

Бозе-конденсаты с точки зрения лазерной физики

А.Н.Ораевский

Прослежена динамическая аналогия между бозе-конденсатом фотонов (лазер), бозе-конденсатом атомов и конденсатом куперовских пар в сверхпроводнике. Обращено внимание на то, что когерентное состояние различного типа бозе-конденсатов может возникать только за счет индуцированных переходов. Обсуждаются уравнения, объединяющие в единую динамическую систему параметр порядка бозе-конденсата и концентрацию внеконденсатных атомов – в случае ансамбля атомов, захваченных в ловушку, и параметр порядка куперовских пар, концентрацию свободных квазичастиц, плотность фононов и фотонов – в случае сверхпроводника.

Ключевые слова: бозе-конденсат, лазер, сверхпроводник, индуцированные переходы, когерентность.

Содержание

1. Когерентность бозе-конденсатов и условие инверсии	1038
1.1 Лазер	1039
1.2. Бозе-конденсат атомов	1040
1.3. Сверхпроводящий бозе-конденсат	1041
2. Математическая модель лазера	1041
3. Особенности динамики лазеров класса А	1043
4. Особенности динамики лазеров класса В, D и С	1045
5. О квантовой теории лазера	1046
6. Система уравнений для бозе-конденсата атомов	1047
7. «Атомный лазер» и его динамика	1048
8. Сверхпроводящий бозе-конденсат	1051
9. Динамическая система уравнений для сверхпроводника	1052
10. Стационарное состояние сверхпроводника	1054
11. О нестационарных процессах в сверхпроводниках	1055
12. Заключительные замечания	1055
Литература	1056

1. Когерентность бозе-конденсатов и условие инверсии

Бозе-конденсат давно находится в сфере повышенного интереса исследователей, что связано, прежде всего, с проблемами сверхпроводимости и сверхтекучести [1, 2]. Создание мазеров и лазеров [3–6]полнило семейство бозе-конденсатов, поскольку когерентное состояние электромагнитного поля с определенной частотой и пространственной конфигурацией, генерируемое лазером, также может рассматриваться как бозе-конденсат фотонов. Сравнительно недавно возникла новая волна интереса к исследованию бозе-конденсата, обусловленная проведением успешных экспериментов по охлаждению атомов до рекордно низких температур порядка 10^{-7} К [7–9]. При таких температурах удается получать бозе-конденсат атомов небольшой концентрации и наблюдать интерференцию двух ансамблей бозе-конденсатов атомов, захваченных в ловушку [10]. Сле-

дует отметить, что бозе-конденсат атомов вызывает прежде всего общефизический интерес. В состоянии бозе-конденсата отчетливо проявляется волновая природа материи, и ансамбль достаточно большого числа частиц ведет себя как классическое поле, имеющее амплитуду и фазу.

Как правило, бозе-конденсат частиц априорно считается когерентным состоянием материи. При этом молчаливо предполагается, что выпадение частиц в бозе-конденсат автоматически формирует это когерентное состояние. Однако исследователю с менталитетом лазерного физика трудно принять данное утверждение бездоказательно. Ведь, например, в «недовозбужденном» лазере возможно накопление фотонов в одной моде резонатора за счет спонтанных переходов, но такое состояние электромагнитного поля не будет когерентным. Когерентное состояние электромагнитного поля (фотонов) рождается в лазере за счет индуцированных переходов при выполнении условия самовозбуждения. Согласно этому условию, испускаемая активной средой лазера электромагнитная энергия должна превышать потери, связанные с возможным ее поглощением и рассеянием внутри лазера, а также с выходом излучения за его пределы для последующего использования.

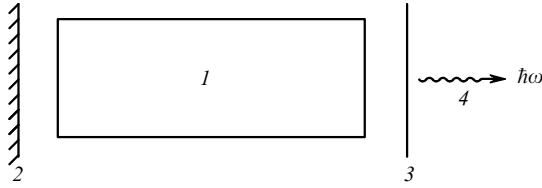


Рис.1. Простейшая схема лазера: 1 – активное вещество; 2 – «глухое» зеркало; 3 – частично прозрачное зеркало; 4 – выходящее из лазера когерентное излучение.

1.1. Лазер

Для того чтобы вложить в условие самовозбуждения лазера конкретное содержание, рассмотрим простейшую схему лазера (рис.1), состоящего из активной (рабочей) среды и резонатора. В схеме на рис.1 резонатор образован двумя соосными зеркалами, одно из которых частично прозрачно для вывода генерируемого излучения наружу. В качестве модели активной среды лазера будем рассматривать двухуровневые атомы. Это вполне хорошее приближение, т. к. два энергетических уровня вещества активной среды, частота перехода между которыми близка к частоте излучения (рис.2), вносят решающий вклад во взаимодействие лазерного излучения с активной средой.

Скорость испускания фотонов за счет переходов с верхнего уровня на нижний дается очевидным соотношением

$$S_{em} = W_{21}N_2g_1(n_k + 1_k). \quad (1)$$

Здесь $W_{21}n_k$ – вероятность индуцированного перехода с уровня 2 на уровень 1 под действием фотонов с волновым вектором k , имеющих плотность n_k ; $W_{21} \cdot 1_k$ – вероятность спонтанного перехода с уровня 2 на уровень 1 с испусканием фотона с волновым вектором k ; N_2 – концентрация частиц на верхнем энергетическом уровне; g_1 – статистический вес нижнего энергетического уровня.

Скорость перехода с нижнего уровня на верхний с поглощением фотона с волновым вектором k

$$S_{abs} = W_{12}N_1g_2n_k, \quad (2)$$

где N_1 – концентрация частиц на нижнем уровне; g_2 – статистический вес верхнего энергетического уровня.

Для возникновения в результате взаимодействия излучения с веществом когерентного состояния электромагнитного поля необходимо, чтобы индуцированное испускание превалировало над спонтанным и чтобы скорость испускания превышала скорость поглощения. Эти условия приводят к соотношению

$$W_{21}N_2g_1n_k > W_{12}N_1g_2n_k. \quad (3)$$

Поскольку $W_{21} = W_{12}$ [11], то из (3) следует неравенство, известное как «условие инверсной населенности»:

$$\begin{array}{c} 2 \text{ ————— } N_2, g_2 \\ \\ 1 \text{ ————— } N_1, g_1 \end{array}$$

Рис.2. Схема двухуровневого атома ($N_{1,2}$, $g_{1,2}$ – населенности и статистические веса соответствующих уровней энергии).

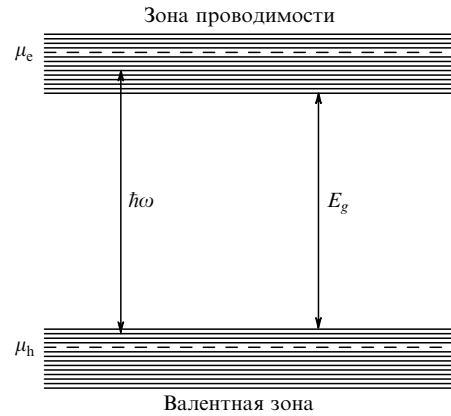


Рис.3. Энергетическая схема полупроводника: E_g – интервал запрещенных значений энергии (запрещенная зона); $\mu_{e,h}$ – химический потенциал носителей заряда в зоне проводимости и валентной зоне; $\hbar\omega$ – энергия генерируемого лазером фотона.

$$\frac{N_2}{g_2} > \frac{N_1}{g_1}. \quad (4)$$

Для межзонных переходов в полупроводниковом лазере (рис.3) условие, эквивалентное неравенству (4), имеет вид

$$f_e(\epsilon_e)[1 - f_h(\epsilon_h)] > f_h(\epsilon_h)[1 - f_e(\epsilon_e)], \quad (5)$$

где $f_{e,h}(\epsilon_{e,h})$ – функции распределения электронов в зоне проводимости или дырок в валентной зоне; $\epsilon_{e,h}$ – энергии электронов и дырок. Иерархия времен релаксации в полупроводнике такова, что более быстро внутри подсистем электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне устанавливается термодинамическое квазиравновесие, а более медленно – межзонное [12]. В связи с этим можно пользоваться квазиравновесными функциями распределения электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне:

$$f_{e,h} = \left[\exp\left(\frac{\epsilon_{e,h} - \mu_{e,h}}{kT}\right) + 1 \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $\mu_{e,h}$ – химический потенциал электронов и дырок соответственно. Подстановка формулы (6) в (5) приводит к следующему условию инверсии [13]:

$$\mu_e - \mu_h > \hbar\omega, \quad \hbar\omega = \epsilon_e - \epsilon_h, \quad (7)$$

или $\mu_e > \hbar\omega$. Дело в том, что в материалах, используемых для полупроводниковых лазеров (например, GaAs), эффективная масса носителей в зоне проводимости заметно меньше массы дырок [14] и, как следствие, $\mu_e \gg \mu_h$.

