

О нормализации наблюдаемой формы спектральной линии усиления с ростом оптической толщины слоя вещества

Н.С.Бухман

Показано, что в усиливающей среде при увеличении оптической толщины слоя наряду с сужением спектральной линии усиления происходит нормализация ее наблюдаемой формы. В результате при достаточной толщине слоя активной среды наблюдаемый профиль спектральной линии усиления всегда оказывается гауссовым, независимо от истинного форм-фактора линии. Нормализация профиля линии продемонстрирована на примере линий с лоренцевым, гауссовым и «временнотным» истинными профилями.

Ключевые слова: спектральная линия, усиление, сужение, нормализация, форм-фактор.

Пусть имеется слой вещества (толщиной z) с коэффициентом усиления света (по интенсивности) $\alpha(\omega)$. Если это усиление обусловлено существованием инверсии населенностей уровней, ответственных за спектральную линию с частотой ω_0 и форм-фактором $g(\Omega)$ ($\omega = \omega_0 + \Omega$), то для коэффициента усиления света имеем [1, 2]

$$\alpha(\omega) = \alpha(\omega_0 + \Omega) = \alpha_0 g(\Omega). \quad (1)$$

В (1) предполагается, что истинный форм-фактор спектральной линии $g(\Omega)$ нормирован на единицу в максимуме ($g(0) = 1$), $\alpha_0 = \alpha(\omega_0)$ – коэффициент усиления в центре линии. Тогда для коэффициента передачи слоя по интенсивности [1] $G(\omega, z) = \exp[\alpha(\omega)z]$ имеем

$$G(\omega, z) = G(\Omega, \xi) = \exp[\xi g(\Omega)], \quad (2)$$

где $\xi = \alpha_0 z$ – оптическая толщина слоя.

Очевидно, что наблюдаемая форма линии (в отсутствие нерезонансного поглощения) определяется функцией

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega, \xi) &= G(\Omega, \xi) - 1 = \exp[\xi g(\Omega)] - 1 \\ &= [\exp(\xi) - 1] \gamma(\Omega, \xi), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\gamma(\Omega, \xi) \equiv \frac{\Phi(\Omega, \xi)}{\Phi(0, \xi)} = \frac{\exp[\xi g(\Omega)] - 1}{\exp(\xi) - 1} \quad (4)$$

– наблюдаемый форм-фактор линии, нормированный на единицу в максимуме и на нуль вдали от центра линии ($\gamma(0, \xi) = 1$, $\gamma(\pm \infty, \xi) = 0$ при любом ξ).

Хорошо известно [1, 2], что вследствие экспоненциальной связи между коэффициентом передачи слоя $G(\Omega, \xi)$ и истинным форм-фактором линии $g(\Omega)$ наблюдаемый форм-фактор $\gamma(\Omega, \xi)$ (4) будет совпадать с истинным только при малой оптической толщине слоя ($\xi \ll 1$) и, соот-

ветственно, слабом усилении слоя. Тогда, пренебрегая членами порядка ξ , получаем

$$\gamma(\Omega, \xi) = g(\Omega). \quad (5)$$

В случае не малой оптической толщины слоя ($\xi \simeq 1$ или $\xi \gg 1$) и, соответственно, не малого коэффициента усиления $\Phi(\Omega, \xi)$ наблюдаемый форм-фактор линии $\gamma(\Omega, \xi)$ будет отличаться от истинного. В частности, при столкновительном уширении спектральной линии (лоренцев контур линии) и $\xi \gg 1$ наблюдаемая ширина спектральной линии усиления будет уменьшаться по закону $\sim \xi^{-1/2}$ с ростом оптической толщины ξ [1].

Основная цель настоящей работы – подчеркнуть, что при росте оптической толщины слоя одновременно с сужением наблюдаемой спектральной линии усиления происходит ее нормализация, т. е. приближение ее формы к форме гауссовой кривой, параметры которой определяются оптической толщиной слоя ξ и степенью остроты истинного форм-фактора линии $g(\Omega)$ в центре линии $g''(0)$. От прочих параметров линии наблюдаемый форм-фактор $\gamma(\Omega, \xi)$ в пределе $\xi \rightarrow \infty$ не зависит.

