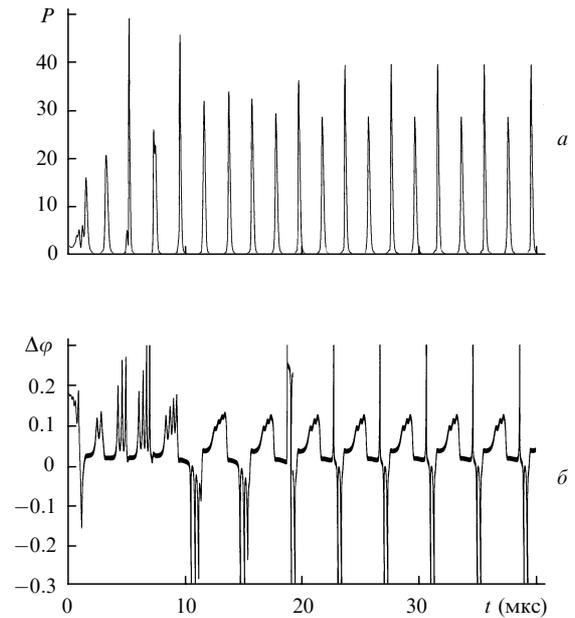


Рис.6. Установление чередующейся последовательности  $P$  (а) и  $\Delta\varphi$  (б) из двух пиков при  $\tau = 2.6$  мкс,  $F_{eq} = 2.8575$ ,  $\kappa = 2.03$ ,  $T > 20$  мкс.

ся последовательность. Такое явление наблюдается в области 2 (рис.1) и соответствует хорошо известному в теории колебаний удвоению периода. На рис.6 изображены зависимости  $P(t)$  и  $\Delta\varphi(t)$ , иллюстрирующие (при  $T > 20$  мкс) такой режим, полученный для  $F_{eq} = 2.8575$ ,  $\kappa = 2.03$  и  $\tau = 2.6$  мкс. Здесь картина колебаний более сложная, чем в случае, изображенном на рис.3 и 4, и полученные зависимости не позволяют сделать вывод о том, что колебания происходят на какой-то определенной моде. Были найдены также варианты, когда четыре пика разной высоты образовывали чередующуюся последовательность (учетверение периода). Один из вариантов отмечен кружком на рис.1.

Наконец, в области 3 на рис.1 нами были обнаружены еще более сложные последовательности пиков, не образующие периодической структуры в пределах рассчитанного интервала времени. Один из таких вариантов с па-

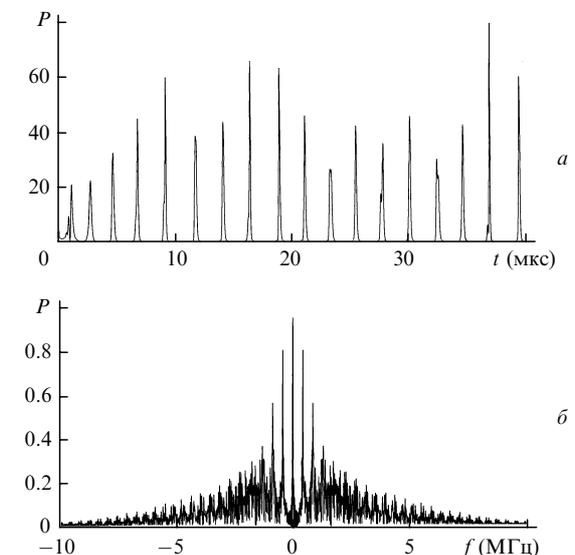


Рис.7. Нерегулярная последовательность пиков мощности  $P$  (а) и ее спектр (б) при  $\tau = 2.6$  мкс,  $F_{eq} = 2.8475$ ,  $\kappa = 2.07$ .

раметрами  $F_{\text{eq}} = 2.8475$ ,  $\kappa = 2.07$  и  $\tau = 2.6$  мкс представлен на рис.7. График мощности представляет собой последовательность коротких острых пиков, изменение высот которых не имеет периодического характера. Спектр в этом случае имеет вид полосы и не содержит сколь угодно заметных выделенных частот, что свидетельствует о нерегулярном характере колебаний, который можно классифицировать как динамический хаос.