Условие (4) (или эквивалентное ему (7)) является необходимым, но не достаточным для формирования когерентного состояния поля в лазере (когерентного конденсата фотонов). Достаточным является условие

$$\frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1} > \Delta N_{th}, \quad (8)$$

где ΔN_{th} – пороговое значение разности населенностей энергетических уровней, зависящее от суммарных потерь электромагнитного излучения внутри лазера и прозрач-

ности выходного зеркала. Ясно, что выполнение аналогичных условий необходимо и для получения когерентного состояния любых бозе-частиц.

1.2. Бозе-конденсат атомов

Вспомним механизм бозе-конденсации. Химический потенциал μ в распределении бозе-частиц в газе по энергиям (распределение Бозе – Эйнштейна)

$$n(\varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \tag{9}$$

не может быть больше нуля. Поэтому максимальная плотность частиц n_c , которую может «аккумулировать» распределение Бозе – Эйнштейна, определяется соотношением [1]

$$\begin{aligned} n_c &= 4\pi(2m^3)^{1/2} g \int_0^\infty \left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^3} \\ &= 0.166g \left(\frac{mkT}{\hbar^2}\right)^{3/2}, \end{aligned} \tag{10}$$

где k – постоянная Больцмана; m – масса частицы; g – статистический вес. Соотношение (10) определяет ту минимальную температуру, при которой заданная концентрация частиц n подчиняется распределению (9) с нулевым (максимальным) химическим потенциалом. Это – критическая температура, ниже которой начинается выпадение бозе-конденсата: частицы аккумулируются на самом нижнем энергетическом уровне системы (рис.4). Для ориентации приведем несколько цифр. В работах [7–9] с помощью комбинации лазерного и магнитного охлаждения атомов в ловушке удалось достичь температуры частиц порядка 10^{-7} К. Критическая концентрация атомов натрия, когда при такой температуре начинает выпадать бозе-конденсат, равна $4.5 \cdot 10^7$ см $^{-3}$. Для экситонов с массой, близкой к массе свободного электрона, при температуре 1 К критическая концентрация составляет $\sim 10^{16}$ см $^{-3}$.

В реальной ловушке движение атомов квантовано, и интегральное соотношение (10) следует заменить суммой по квантовым состояниям частицы в ловушке

$$N_c = \sum_j \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_j}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}. \tag{11}$$

Здесь N_c – полное число частиц в ловушке. В изотропной ловушке с параболическим потенциалом $\varepsilon_j = \hbar\omega_t(j_x + j_y + j_z)$, где j_a – квантовые числа, соответствующие квантованию трансляционного движения вдоль осей x, y и

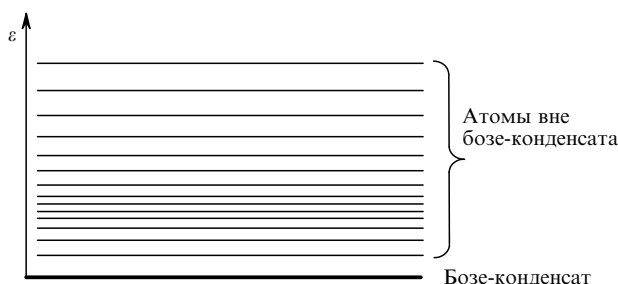


Рис.4. Энергетическая схема для бозе-частиц.

z ; ω_t – частота колебательного трансляционного движения атомов в ловушке. При $\omega_t < kT$ суммирование можно приближенно заменить интегрированием, в результате чего получим [22]

$$N_c = 1.202g \left(\frac{kT}{\hbar\omega_t}\right)^3. \tag{12}$$

Различие формул (10) и (12) связано с тем, что в ловушке с параболическим потенциалом средний объем, занимаемый частицами, не фиксирован, т. к. размах колебательного движения частицы зависит от ее энергии. Следовательно, средний радиус пакета частиц зависит как от частоты колебательного движения атомов в ловушке, так и от температуры. Частоту колебаний в формуле (12) можно выразить через средний радиус атомного пакета и температуру. Проледав это, мы приходим к формуле (10). Если бы объем, занимаемый частицами в ловушке, был фиксированным, как, например, в трехмерном «потенциальном ящике», то при вычислении суммы по состояниям мы сразу бы пришли к формуле (10).

Рассмотрим выпадение бозе-конденсата с точки зрения формирования когерентного состояния. Заметим, что если в лазере индуцирующим агентом является электромагнитное поле, то в системе атомов индуцирующим агентом являются сами атомы, находящиеся в состоянии бозе-конденсата. Соотношение, эквивалентное условию инверсии в лазере, должно вытекать из требования, чтобы скорость индуцированного формирования бозе-конденсата превышала скорость его распада. В результате нетрудно прийти к соотношению

$$W^{\rightarrow} n_0 n(\varepsilon) > W^{\leftarrow} n_0 [n(\varepsilon) + 1], \tag{13}$$

где $W^{\rightarrow}, W^{\leftarrow}$ – вероятности прямого и обратного процессов соответственно; n_0 – концентрация частиц в состоянии бозе-конденсата. Левая часть соотношения (13) представляет собой скорость «рождения» дополнительной частицы в бозе-конденсате, индуцированного самим конденсатом, за счет перехода в конденсат частицы с энергией ε . Правая часть (13) – скорость обратного процесса, т. е. распада конденсата и рождения частицы с энергией ε в ансамбле частиц вне конденсата. Обратный процесс требует затраты энергии ε , в силу чего $W^{\rightarrow}/W^{\leftarrow} = \exp(-\varepsilon/kT)$ [15]. С учетом этого соотношения неравенство (13) принимает вид

$$n(\varepsilon) > \left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}. \tag{14}$$

Правая часть неравенства (14) есть не что иное, как равновесная функция распределения частиц вне бозе-конденсата. Значит, даже небольшое нарушение равновесного распределения в сторону увеличения числа частиц с какой-либо конкретной энергией ε ведет к возникновению состояния, которое, используя лазерную терминологию, можно назвать инверсным. Следовательно, как только в результате флуктуаций какие-либо частицы покидают бозе-конденсат, он тут же восстанавливается за счет индуцированных, т. е. когерентных, переходов. Таким образом, бозе-газ при температуре меньше критической состоит из когерентного бозе-конденсата, частицы которого имеют минимальную энергию, и ансамбля некогерентных частиц.

При температуре абсолютного нуля концентрация некогерентных частиц обращается в нуль. Это утверждение строго справедливо для идеального газа бозонов. В газе со слабым отталкивательным взаимодействием даже при абсолютном нуле существуют частицы с ненулевым импульсом, относительная концентрация которых для газа свободных частиц определяется формулой [1]

$$\frac{n - n_0}{n} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (nl^3)^{1/2}, \quad (15)$$

где l – длина рассеяния взаимодействующих частиц; n – их общая концентрация. Для газа в ловушке аналогичная формула имеет вид [16]

$$\frac{N_g - N_0}{N_g} = 0.065 \left(\frac{l}{R} N_g \right)^2, \quad (16)$$

где N_g – общее число атомов в ловушке; N_0 – их число в бозе-конденсате; R – радиус ловушки.

1.3. Сверхпроводящий бозе-конденсат

Взаимодействие электронов, приводящее к их спариванию, наиболее эффективно для электронов, энергия которых близка к энергии Ферми [1, 17–19] (в пространстве импульсов ей соответствует поверхность Ферми). Вглубь от поверхности Ферми эффективность взаимодействия спадает, так что эффективное число взаимодействующих электронов становится заметно меньше их полного числа. Поэтому энергетическую схему сверхпроводника можно представить следующим образом (рис.5). Сверхпроводящий конденсат куперовских пар лежит на подушке из неспаренных электронов. Вследствие взаимодействия с каким-либо агентом куперовские пары могут распасться. В результате образуются неспаренные квазичастицы с концентрацией n , которые в энергетическом пространстве отделены от конденсата куперовских пар энергетической сверхпроводящей щелью шириной Δ .