Действительно, раскладывая функцию $\ln \gamma(\Omega, \xi)$ в степенной ряд по Ω вблизи центра линии ($\Omega = 0$) и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (квадратичное приближение), нетрудно получить для форм-фактора $\gamma(\Omega, \xi)$ (4) следующую гауссову аппроксимацию:

$$\gamma(\Omega, \xi) = \exp \left[- \left(\frac{2\Omega}{\Omega_0} \right)^2 \frac{\xi}{1 - \exp(-\xi)} \right] = \beta^{-[2\Omega/\Delta\Omega_{1/\beta}(\xi)]^2}, \quad (6)$$

где $\Omega_0^2 \equiv -8/g''(0)$;

$$\Delta\Omega_{1/\beta}(\xi) = \Omega_0 \{ \ln \beta [1 - \exp(-\xi)] / \xi \}^{1/2} \quad (7)$$

– ширина наблюдаемого форм-фактора спектральной линии на уровне $1/\beta$ от максимума. В частности, для ширины наблюдаемого форм-фактора спектральной линии $\gamma(\Omega, \xi)$ на уровне $1/2$ от максимума имеем

$$\Delta\Omega_{1/2}(\xi) = \Omega_0 f(\xi), \quad f(\xi) \equiv \{ \ln(2) [1 - \exp(-\xi)] / \xi \}^{1/2}. \quad (8)$$

В случае $\xi \ll 1$ имеем $f(\xi) = (\ln 2)^{1/2} \simeq 1$, а в случае $\xi \gg 1$ $-f(\xi) = [(\ln 2)/\xi]^{1/2} \ll 1$.

Из метода получения аппроксимации (6) непосредственно следует ее применимость для произвольной оптической толщины ξ , но лишь при $\Omega \rightarrow 0$ (с точностью до квадратичных по Ω членов). Тем не менее оказывается, что при большой оптической толщине слоя ξ гауссова аппроксимация (6) становится асимптотически точной.

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что он полностью совпадает с «не вероятностной» частью доказательства центральной предельной теоремы. При желании «не вероятностную» часть теоремы можно сформулировать как утверждение о стремлении произведения достаточно большого числа характеристических функций независимых случайных величин (при суммировании независимых случайных величин их характеристические функции перемножаются) к гауссовой функции, которая является характеристической функцией их нормально-распределенной суммы (см. [3]).

Теперь достаточно отметить, что $G(\Omega, \xi) = [G(\Omega, 1)]^\xi$, причем функцию $G(\Omega, 1)$ можно отождествить с характеристической функцией одной случайной величины, а функцию $G(\Omega, \xi)$ – с нормализующейся характеристической функцией суммы ξ случайных величин. Из этого следует, что условием асимптотической точности аппроксимации (6) при неограниченном возрастании ξ является требование существования и отрицательности второй производной истинного форм-фактора спектральной линии в ее центре (аналогичное условие центральной предельной теоремы – условие существования дисперсии у суммируемых случайных величин).

Если оставить в стороне аналогию с центральной предельной теоремой, то асимптотическая точность (6) следует просто из известного факта сужения наблюдаемой спектральной линии усиления с ростом коэффициента усиления – когда наблюдаемый форм-фактор спектральной линии $\gamma(\Omega, \xi)$ становится существенно уже истинного $g(\Omega)$ и его форма начинает контролироваться только центральной частью форм-фактора $g(\Omega)$, а не «крыльями», что с учетом (4) приводит нас к гауссовой аппроксимации (6). Не следует, например, ожидать нормализации наблюдаемого контура линии в случае прямоугольного, трапецеидального или треугольного форм-фактора линии.

Конкретизируем полученные формулы (6),(7) для трех наиболее распространенных истинных форм-факторов линий – лоренцева (L), возникающего за счет столкновительного или радиационного уширения линии, «времяпролетного» (T), возникающего вследствие ограниченного времени взаимодействия света с веществом, и гауссова (G), вызванного доплеровским уширением линии [1, 2]. В этих случаях для истинного форм-фактора линии и параметра $\Omega_0 \equiv (-8/g''(0))^{1/2}$ имеем

$$g_L(\Omega) = \left[1 + (2\Omega/\Delta\Omega_L)^2\right]^{-1}, \quad \Omega_0^L = \Delta\Omega_L,$$

$$g_T(\Omega) = \text{sinc}^2[x_0(2\Omega/\Delta\Omega_T)], \quad \Omega_0^T = (3^{1/2}/x_0)\Delta\Omega_T, \quad (9)$$

$$g_G(\Omega) = \exp\left[-\ln(2)(2\Omega/\Delta\Omega_G)^2\right], \quad \Omega_0^G = (\ln 2)^{-1/2}\Delta\Omega_L,$$

где $x_0 \approx 1.39$ – корень уравнения $\text{sinc}^2 x_0 = 1/2$ ($\text{sinc} x \equiv (\sin x/x)$); $\Delta\Omega_L$, $\Delta\Omega_T$ и $\Delta\Omega_G$ – ширины истинных форм-факторов линий (g_L , g_T , g_G) на уровне 1/2 от максимума.