Границы между областями с определенными типами колебаний показаны на рис.1 пунктиром. На самом деле они представляют собой узкие слои с довольно сложной структурой, не изображенной на рис.1. Чтобы отразить этот факт, мы обозначили границу, разделяющую области 1 и 2, двумя линиями. В некотором слое тощности порядка расстояния между этими двумя линиями реализуется либо нерегулярная последовательность пиков, либо последовательность с периодом более 2.

## Заключение

Тщательный численный анализ динамики генерации в лазере с неустойчивым резонатором в рамках простейшей модели насыщения усиления показал возможность реализации целого ряда различных нестационарных режимов генерации. Найдена область параметров на плоскости (эффективное число Френеля, превышение порога генерации), в которой при небольших изменениях указанных параметров могут иметь место незатухающие регулярные биения полей двух мод, регулярные автоколебания с переходом в хаотические осцилляции и устойчивый стационарный режим.

Следует отметить, что указанные явления имеют место в отсутствие самомодуляции, т. е. нелинейного изменения коэффициента преломления среды. Колебания вызваны новым механизмом неустойчивости, обусловленным зависимостью от интенсивности света характеристик нелинейной оптической моды – собственной частоты и коэффициента потерь.

А.Н.Ораевский обратил наше внимание на работу А.Ф.Сучкова [13], в которой численно обнаружены автоколебания в упрощенной модели лазера с плоскопараллельным резонатором и усиливающей средой, сосредоточенной в узкой приосевой области. Условия, в которых получены колебания, близки к рассмотренным нами, ес-

ли не учитывать различия в типах резонаторов. Однако в работе А.Ф.Сучкова рассмотрение ограничено только случаем полного вырождения мод по потерям и наблюдавшиеся колебания по природе близки к биениям мод, имеющим место в области биений поперечных мод на рис.1. Более детальное сопоставление механизмов колебаний затруднено из-за краткости изложения материала в работе [13].

Полученные результаты свидетельствуют об ограниченности применимости так называемых сосредоточенных моделей динамики генерации лазеров [4].

Авторы выражают благодарность А.Н.Ораевскому за интерес к работе и сделанные замечания.

1. Афанасьев Ю.А. *Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения* (М., Наука, 1979).
2. Елкин Н.Н. *Математическое моделирование*, **2**, №9, 133 (1990).
3. Дрейзин Ю.А., Дыхне А.М. *Письма в ЖЭТФ*, **19**, 718 (1974).
4. Ханнин Я.И. *Динамика квантовых генераторов* (М., Сов. радио, 1975, т.2).
5. Adachihara H., Hess O., Abraham E. et al. *J.Opt.Soc. Amer.B*, **10**, 658 (1993).
6. Elkin N.N., Korotkov V.A., Likhanskii V.V. et al. *Proc.SPIE*, **1031**, 229 (1989).
7. Елкин Н.Н. *Математическое моделирование*, **2**, №5, 104 (1990).
8. Elkin N.N., Napartovich A.P. *Appl.Math.Modelling*, **18**, 513 (1994).
9. Елкин Н.Н. *Математическое моделирование*, **10**, №4, 91 (1998).
10. Elkin N.N., Korotkov V.A., Napartovich A.P., Troshchiev V.E. *Proc.SPIE*, **1224**, 133 (1990).
11. Horwitz P. *J.Opt.Soc.Amer*, **63**, 1528 (1973).
12. Беленов Э.М., Морозов В.Н., Ораевский А.Н. *Труды ФИАН*, **52**, 237 (1970).
13. Сучков А.Ф. *ЖЭТФ*, **49**, 1495 (1965).

**N.N.Elkin, A.P.Napartovich. Numerical study of self-oscillations in a laser with an unstable cavity.**

Dynamics of oscillation in a laser with an unstable cavity was numerically simulated. The calculations were made in the nonstationary diffraction approximation taking into account the saturation of gain in an active medium. The domain of parameters in which stationary stable lasing is not reached was found to be considerably wider than the instability domain constructed on the basis of the linear analysis of stability of stationary modes. The analysis showed the existence of the self-modulation instability that leads to the generation of a series of short sharp power peaks. The dependence of their repetition period on the gain relaxation time and the excess over the laser threshold was obtained. Doubling and quadrupling of the period of power peaks were found and the conditions providing lasing with dynamic chaos were determined.