Ориентируясь на эту схему, запишем соотношение, аналогичное по смыслу неравенству (13), для сверхпроводящего конденсата куперовских пар [20–22]:

$$W_+ N_0 n_{p-p} > W_- N_0 (1 - n_p)(1 - n_{-p}), \quad (17)$$

где n_p – концентрация свободных квазичастиц с импульсом p . Если предположить, что подсистема свободных квазичастиц в сверхпроводнике квазиравновесна, то

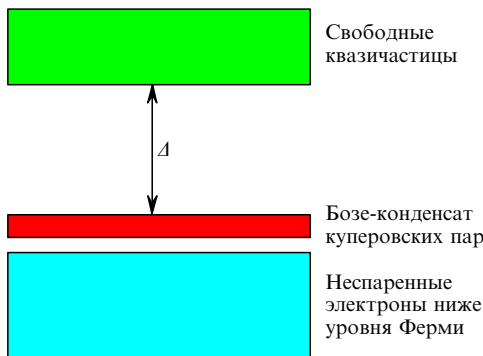


Рис.5. Энергетическая схема сверхпроводника (Δ – ширина сверхпроводящей щели).

$$n_p = \left[\exp \left(\frac{\varepsilon_p - \mu_n}{kT} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (18)$$

где μ_n – химический потенциал свободных квазичастиц. С учетом того, что распад конденсата куперовской пары требует затраты энергии $2\varepsilon_p$, из (17) следует, что

$$\mu_n > 0. \quad (19)$$

Поскольку условию равновесия между конденсатом куперовских пар и ансамблем квазичастиц соответствует нулевой химический потенциал последних, то сколь угодно слабое нарушение равновесия в пользу квазичастиц приводит к «инверсии». Сравним (19) с аналогичным условием (7) для лазера. Условие (7) является намного более жестким: малое нарушение термодинамически-равновесного распределения не приводит к инверсии в лазерах. Дело в том, что генерируемые лазером фотоны уносят с собой значительную энергию, запасенную в активной среде, в то время как конденсат куперовских пар, равно как и бозе-конденсат атомов, рождается с нулевой энергией.

Перейдем теперь к описанию динамики бозе-конденсатов. Начнем с динамики лазеров, т. к. она в силу ряда причин на сегодняшний день наиболее глубоко изучена как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. В связи с этим динамика лазеров может служить опорной базой для более глубокого понимания и предвидения динамических процессов в бозе-конденсатах другого типа.

2. Математическая модель лазера

Предположим, что взаимодействие активной среды лазера с полем носит электрический характер. Тогда распространение электромагнитного поля в веществе можно описать с помощью волнового уравнения для электрической компоненты электромагнитного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 2\alpha c_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ = -4\pi \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где c_0 – скорость света в вакууме; α – коэффициент нерезонансных потерь; $\mathbf{P}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t)$ – общая поляризация среды усилителя. Последнюю естественно подразделить на две части: $\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Величина $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ описывает поляризацию атомов активной среды, непосредственно «ответственных» за усиление (рабочих атомов). Они находятся в возбужденном состоянии и резонансно взаимодействуют с полем излучения. Для описания поляризации необходима динамическая модель, о которой речь пойдет ниже. Величина $\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t)$ описывает вклад в поляризацию всех остальных атомов среды, концентрация которых, как правило, много больше концентрации рабочих атомов. Эту часть поляризации можно считать квазиравновесной и описывать соотношением

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t) = \hat{\chi}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (21)$$

В дальнейшем оператор $\hat{\chi}_0$ можно считать константой. С учетом поправки Лоренца на действующее поле суммарная поляризация среды [23]

$$\mathbf{P}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) = \chi_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\varepsilon_0 + 2}{3} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad \varepsilon_0 = 1 + 4\pi\chi_0. \quad (22)$$

В итоге уравнение (20) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\varepsilon_0} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 2\alpha c_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ = -4\pi \frac{\varepsilon_0 + 2}{3\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При исследовании лазеров-усилителей естественным является использование решения уравнения (23) в виде бегущей волны с соответствующими начальными и граничными условиями. Для создания лазеров-генераторов активное вещество помещается в резонатор. Поскольку резонатор обладает собственными типами колебаний (модами) с характерными резонансными частотами и конфигурациями полей, то удобно представить поле и поляризацию в виде разложения по собственным модам резонатора $U_j(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j E_j(t) U_j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_j P_j(t) U_j(\mathbf{r}). \quad (24)$$

При необходимости удается обеспечить такие условия, когда доминирует один тип колебаний. В таком случае уравнение (23) может быть сведено к осцилляторному уравнению для амплитуды соответствующей моды поля и поляризации

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} + \frac{\omega_c}{Q} \frac{dE(t)}{dt} + \omega_c^2 E(t) = -4\pi \frac{\varepsilon_0 + 2}{3\varepsilon_0} \frac{d^2 P(t)}{dt^2}, \quad (25)$$

где ω_c – резонансная частота этой моды; Q – добротность, учитывающая все виды линейных потерь энергии в резонаторе. Чтобы не перегружать текст обозначениями, для амплитуд разложения поля $E_j(t)$ и поляризации $P_j(t)$ с индексом конкретной моды мы оставили те же буквенные обозначения, но без индекса.

Наиболее распространенная модель для описания динамики поляризации рабочих атомов – так называемое двухуровневое приближение, о котором уже шла речь ранее. В атоме, взаимодействующем с полем, принимаются в расчет только два энергетических уровня, переход между которыми резонансен частоте воздействующего поля. Можно показать [24–26], что поляризация среды двухуровневых атомов $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau_2} \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = -2\omega_0 \frac{|\mu_d|^2}{\hbar} N \mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{dN(\mathbf{r}, t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N(\mathbf{r}, t) = J(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{\hbar\omega_0} \mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{dt}, \end{aligned} \quad (26)$$

где N – разность населенностей рабочих уровней активной среды; $J(\mathbf{r}, t)$ – параметр, характеризующий скорость накачки; τ_2 – время релаксации поляризации, определяющее ширину спектральной линии; τ_1 – время релаксации населенности уровней; ω_0 – частота перехода между рабочими уровнями атомов; μ_d – матричный элемент дипольного момента, соответствующий этому переходу. В уравнения (26) входит действующее на частицу локальное поле, которое связано с максвелловским полем, входящим в уравнение (25), соотношением [27]

$$\mathbf{E}_{\text{loc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0 + 2}{3} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (27)$$

Обозначим разность населенностей рабочих уровней в отсутствие накачки через $N^{(0)}$. В состоянии термодинамического равновесия $N^{(0)}$ определяется бальмановским распределением. Как уже отмечалось, для усиления необходимо (но не достаточно!), чтобы населенность верхнего из рабочих уровней превышала населенность нижнего. Для этого нужна подкачка энергии в систему путем перевода атомов с нижнего энергетического уровня на верхний.

Система уравнений (23) и (26) описывает все принципиально важные процессы, связанные как с работой лазера, так и с прохождением импульса света через усилитель. Заметим, что, в отличие от уравнения (23), уравнения (26) нелинейны, поэтому в случае разложения поля и поляризации по модам резонатора возникает бесконечная система зацепляющихся уравнений. Однако при возбуждении одной моды в разложении по модам (24) будет доминировать лишь одно слагаемое. В этом случае для описания динамики одномодового лазера следует использовать систему уравнений (25) и (26). Дополнительная информация по динамике лазеров содержится в [28–33].

В дальнейшем мы остановимся на особенностях динамики одномодовых лазеров и будем опираться на систему уравнений (25) и (26). Ряд особенностей динамики усилителей рассмотрен в работах [34, 35].

Система уравнений (25) и (26) содержит параметры

$$\omega_c, \omega_0, 2\gamma_c = \frac{\omega_c}{Q}, \gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}, \gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}, \quad (28)$$

$$\gamma_{\text{rad}} = \left(2\pi\omega_0 \frac{\mu_d^2}{\hbar} N_0 \right)^{1/2},$$

соотношение между которыми таково, что

$$\omega_c, \omega_0 \gg \gamma_c, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{\text{rad}}, |\omega_c - \omega_0|. \quad (29)$$

Это дает возможность применить при анализе уравнений (10), (11) метод медленно меняющихся амплитуд, при котором поле и поляризация представляются в виде

$$E(t) = A(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad P(t) = \frac{3}{\varepsilon_0 + 2} B(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (30)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – медленные функции времени по сравнению с быстро осциллирующей экспонентой. Разность населенностей $N(t)$ также следует считать медленной функцией времени. Подробно процедура подстановки (30) в уравнения (25) и (26) изложена, например, в [30–33]. Результатом этой подстановки является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + (\gamma_c + i\Delta_c)A = i\beta B, \quad \Delta_c = \omega_c - \omega, \quad \beta = \frac{2\pi\omega_0}{\varepsilon_0}, \\ \frac{dB}{dt} + (\gamma_2 + i\Delta_0)B = -\frac{i\tilde{\mu}_d^2}{\hbar} N A, \quad \Delta_0 = \omega_0 - \omega, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tilde{\mu}_d^2 = |\mu_d|^2 \left(\frac{\varepsilon + 2}{3} \right)^2,$$

$$\frac{dN}{dt} + \gamma_1 N = \tilde{J}(t) + \frac{i}{2\hbar} (AB^* - A^*B), \quad \tilde{J} = J + \gamma_1 N^{(0)}.$$

Здесь мы пренебрегли членом $4\pi(\epsilon_0 + 2)\mu_d^2 NB/(9\hbar)$, поскольку для подавляющего большинства лазерных сред он мал в сравнении с членом B/τ_2 .