Зависимость этих параметров от свойств среды приведена, например, в [1, 2].

С учетом (8), (9) для наблюдаемой ширины спектральной линии усиления на уровне 1/2 от максимума в случае лоренцевой, времяпролетной и гауссовой истинных форм линий имеем

$$\Delta\Omega_{1/2}^L(\xi) = \Delta\Omega_L f(\xi),$$

$$\Delta\Omega_{1/2}^T(\xi) = (3^{1/2}/x_0)\Delta\Omega_T f(\xi), \quad (10)$$

$$\Delta\Omega_{1/2}^G(\xi) = (\ln 2)^{-1/2}\Delta\Omega_G f(\xi),$$

где функция $f(\xi)$ определена в (8).

Из (8) видно, что при $\xi \gg 1$ наблюдаемая ширина спектральной линии определяется не шириной ее истинного форм-фактора $g(\Omega)$ на уровне 1/2, а степенью его остроты вблизи центра линии, т.е. параметром Ω_0 . В частности, из (10) видно, что при одинаковых полуширинах истинного форм-фактора линии наблюдаемая ширина в случае столкновительного уширения будет примерно на 20–25 % меньше, чем в случае доплеровского или времяпролетного уширения. Это представляется вполне естественным, если учесть большую остроту лоренцева форм-фактора вблизи центра линии.

Для оценки реальной степени нормализации наблюдаемой формы спектральной линии на рис.1 проведено сопоставление гауссовой аппроксимации (6) с точными наблюдаемыми форм-факторами для лоренцева, времяпролетного и гауссова профилей спектральной линии, которые вычислялись непосредственно по формулам (4), (9). На рис.1 приведены функции $\gamma^{L,T,G}(\Omega, \xi)$ при $\xi = 0$ (когда наблюдаемый форм-фактор γ совпадает с истинным форм-фактором g , см. (5)), при промежуточных оптических толщинах слоя $\xi = 2, 4, 8$ и при $\xi = \infty$ (когда наблюдаемый форм-фактор полностью нормализуется). На рис.1 ширина форм-фактора $\Delta\Omega_{1/2}$ в безразмерной частоте $2\Omega/\Delta\Omega_{1/2}(\xi)$ определяется формулой (10) и различна при разных механизмах уширения.

Выбор масштаба обеспечивает одинаковую «расчетную» ширину всех графиков, т.е. автоматический учет сужения спектральной линии с ростом оптической толщины слоя вещества ξ (в соответствии с (8)) и учет закономерного различия наблюдаемых ширин спектральных линий при разных механизмах уширения (в соответствии с (10)). Именно поэтому все кривые на рис.1 совпадают вблизи центра ($\Omega = 0$), что позволяет сосредоточиться на анализе их формы (каковой они только и различаются).

На рис.2 аналогичное сопоставление проведено для ширины наблюдаемой линии усиления на уровнях $1/\beta = 1/2, 1/10$ и $1/100$ от максимума. Здесь $2\Delta\Omega_{1/\beta}/\Omega_0$ – нормированная на «степень остроты истинного форм-фактора» Ω_0 ширина наблюдаемой линии усиления. Параметр Ω_0 для трех типов уширения (L, T и G) по-прежнему определялся соотношением (9), наблюдаемые ширины линий $\Delta\Omega_{1/\beta}$ находились непосредственно с использованием точной формулы (4). Кривые, соответствующие различным механизмам уширения линий, отмечены на рис.2 буквами L, T, G, а буквой А – кривые, полученные с использованием аппроксимации (6).