В зависимости от соотношения параметров $\gamma_c, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{\text{rad}}, |\omega_c - \omega_0|$ лазеры можно подразделить на четыре динамических класса.

К классу А относятся те системы, для которых вышеперечисленные параметры являются параметрами одного порядка. Их динамика описывается полной системой уравнений (31).

К классу В относится большинство существующих лазеров. Это те системы, для которых $\gamma_2 \gg \gamma_1, \gamma_c, \gamma_{\text{rad}}, |\omega_c - \omega_0|$. Такое соотношение между параметрами позволяет упростить систему уравнений (31), пренебрегая производной от поляризации и исключая из уравнений поляризацию как динамическую переменную. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + (\gamma_c + iA_c)A &= \frac{1}{2}\sigma c \left(1 - i\frac{A_0}{\gamma_2}\right) NA, \\ \frac{dN}{dt} + \gamma_1 N &= \tilde{J}(t) - 2\sigma c N \frac{|A|^2}{8\pi\hbar\omega}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\sigma = 4\pi \frac{\omega}{c} \frac{\tilde{\mu}_d^2}{\hbar} \frac{1}{\gamma_2^2 + \Delta_0^2}$$

– сечение индуцированных переходов.

К лазерам класса С относятся такие системы, для которых $\gamma_2, \gamma_1 \gg \gamma_c, \gamma_{\text{rad}}, |\omega_c - \omega_0|$. В этом случае можно пренебречь производными в двух последних уравнениях системы (31) и исключить как динамические переменные не только поляризацию, но и разность населенностей энергетических уровней N . Система уравнений сводится к одному уравнению для комплексной амплитуды A :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + (\gamma_c + iA_c)A &= \frac{1}{2}\sigma c \left(1 - i\frac{A_0}{\gamma_2}\right) \\ &\times \frac{N_0}{1 + 2\sigma c |A|^2 / 8\pi\hbar\omega} A. \end{aligned} \quad (33)$$

Для лазеров класса D $\gamma_c \gg \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{\text{rad}}, |\omega_c - \omega_0|$, что позволяет исключить поле как динамическую переменную:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} + (\gamma_2 + iA_0)B &= \beta \frac{\tilde{\mu}_d^2}{\hbar} \frac{\gamma_c - iA_c}{\gamma_c^2 + \Delta_c^2} BN, \\ \frac{dN}{dt} + \gamma_1 N &= \tilde{J} - \frac{\beta}{\hbar} \frac{\gamma_c}{\gamma_c^2 + \Delta_c^2} |B|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

3. Особенности динамики лазеров класса А

Для упрощения последующего анализа будем рассматривать случай, когда $\omega_0 = \omega_c$, что обуславливает $A_0 = A_c = 0$. Уравнения (31) имеют два ненулевых стационарных решения:

$$|A|^2 = A_{\text{sat}}^2 (r - 1), \quad iB = \pm \frac{\gamma_c}{\beta} A, \quad A_{\text{sat}}^2 = \frac{\hbar^2 \gamma_1 \gamma_2}{\tilde{\mu}^2}, \quad (35)$$

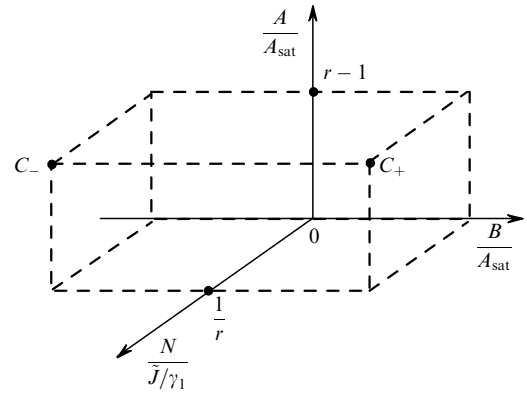


Рис.6. Фазовая плоскость лазера (C_+ и C_- – стационарные состояния лазера).

где

$$r = 2\pi \frac{\mu_d^2}{\hbar} \frac{\omega_c \tilde{J}}{\gamma_c \gamma_1 \gamma_2}.$$

Эти решения соответствуют генерации монохроматического лазерного излучения. В фазовом пространстве A, B, N им соответствуют два стационарных состояния лазера – C_+ и C_- (рис.6). Различить их при детектировании поля излучения не представляется возможным, т. к. они отличаются друг от друга лишь разностью фаз поля и поляризации. Режимы генерации (35) теряют устойчивость [36, 37], если

$$r > r^* \equiv \frac{\gamma_c \gamma_c + \gamma_1 + 3\gamma_2}{\gamma_2 \gamma_c - \gamma_1 - \gamma_2}. \quad (36)$$

Чтобы узнать, какого рода режим сменяет генерацию излучения с постоянной амплитудой поля, необходим численный анализ уравнений (31). Такое исследование было впервые проведено авторами [36, 37] и привело к результату, показанному на рис.7. При $r > r^*$ стационарный режим генерации сменяется сложным автомодуляционным процессом. В системе происходят постепенно нарастающие пульсации вокруг одной из стационарных точек, показанных на рис.6 (C_{\pm}), а затем система совершает перескок в область другого положения равновесия и т. д. На рис.8 представлена временная зависимость автомодуляционного процесса [38]. Время пребывания системы в окрестности той или другой стационарной точки является случайной величиной, поэтому весь процесс в целом носит случайный характер.

Посмотрим на поведение системы в амплитудно-фазовом представлении. На рис.9 показано изменение

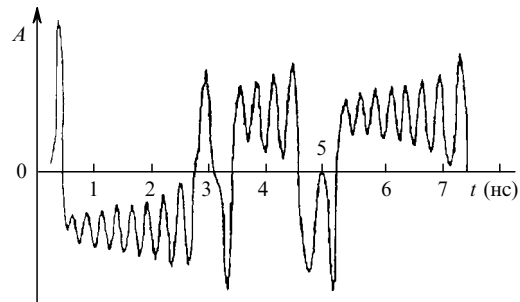


Рис.7. Изменение амплитуды поля лазера во времени в режиме хаотических пульсаций (расчет [36]).

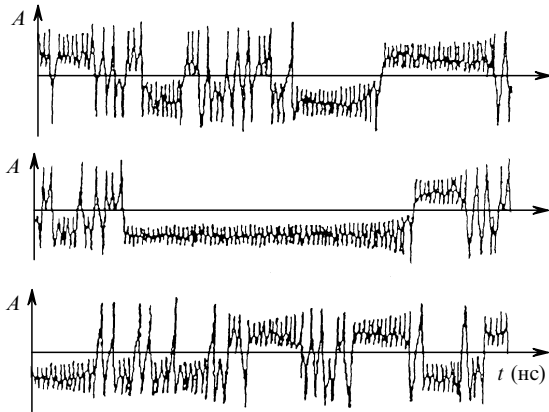


Рис.8. Изменение амплитуды поля лазера во времени в режиме хаотических пульсаций (расчет [38]).

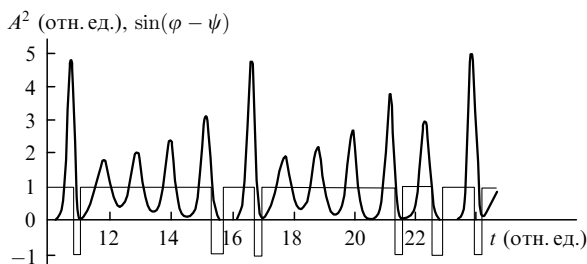


Рис.9. Изменение разности фаз между полем и поляризацией лазера в режиме хаотических пульсаций без влияния шумов (расчет [39]). Сплошной кривой обозначена амплитуда лазерного поля, тонкой линией – синус разности фаз.

во времени синуса разности фаз и интенсивности излучения [39]. Обращают на себя внимание резкие скачки разности фаз. Видно, что скачки фаз происходят при обращении интенсивности в нуль. Рис.10 дает пространственное представление о фазовых траекториях в режиме динамического хаоса.

Из формулы (36) следует, что для экспериментального наблюдения динамического хаоса необходимо выполнение условия $\gamma_c - \gamma_1 - \gamma_2 > 0$. Зависимость r^* от параметра γ_c/γ_2 показана на рис.11. Видно, что r^* имеет

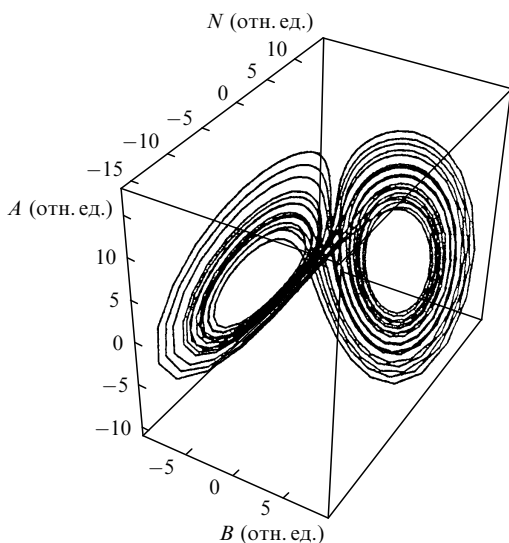


Рис.10. Фазовый портрет траектории лазера в режиме хаотических пульсаций.

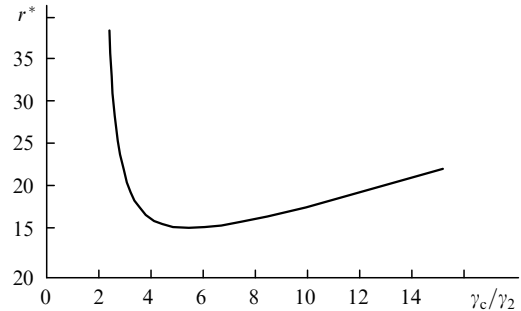


Рис.11. Критическое значение параметра возбуждения r^* как функция γ_c/γ_2 .

минимум, который зависит от отношения γ_1/γ_2 и при $\gamma_1/\gamma_2 = 1$ равен примерно 15. Таким образом, для наблюдения режима хаотических пульсаций необходим лазер, в котором порог возбуждения может быть превышен более чем на порядок. Такие условия могут быть реализованы в лазере на NH_3 [40–42].

Обсудим более подробно результаты [41]. В этой работе молекулы $^{15}\text{NH}_3$ возбуждались излучением $^{13}\text{CO}_2$ -лазера. Для генерации использовался чисто вращательный переход $aR(4,4)$ с длиной волны 153 мкм. Заранее можно было надеяться, что при сравнительно больших давлениях газа линия усиления в активной среде будет неоднородно уширена и режимы генерации в лазере будут следовать теоретической модели (31). Эти ожидания полностью подтвердились. На рис.12 показаны пульсации, наблюдавшиеся в $^{15}\text{NH}_3$ -лазере при $\gamma_c/\gamma_2 = 4.5$, $\gamma_1/\gamma_2 = 0.25$ и $r > 10.8$ в отсутствие расстройки. Видно, что картина хаотических пульсаций находится в полном соответствии с теоретическими предсказаниями (см. рис.7–9).

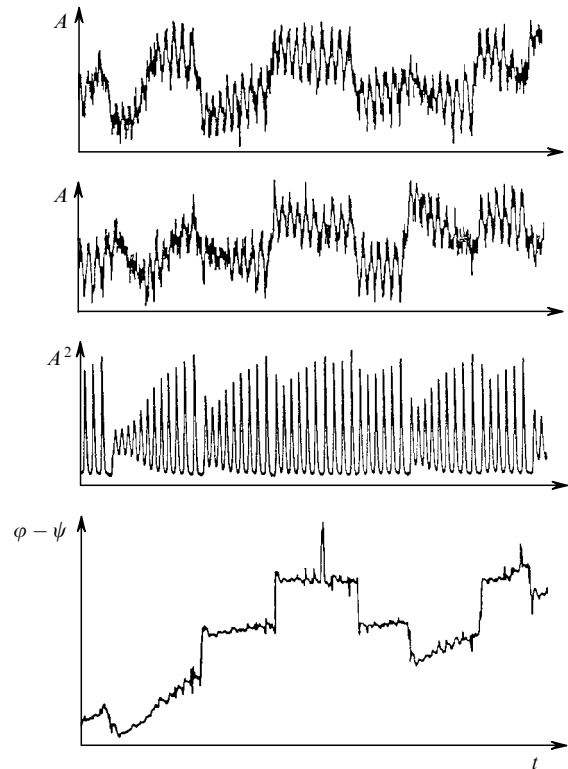


Рис.12. Изменение во времени амплитуды поля и разности фаз между полем и поляризацией лазера в режиме хаотических пульсаций (эксперимент [42]).

При сравнительно низких давлениях наблюдались заметные отклонения от предсказаний двухуровневой модели. За подробностями мы отсылаем читателя к оригинальным работам [40–42] и цитируемой в них литературе.

4. Особенности динамики лазеров класса В, D и С

Лазеры класса В, описываемые уравнениями (32), очевидно, имеют те же стационарные решения, что и лазеры класса А. Однако можно заранее ожидать, что динамика лазеров класса В беднее. Дело в том, что т. к. в системе уравнений (32) фигурирует лишь плотность энергии поля в резонаторе, уравнения для лазеров класса В имеют фактически двумерное фазовое пространство и потому фаза поля как динамическая переменная выходит из игры. В автономной же системе с двумерным фазовым пространством не может возникнуть динамический хаос. Нетрудно убедиться, что стационарные решения для лазеров класса В всегда устойчивы: соотношения между релаксационными параметрами для лазеров этого класса не допускают существования критического значения параметра возбуждения r^* (см. (36)). Казалось бы, динамические возможности лазеров класса В весьма ограничены. Однако эти лазеры обладают «скрытыми» динамическими ресурсами, что и покажет дальнейший анализ.

Для безразмерной величины $X = |A|^2/A_{\text{sat}}^2(r-1)$ в шкале безразмерного времени $\tau - \Omega_0 t$, где $\Omega_0 = [\gamma_1 \gamma_c \times (r-1)]^{1/2}$, уравнения (32) эквивалентны следующему уравнению второго порядка:

$$X'' - \frac{(X')^2}{X} + X(X-1) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^{1/2} f(X', X), \quad (37)$$

где штрих обозначает дифференцирование по τ ;

$$f(X', X) = -X'[1 + (r-1)X]. \quad (38)$$

Для большинства лазеров класса В параметр $\gamma_1/\gamma_c \ll 1$, так что решения уравнения (37) близки к решениям консервативного уравнения

$$X'' - \frac{(X')^2}{X} + X(X-1) = 0. \quad (39)$$

Заменой динамической переменной $Y = \ln X$ уравнению (39) можно придать следующий вид:

$$Y'' + U(Y) = 0, \quad U(Y) = e^Y - 1. \quad (40)$$

Очевидно, что (40) есть уравнение движения в потенциале $U(Y)$. Исследование уравнения (39) показывает [43, 44], что оно описывает своеобразный осциллятор, период колебаний которого зависит от их амплитуды. Колебания с малой амплитудой относительно стационарного состояния $X = 1$ близки к синусоидальным осцилляциям с периодом $T_0 = 2\pi/[\gamma_1 \gamma_c (r-1)]^{1/2}$ в шкале размерного времени. При увеличении амплитуды осцилляций они превращаются в последовательность импульсов, длительность которых уменьшается с ростом максимальной амплитуды пульсаций X_{max} как $\sim 3.525 X_{\text{max}}^{1/2}$, а временной интервал между импульсами растет как $(8 X_{\text{max}})^{1/2}$. С учетом правой части уравнения (37) пульсации затухают с харак-

терным временем, близким к $1/r\gamma_1$. Но оказывается, достаточно даже слабого внешнего периодического воздействия, чтобы возбудить в лазере незатухающие глубокие пульсации амплитуды поля.

Продemonстрируем это утверждение на примере малой модуляции коэффициента потерь (времени жизни фотонов) в резонаторе. Для этого введем в (32) переменный коэффициент потерь и запишем уравнения для плотности фотонов в резонаторе $W = |A|^2/(8\pi\hbar\omega)$:

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{\tau_c}(1 + \delta \cos \Omega t)W = -\sigma NW, \quad (41)$$

$$\frac{dN}{dt} + \gamma_1 N = I - 2\sigma NW.$$

Коэффициент модуляции потерь δ предполагаем малым. Частота модуляции Ω – порядка $\Omega_0 = [\gamma_1 \gamma_c (r-1)]^{1/2}$, но может отличаться от нее в несколько раз в сторону уменьшения. На рис.13 представлена временная динамика плотности фотонов W и разности населенностей N . Обращает на себя внимание то обстоятельство, что малая модуляция коэффициента потерь приводит к малой модуляции населенности, но *глубокой* модуляции плотности фотонов. При увеличении δ или таком изменении частоты модуляции, что она начинает превышать $\Omega_0 = [\gamma_1 \gamma_c (r-1)]^{1/2}$, регулярные пульсации через последовательное удвоение периода переходят в хаотические. Это не противоречит сделанному выше утверждению о невозможности хаоса в системе с двумерным фазовым пространством, т. к. система (41) неавтономна. Все сделанные теоретические выводы хорошо подтверждаются экспериментально [45].