На рис.2, как и на рис.1, выбор соответствующего масштаба по оси ординат позволил учесть «закономерные» различия столкновительного, времяпролетного и

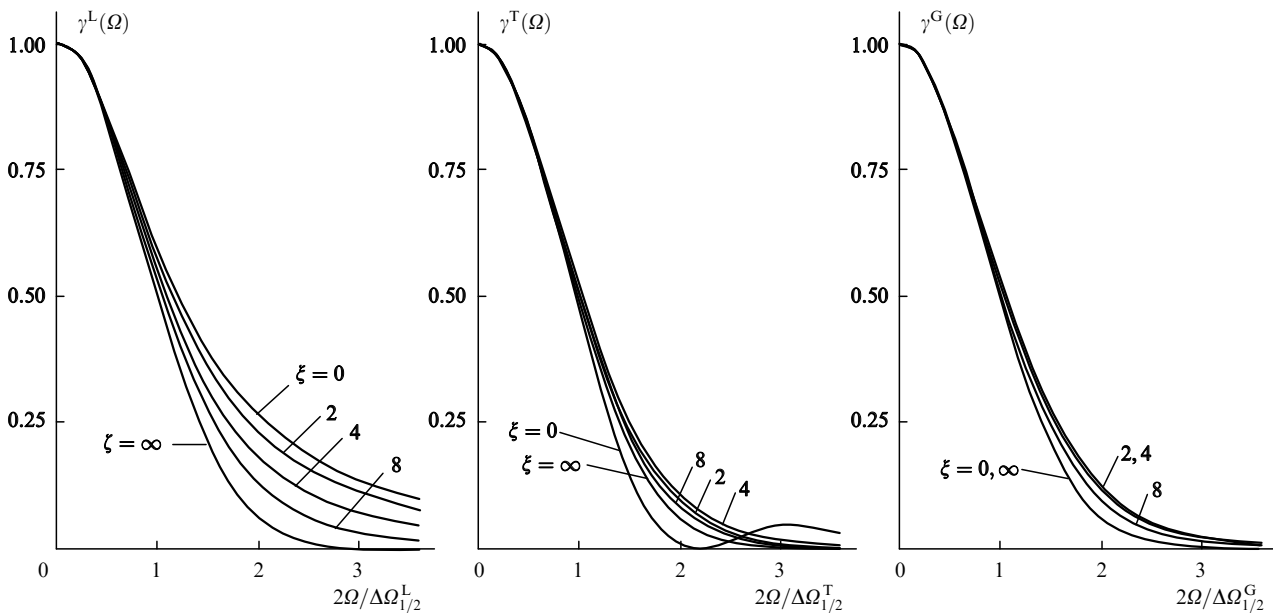


Рис.1. Наблюдаемые форм-факторы спектральной линии усиления при разной оптической толщине слоя вещества ξ в случае лоренцева (L), гауссова (G) и времяпролетного (T) истинных форм-факторов линии.

доплеровского уширения линии, оставив для обозначения лишь зависимость «нормированных» ширин от оптической толщины слоя (в противном случае для каждого случая уширения требовалась бы своя собственная асимптотическая кривая).

Основной вывод, который можно сделать из рис. 1 и 2, заключается в том, что во всех трех рассмотренных случаях действительно происходит нормализация наблюдаемого профиля линии при увеличении оптической толщины слоя. Подтверждается, в частности, асимптотическая справедливость формулы (7) при любом выборе уровня определения ширины линии $1/\beta$. Вместе с тем видно, что при малых значениях $1/\beta$ (при определении ширины линии «по подошве» контура линии) область реальности применимости аппроксимации (6), (7) сдвигается в сторону больших оптических толщин ξ .

Кроме того, видно, что медленнее всего нормализация наблюдаемой формы спектральной линии усиления происходит при столкновительном уширении (L). В этом случае «основание» наблюдаемого профиля линии всегда шире основания при гауссовой аппроксимации, причем

«визуально» переход от «почти лоренцева» к «почти гауссову» профилю линии происходит достаточно поздно – при $\xi \approx 4$, что соответствует коэффициенту усиления по интенсивности в центре линии $\Phi(0, \xi) \approx 50$. Гораздо быстрее нормализуется наблюдаемая форма спектральной линии при времяпролетном (T) или доплеровском (G) уширении. В этих случаях максимальное отличие (не очень значительное) наблюдаемого профиля спектральной линии от гауссова достигается уже при $\xi \approx 2$, что соответствует коэффициенту усиления в центре линии $\Phi(0, \xi) \approx 6$; при больших оптических толщинах слоя происходит достаточно быстрый выход на гауссову асимптотику (6).