Лазеры класса В (как и лазеры класса А) допускают возможность генерации так называемого *гигантского* импульса. Большое время жизни частиц на верхнем уровне позволяет накапливать на нем частицы, но для этого необходимо заблокировать зеркала, иначе индуцированное испускание не позволит накопить достаточно много частиц. Если после накопления частиц на верхнем уровне быстро разблокировать зеркала, то условие возбуждения лазера будет сильно перевыполнено и запасенная на верхнем уровне энергия быстро перейдет в резонатор в виде электромагнитного излучения и «выплеснется» из резонатора наружу в виде короткого и мощного импульса. На опыте удается осуществлять разблокировку зеркал с помощью эффектов Керра или Поккельса за времена порядка 10^{-8} с [29].

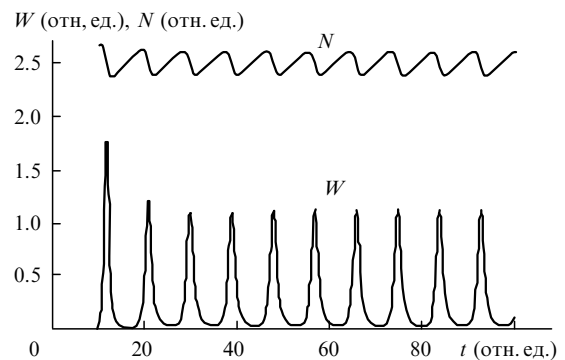


Рис.13. Зависимость плотности фотонов W и разности населенностей N от времени в лазере класса В при малом периодическом изменении коэффициента потерь в резонаторе.

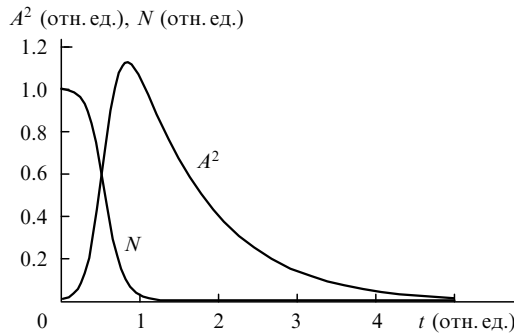


Рис. 14. Форма гигантского импульса лазера класса В и зависимость разности населенностей от времени.

Динамика лазеров класса D в основном сходна с динамикой лазеров класса В. Отличие состоит лишь в том, что в режиме генерации гигантского импульса при надлежащем подборе параметров лазер класса D ($\gamma_{\text{rad}} \gg \gamma_2$) может «выплеснуть» наружу в виде импульса электромагнитного излучения практически 100 % энергии, запасенной в активной среде. Лазер же класса В ($\gamma_{\text{rad}} \ll \gamma_2$) способен отдать лишь 50 % запасенной энергии.

Причина этого заключается в следующем. При $\gamma_{\text{rad}} \gg \gamma_2$ радиационные процессы доминируют над релаксационными, и двухуровневая квантовая система (двухуровневый атом) под действием резонансного поля может перейти из одного квантового состояния в другое со 100 %-ной вероятностью [46]. Релаксация же сбивает фазу поляризации, и инверсия населенности уровней в поле становится невозможной. На рис. 14 и 15 представлены импульсы излучения лазеров классов В и D. В случае лазера класса В импульс несимметричен относительно его максимума. Разность населенностей уровней энергии стремится к нулю: половина запасенной энергии остается невысвеченной. В случае лазера класса D импульс симметричен относительно максимума, а разность населенностей меняет знак к концу импульса. Форма импульса близка к гиперболическому секансу, что характерно для солитона [46].

Лазеры класса С обладают примитивной динамикой. Динамическое фазовое пространство уравнения (33) одномерно. Стационарные состояния лазеров класса С устойчивы, а на малую модуляцию параметров такая система откликается малой модуляцией амплитуды поля.

5. О квантовой теории лазера

В квантовой теории лазера, как и в квантовой электродинамике, поле рассматривается как совокупность квантовых осцилляторов. В случае лазера-генератора

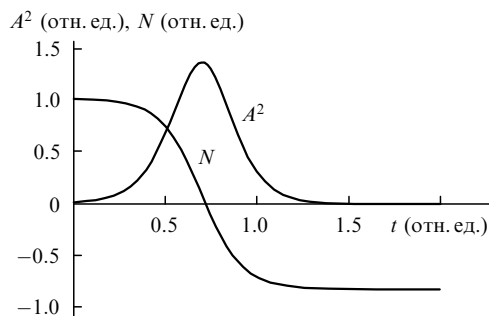


Рис. 15. Форма гигантского импульса лазера класса D и зависимость разности населенностей от времени.

поле естественно представлять в виде разложения по собственным модам резонатора

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \omega_k [\hat{a}_k^+(t) \mathbf{U}_k^*(\mathbf{r}) - \hat{a}_k(t) \mathbf{U}_k(\mathbf{r})], \quad (42)$$

где коэффициенты разложения \hat{a}_k^+ , \hat{a}_k рассматриваются как операторы рождения и уничтожения фотона в соответствующей моде резонатора. Перестановочные соотношения между операторами соответствуют перестановочным соотношениям для осциллятора

$$\hat{a}_k \hat{a}_k^+ - \hat{a}_k^+ \hat{a}_k = 1; \quad (43)$$

$\hat{n}_k = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$ есть оператор числа фотонов в данной моде резонатора. Однако при описании когерентного поля возникает проблема. Когерентное поле соответствует отличному от нуля среднему значению поля, но усреднение поля (42) по состоянию с заданным числом фотонов приводит к нулевому результату. Выход из этой ситуации состоит во введении когерентных состояний поля $|\alpha_k\rangle$, которые являются суть собственными состояниями оператора уничтожения фотона [11, 47–49]

$$\hat{a}_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle. \quad (44)$$

Усредненное по этим функциям поле

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = i \sum_k \omega_k [\alpha_k^*(t) \mathbf{U}_k^*(\mathbf{r}) - \alpha_k(t) \mathbf{U}_k(\mathbf{r})] \quad (45)$$

отлично от нуля и является квантовым соответствием классическому когерентному полю. Дело в том, что квантовому когерентному состоянию $|\alpha_k\rangle$ отвечает минимальная неопределенность в числе фотонов и фазе.

Разложение когерентного состояния по состояниям $|n_k\rangle$ с определенным числом фотонов имеет вид [11, 49]

$$|\alpha_k\rangle = \sum_{n_k} \exp\left(-\frac{|\alpha_k|^2}{2}\right) \frac{\alpha_k^{n_k}}{n_k!^{1/2}} |n_k\rangle. \quad (46)$$

Видно, что в когерентном состоянии число фотонов не является определенным. Вероятность регистрации числа фотонов в когерентном состоянии n_k есть [11, 49]

$$w(n_k) = \exp(-|\alpha_k|^2) \frac{|\alpha_k|^{2n_k}}{n_k!}. \quad (47)$$

Формула (47), как известно, носит название пуассоновского распределения. Изучение статистики фотонов He–Ne-лазера [50] продемонстрировало очень хорошее согласие формулы (47) с экспериментальными результатами. Однако не следует думать, что любой лазер всегда генерирует только когерентное состояние типа (44).

Квантовая теория лазера может быть построена на основе уравнений (31), если рассматривать в них динамические переменные как операторы. Наличие релаксационных членов в уравнениях обуславливает необходимость введения в правые части уравнений сторонних флуктуационных сил (сил Ланжевена). Описание такого подхода к квантовой теории лазера можно найти в [51]. Возможно также использование формализма, основанного на матрице плотности [52].

6. Система уравнений для бозе-конденсата атомов

Для описания динамики бозе-конденсата атомов используется уравнение [1, 53–57]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) + U |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (48)$$

где $V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)$ – энергия взаимодействия конденсата с внешним полем, например с полями ловушки, в которой удерживаются атомы; $U = (4\pi\hbar^2 a_{\text{coh}})/m$ – энергия парного взаимодействия частиц между собой; a_{coh} – длина рассеяния. В литературе уравнение (48) называют либо уравнением Питавееского–Гросса, либо нелинейным уравнением Шредингера. Оно получено из уравнения Шредингера для системы взаимодействующих частиц методом самосогласованного поля. Поэтому по своему первоначальному смыслу динамическая переменная $\psi(\mathbf{r}, t)$ является волновой функцией подсистемы атомов, «выпавших» в бозе-конденсат. В пределе достаточно большого числа атомов в конденсате она рассматривается как классическая величина и носит название параметра порядка. Подобно лазерному когерентному полю, $\psi(\mathbf{r}, t)$ может рассматриваться как классический предел *среднего значения оператора уничтожения частиц в бозе-конденсате*.

По своему динамическому смыслу уравнение (48) схоже с уравнением (33) для лазеров класса С. В рамках уравнения (48) динамика частиц, находящихся вне бозе-конденсата (некогерентных частиц), остается «за кадром». Однако в уравнение (33) входят параметры, от которых зависит возникновение и существование когерентного лазерного поля. В уравнении же (48) нет величин, определяющих условие возникновения и существования параметра порядка, поэтому ясно, что (48) описывает лишь ансамбль частиц, находящихся в стационарных (квазистационарных) условиях и при температуре ниже критической. В этом смысле существование в нем члена с производной по времени можно оправдать лишь в том случае, когда изменения во времени параметров, входящих в уравнение (48), не приводят к выпадению из конденсата некогерентных частиц. Динамика некогерентных частиц становится принципиально важной при наличии притока атомов в ловушку и ухода их из нее, а также при возмущениях полей в ловушке, нарушающих равновесное распределение частиц. Другими словами, необходима динамическая связь уравнения (48) с уравнением для атомов, находящихся вне бозе-конденсата.

Для установления такой связи воспользуемся законом сохранения числа частиц. Следуя работам [58, 59], перепишем уравнение (48) в виде двух вещественных уравнений для модуля $|\psi|$ параметра порядка и его фазы φ ($\psi = |\psi|e^{i\varphi}$):

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = i \frac{\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \equiv \frac{\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla \varphi, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} |\psi| = \frac{\hbar}{2m} [\nabla^2 |\psi| - (\nabla \varphi)^2 |\psi|] - \frac{V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)}{\hbar} |\psi| - \frac{U}{\hbar} |\psi|^3,$$

где \mathbf{j} – ток когерентных частиц. Первое уравнение (49) представляет собой закон сохранения числа частиц в бо-

зе-конденсате, не взаимодействующем с другими подсистемами. При взаимодействии их с подсистемой некогерентных частиц будут совершаться переходы частиц из одной подсистемы в другую. Для учета этого взаимодействия необходимо дополнить данное уравнение соответствующим членом, описывающим такие переходы.

Дальнейшие рассуждения удобнее вести на языке *квазичастиц*, введенных Боголюбовым [1, 60]. Операторы рождения (\hat{B}_p^+) и уничтожения (\hat{B}_p) квазичастиц с импульсом \mathbf{p} связаны с соответствующими операторами невзаимодействующих атомов \hat{A}_p^+ и \hat{A}_p соотношениями

$$\hat{A}_p = \frac{\hat{B}_p + L_p \hat{B}_{-p}^+}{(1 - L_p^2)^{1/2}}, \quad \hat{A}_p^+ = \frac{\hat{B}_p^+ + L_p \hat{B}_{-p}}{(1 - L_p^2)^{1/2}}, \quad (50)$$

$$L_p = \frac{1}{mu^2} \left[\varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 \right],$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \left[u^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad u = \left(\frac{UN_g}{m} \right)^{1/2}, \quad (51)$$

где $\varepsilon(\mathbf{p})$ – кинетическая энергия квазичастиц с импульсом \mathbf{p} ; N_g – число частиц в системе. Удобство введения квазичастиц состоит, в частности, в том, что их равновесное распределение по энергиям подчиняется закону Бозе–Эйнштейна с нулевым химическим потенциалом:

$$n_p = \left[\exp \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (52)$$

Используя закон сохранения частиц, мы можем написать

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = \Sigma - \text{div} \mathbf{j}, \quad \Sigma = \int S_p^{\text{rec}}(\mathbf{r}, t) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (53)$$

где

$$S_p^{\text{rec}}(\mathbf{r}, t) = W^{-}(\mathbf{p}) (|\psi|^2 + 1) n_p(\mathbf{r}, t) - W^{-}(\mathbf{p}) |\psi|^2 [n_p(\mathbf{r}, t) + 1] \quad (54)$$

описывает обмен частицами между подсистемами. Смысл соотношения (54) вполне прозрачен. Член $W^{-}(\mathbf{p}) (|\psi|^2 + 1) n_p(\mathbf{r}, t)$ описывает переход, в результате которого увеличивается концентрация частиц в бозе-конденсате и уменьшается на единицу концентрация квазичастиц $n_p(\mathbf{r}, t)$ в некогерентной подсистеме. Поэтому он пропорционален концентрации частиц в бозе-конденсате плюс единица. Член $W^{-}(\mathbf{p}) |\psi|^2 [n_p(\mathbf{r}, t) + 1]$ описывает обратный переход. Функции $W^{-}(\mathbf{p})$, $W^{-}(\mathbf{p})$ зависят от конкретного взаимодействия атомов.

Так как атомы, вовлеченные в конденсат, взаимодействуют не только между собой, но и с некогерентными частицами, то в правой части второго уравнения системы (49) следует произвести замену:

$$\frac{U}{\hbar} |\psi|^3 \rightarrow \frac{U}{\hbar} (|\psi|^2 + n) |\psi|, \quad (55)$$

где

$$n = \int n_p(\mathbf{r}, t) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (56)$$

– полная концентрация некогерентных частиц как функция координат и времени.

Второе уравнение из (49) и (53), в котором произведена замена (55), можно объединить в единое комплексное уравнение, используя следующую идею. Обменный член (54) естественным образом подразделяется на два слагаемых. Одно из них пропорционально $|\psi|^2$ и описывает индуцированную (когерентную) часть процесса обмена частицами между подсистемами. Оно включается в уравнение в виде регулярного члена. Другое слагаемое представляет собой спонтанный некогерентный процесс и включается в уравнение в виде случайной ланжевенновской силы $\eta(\mathbf{r}, t)$. В итоге получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) + U(|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + n(\mathbf{r}, t)) \right] \psi(\mathbf{r}, t) + \eta(\mathbf{r}, t), \quad (57)$$

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2} \int \left\{ W^-(\mathbf{p}) n_p(\mathbf{r}, t) - W^+(\mathbf{p}) [n_p(\mathbf{r}, t) + 1] \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (58)$$

$$\langle \eta(\mathbf{r}, t) \eta(\mathbf{r}', t') \rangle = f(t - t') \int W^-(\mathbf{p}) n_p(\mathbf{r}, t) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $f(t - t')$ описывает корреляционные свойства ланжевенновской силы. Временная зависимость корреляционной функции определяется физическими условиями. В литературе часто встречается предположение о δ -коррелированности случайной ланжевенновской силы (см., напр., [61, 65, 66]).

Динамику ансамбля некогерентных квазичастиц будем описывать с помощью кинетического уравнения [63, 64]

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_p(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} n_p(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = -S_p^{\text{rec}}(\mathbf{r}, t) + S_p^{\text{col}}(\mathbf{r}, t) + Q_p^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) - Q_p^{\text{out}}(\mathbf{r}, t), \quad (59)$$

где $S_p^{\text{col}}(\mathbf{r}, t)$ – интеграл соударений между квазичастицами; $Q_p^{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$, $Q_p^{\text{out}}(\mathbf{r}, t)$ – вход некогерентных частиц в систему и их выход из нее. Если вход частиц задается внешними обстоятельствами, то выход частиц из системы зависит от функции распределения квазичастиц. Вход и выход частиц могут определяться также и граничными условиями.

Уравнения (57) и (59) представляют собой искомую систему. В ее рамках могут быть описаны процессы охлаждения (нагрева) в системе частиц и выпадения их в бозе-конденсат. Очевидно, что выпадение частиц в бозе-конденсат происходит при положительности обменного интеграла (58). Из его положительности и следует условие «инверсии» (5). Из уравнений (57) и (59) вытекает закон сохранения числа частиц в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \int n_p(\mathbf{r}, t) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \right] = -\text{div} \mathbf{j} + \int [Q_p^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) - Q_p^{\text{out}}(\mathbf{r}, t)] \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (60)$$

В системе могут находиться частицы, выполняющие роль буфера и не выпадающие в бозе-конденсат в рассматриваемых условиях. Их роль может быть учтена в члене обмена частицами и в интеграле соударений.

Кинетическое уравнение (59) справедливо в случае некантованного движения частиц. Поскольку в ловушке движение квантовано, то уравнение (59) справедливо лишь тогда, когда квант энергии частицы в ловушке меньше kT , а значит, и kT_c (T_c – критическая температура выпадения бозе-конденсата). В противном случае уравнение (59) следует заменить его квантовым аналогом, что представляет собой чисто техническую задачу.