Вообще при $\xi \geq 1$ наблюдаемая форма спектральной линии в случае времяпролетного и доплеровского уширения оказывается практически одинаковой (чего не скажешь об истинной форме этих спектральных линий; см. рис.1 при $\xi = 0$). Для времяпролетного уширения при малой оптической толщине ξ наблюдаемая форма спектральной линии существенно отличается от гауссовой, но уже при $\xi \approx 0.5$ она более походит на гауссову, чем «сама на себя» – приближение к гауссовой асимптотике ($\xi \gg 1$) осуществляется не со стороны «тонкослойной асимптотики» ($\xi \ll 1$), а со стороны, противоположной отклонению гауссовой асимптотики от истинного профиля при малой оптической толщине (см. рис. 1 и 2).

В случае доплеровского уширения спектральной линии аппроксимация (6), (7) оказывается справедливой не только при $\xi \rightarrow \infty$, но и при $\xi \rightarrow 0$. Это обстоятельство, несмотря на его случайный характер, позволяет рассматривать аппроксимацию (6), (7) как универсальную для гауссова профиля истинного форм-фактора линии, т. е. пригодную при любой оптической толщине слоя вещества ξ . Погрешность этой аппроксимации невелика и достигает максимума при $\xi \approx 3$, что соответствует коэффициенту усиления в центре линии $\Phi(0, \xi) \approx 20$.

В более реалистичной постановке задачи кроме резонансного усиления света (на частотах, близких к частоте спектральной линии) следует учесть также нерезонансное поглощение излучения (слабо зависящее от частоты вблизи резонансной частоты ω_0). В этом случае вместо

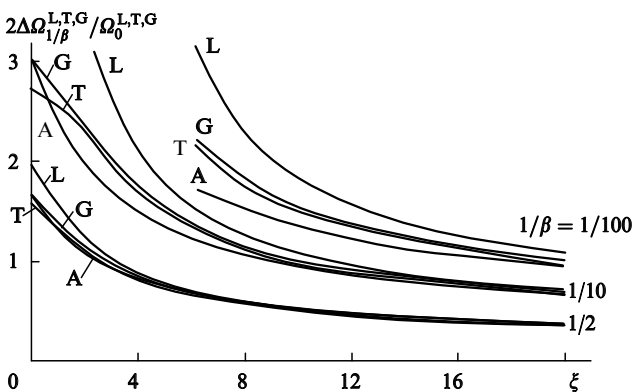


Рис.2. Зависимость ширины наблюдаемой спектральной линии усиления на уровне $1/\beta$ (от максимума) от оптической толщины слоя вещества ξ при разных параметрах $1/\beta$ в случае лоренцева (L), гауссова (G) и времяпролетного (T) истинных форм-факторов линии, а также их общая аналитическая аппроксимация (A).

(1) для коэффициента усиления имеем

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 g(\Omega) - \alpha_1, \quad (11)$$

где α_1 – коэффициент нерезонансного поглощения, а вместо (2) –

$$G(\Omega, \xi) = \exp[\xi g(\Omega) - \xi_1] = \exp(-\xi_1)[1 + \Phi(\Omega, \xi)], \quad (12)$$

где $\xi_1 = \alpha_1 z$.

Нетрудно проверить, что замена (1), (2) на (11), (12) не повлечет за собой никаких изменений в последующих рассуждениях, кроме одной существенной детали – исчезнет обязательная связь между нормализацией и сужением наблюдаемой формы спектральной линии (с одной стороны) и большим коэффициентом усиления слоя (с другой). Действительно, нормализация контролируется параметром $\xi \gg 1$ и дополнительное нерезонансное ослабление сигнала на нее не влияет. Это значит, что при $\xi \approx \xi_1 \gg 1$ теоретически возможны сколь угодно значительное сужение спектральной линии усиления и полная ее нормализация при умеренном коэффициенте усиления (или поглощения) в центре линии.

Интересно, что такого рода «фильтр» является «неинтерференционным», в отличие от спектральных анализаторов типа интерферометра Фабри – Перо, в том смысле, что узость полосы пропускания (или усиления) обусловлена не выполнением каких-либо фазовых соотношений, а просто селекцией проходящих через слой вещества фотонов по частоте.

Отметим, что попытка «преднамеренного сужения» спектральной линии путем увеличения эффективной оптической толщины слоя активной среды в отсутствие нерезонансного поглощения неизбежно приводит к экспоненциальному возрастанию мощности сигнала и необходимости учета насыщения усиления [1, 2], которое в настоящей работе игнорируется.

Другое направление «расширительного использования» приведенных выше результатов лежит в русле учета не только «распределенного» фильтра, которым является слой активного вещества, но и «сосредоточенных» фильтров (типа полупрозрачных зеркал, линз и т. п.). Нетрудно проверить, что появление такого рода элементов не вызовет принципиального изменения приведенных выше результатов.

Если число «сосредоточенных» фильтров конечно, то их влияние можно учесть просто перемножением гауссова коэффициента передачи слоя и коэффициентов передачи сосредоточенных фильтров. Результат этого перемножения будет определяться тем из фильтров, который окажется более узким. При достаточной толщине слоя таковым всегда окажется гауссов фильтр, и влияние прочих элементов сведется к общему усилению или ослаблению сигнала.

В более интересном случае неограниченного возрастания числа однотипных «сосредоточенных» фильтров с ростом оптической толщины слоя вещества (линзовая линия или открытый резонатор) ничто не мешает включить передаточные характеристики дополнительных фильтров в (2). Это приведет лишь к изменению вида функции

$\alpha(\omega)$, которая будет теперь определяться не только истинным форм-фактором спектральной линии $g(\Omega)$ (1) и коэффициентом нерезонансного поглощения α_1 (11), но и параметрами «сосредоточенных» фильтров. В случае резкой частотной зависимости передаточных характеристик фильтров эта «перенормировка» приведет к смещению центральной частоты полосы пропускания в сторону от центра спектральной линии ω_0 и к изменению параметра Ω_0 , но не скажется ни на отмеченной выше аналогии с центральной предельной теоремой, ни на нормализации передаточной характеристики слоя вещества. Отметим, что эта аналогия станет еще более прямой, поскольку исчезнет искусственное разделение слоя вещества на «подслои» единичной толщины, играющие роль отдельных фильтров, и можно будет говорить просто о перемножении «однопроходных» передаточных функций при многократных проходах некоего фильтра.

Основным результатом проведенного выше рассмотрения является вывод о нормализации наблюдаемой формы спектральной линии усиления и передаточной функции слоя вещества с ростом оптической толщины вещества ξ независимо от формы истинного форм-фактора спектральной линии и, соответственно, от механизма уширения спектральной линии. В любом случае при росте оптической толщины ξ наблюдаемая форма линии стремится к гауссовой, а наблюдаемая ширина спектральной линии уменьшается по закону $\xi^{-1/2}$. При этом для формы линии и ее ширины на разных уровнях можно использовать универсальные формулы (6), (7).

Отсюда следует, в частности, что при достаточной толщине слоя активного вещества шумовой сигнал всегда нормализуется [3], причем время корреляции растет по закону $\xi^{1/2}$. Длительность детерминированного сигнала при прохождении слоя растет по закону $\xi^{1/2}$ (что существенно медленнее обычного дисперсионного расплывания волнового пакета [4]). При этом энергия сигнала растет по закону $\xi^{-1/2} \exp \xi$, а максимальная интенсивность – по закону $\xi^{-1} \exp \xi$. Разумеется, эти выводы справедливы только при достаточно малом времени корреляции фильтруемого шума или достаточно малой исходной длительности детерминированного сигнала. Однако сужение спектральной линии с ростом оптической толщины слоя вещества приводит к тому, что для любого шума или сигнала при достаточно большой толщине слоя эти условия всегда выполняются.

1. Клышко Д.Н. *Физические основы квантовой электроники* (М., Наука, 1986).
2. Карлов Н.В. *Лекции по квантовой электронике* (М., Наука, 1983).
3. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М., Наука, 1981).
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М., Наука, 1979).

N.S.Bukhman. On the normalisation of the observed spectral gain line profile with increasing optical thickness of a substance layer.

It is shown that a spectral gain line narrows down and its profile is normalised with increasing optical thickness of a layer of the amplifying medium. As a result, the gain line profile always becomes Gaussian, independently of the actual form factor of the line, when the thickness of the active medium layer is sufficiently large. The normalisation of the line profile is demonstrated for the lines with Lorentzian, Gaussian, and 'time-of-flight' profiles.