Допустим, что ансамбль атомов находится при абсолютном нуле и нет притока и оттока атомов. В этом случае число атомов в конденсате строго определено, и конденсат не может находиться в когерентном состоянии. Однако такое утверждение справедливо для идеального газа. В газе взаимодействующих частиц всегда имеется некоторое число реальных частиц (не квазичастиц!), энергия которых не равна нулю даже при абсолютном нуле [1, 60]. Их распределение дается соотношением ([1], гл. III, (23.18))

$$N_p = \frac{1}{2} \frac{m^2 u^4}{[\varepsilon(p) + p^2/2m + mu^2] \varepsilon(p)}. \quad (61)$$

Таким образом, число реальных частиц в бозе-конденсате не является строго определенным. Это задает степень неопределенности его фазы (степень когерентности)

$$\Delta N_0 \Delta \varphi = \frac{1}{2}, \quad \Delta N_0 = (\langle N_p^2 \rangle - \langle N_p \rangle^2)^{1/2}, \quad (62)$$

$$\langle N_p \rangle = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{N_g a^3}{V} \right)^{1/2}.$$

7. «Атомный лазер» и его динамика

Если обеспечить такие условия, при которых поступающие в ловушку некогерентные атомы покидают ее в виде когерентного конденсата, то ловушка будет напоминать лазер, генерирующий когерентную электромагнитную волну. Ловушки, используемые для получения атомного бозе-конденсата, обычно устроены так, что атомы с отрицательной проекцией суммарного момента на направление магнитного поля ловушки (например, $m_F = -1$) находятся в удерживающем потенциале (рис.16), а потенциальная энергия атомов с $m_F \geq 0$ внутри ловушки имеет максимум и спадает к ее периферии, так что атомы с $m_F \geq 0$ выталкиваются из ловушки. Поэтому бозе-конденсат образуется из атомов с отрицательным значением m_F . В реальных экспериментах используются атомы натрия, рубидия и лития, у которых полный момент $F = 1$. Приложением радиочастотного поля, переводящего атомы из состояния $m_F = -1$ в состояние $m_F = 0$ [10], можно обеспечить вывод когерентных атомов из ловушки. Разумеется, поле должно быть достаточно монохроматичным, чтобы не нарушить взаимную когерентность выходящих из ловушки атомов.

Обычно температура атомов в ловушке доводится до значения ниже критического путем приложения радиочастотного поля, так же, как это делается для вывода когерентных атомов из ловушки (см. рис.16). Частота

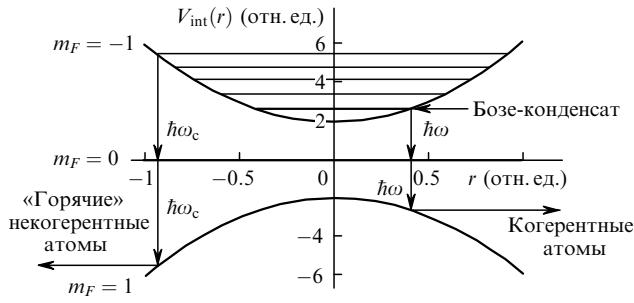


Рис.16. Схема источника когерентного пучка атомов – «атомного лазера» (ω – частота радиочастотного поля для вывода из ловушки пучка когерентных атомов, ω_c – частота радиочастотного поля для вывода пучка некогерентных атомов с целью охлаждения ансамбля атомов в ловушке, устойчивый потенциал с $m_F = -1$, неустойчивые потенциалы с $m_F = 0$ и 1).

этого поля выбирается такой, чтобы в резонанс попадали атомы с достаточно большой энергией, частота которых существенно отличается от частоты атомов с малой энергией. Поэтому атомы с большой энергией переходят в состояние с неустойчивым потенциалом и покидают ловушку, что обеспечивает понижение температуры атомов в ловушке. Скорость охлаждения может регулироваться как интенсивностью, так и частотой приложенного поля. Выбирая разные частоты для охлаждающего и выводящего полей, можно обеспечить такие условия, когда эти два процесса не будут заметно влиять друг на друга.

Для описания динамики атомного лазера в работе [10] была предложена следующая система уравнений:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar}{2m} \Delta + V_{\pm}^{\text{int}}(\mathbf{r}, t) + U|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \times \psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) + \hbar\Omega \psi_{\mp}(\mathbf{r}, t) \exp(\pm i\omega t), \quad (63)$$

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\psi_{+}(\mathbf{r}, t)|^2 + |\psi_{-}(\mathbf{r}, t)|^2.$$

Здесь ψ_{+} – параметр порядка бозе-конденсата атомов, находящихся в удерживающем потенциале ловушки, а ψ_{-} – в выталкивающем; $\hbar\Omega(\mathbf{r}) = \mu H(\mathbf{r})$ – коэффициент связи между конденсатами, обусловленный радиочастотным излучением; μ – магнитный дипольный момент атома для перехода $m_F = -1 \rightarrow m_F = 0$; H – амплитуда радиочастотного поля, ω – его частота. Коэффициент связи можно регулировать изменением амплитуды радиочастотного поля. Последнее соотношение в (63) приведено в [10]. Нам представляется более правильным соотношением суперпозиция двух параметров порядка, что будет учтено в дальнейшем.

Система уравнений (63) не отражает того факта, что при генерации когерентного пучка атомов они должны приходиться в ловушку в некогерентном состоянии, а уходить из нее в виде когерентного бозе-конденсата. Таким образом, некогерентные атомы также вовлечены в процесс генерации, и последовательный подход к «атомному лазеру» должен быть основан на системе уравнений, объединяющей в единую систему уравнения для бозе-конденсата и подсистемы некогерентных атомов.

На основе этой единой системы можно получить уравнения для «атомного лазера» [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{i}{\hbar} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\pm}^{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \right. \\ & \left. + U[|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + N(\mathbf{r}, t)] \right\} \psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) + \Sigma(n_{\pm}) \psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) \\ & - i\Omega(\mathbf{r}) \psi_{\mp}(\mathbf{r}, t) \exp(\pm i\omega t) + \eta(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_{p\pm}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_{p\pm}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} n_{p\pm}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \\ = -S_{p\pm}^{\text{rec}}(\mathbf{r}, t) + S_{p\pm}^{\text{col}}(\mathbf{r}, t) + Q_{p\pm}^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) - Q_{p\pm}^{\text{out}}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

при этом

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{+}(\mathbf{r}, t) + \psi_{-}(\mathbf{r}, t).$$

Строго говоря, для атомов с полным моментом $F = 1$ имеются три потенциала в ловушке. Вслед за работой [10] мы ограничились модельным случаем двух потенциалов. Написание системы уравнений для трех и более потенциалов не представляет принципиальных трудностей.

Всесторонний анализ системы уравнений (64) – сложная проблема. Ориентиром для такого анализа могут служить результаты исследований динамики лазеров, которая к настоящему времени достаточно хорошо развита [24, 25, 30–33, 40–45]. Ряд принципиальных вопросов можно выяснить, упрощая систему (64).

Предположим, что потенциал ловушки не зависит от времени, и найдем собственные функции $\Phi_{\pm}(\mathbf{r})$ потенциалов ловушки, решая уравнения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\pm}^{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi_{\pm}(\mathbf{r}) = E_{\pm} \Phi_{\pm}(\mathbf{r}), \quad (65)$$

где E_{\pm} – собственные значения энергии соответствующих потенциалов. Для устойчивого потенциала будем считать, что $E_{+} = \varepsilon_{+}$ – чисто вещественная величина, а для неустойчивого, что $E_{-} = \varepsilon_{-} + i\gamma$ – комплексная величина.

Представим теперь искомые параметры порядка в виде

$$\begin{aligned} \psi_{+}(\mathbf{r}, t) = A(t) \Phi_{+}(\mathbf{r}) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\varepsilon_{+} t - \int u_{+}(t) dt \right], \\ \psi_{-}(\mathbf{r}, t) = B(t) \Phi_{-}(\mathbf{r}) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\varepsilon_{-} t - \int u_{-}(t) dt \right], \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$u_{\pm}(t) = U \int [|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + n(\mathbf{r}, t)] |\Phi_{\pm}(\mathbf{r})|^2 d^3r.$$

Уравнения для распределений частиц по импульсам заменим уравнением для средней плотности числа частиц. Член, описывающий выход некогерентных частиц из ловушки, представим в релаксационной форме: $Q_{\pm}^{\text{out}} = \nu_{\pm} n_{\pm}$. Подставляя (66) в первое уравнение системы (64) и умножая полученное уравнение на $\Phi_{\pm}^*(\mathbf{r})$, произведем интегрирование всех членов уравнения по объему ловушки. В итоге получим

$$\frac{dA}{dt} - \bar{\sigma}_+ A + i\bar{\Omega} B \exp[i\delta(t)] + \bar{\eta}_+(t),$$

$$\frac{dB}{dt} = (\bar{\sigma}_- - \gamma)B - i\bar{\Omega}^* A \exp[-i\delta(t)] + \bar{\eta}(t), \quad (67)$$

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -2\bar{\sigma}_{\pm}|A|^2 - v_{\pm}n_{\pm} + Q_{\pm},$$

где

$$\bar{\sigma}_{\pm} = \int \Sigma(n_{\pm})|\Phi_{\pm}|^2 d^3r, \quad \bar{\Omega} = \int \Omega(r)\Phi_{+}^*\Phi_{-} d^3r, \quad (68)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\hbar} \left\{ (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)t - \int [u_+(t) - u_-(t)] dt \right\} - \omega t,$$

$$\langle \eta_{\pm}^*(\mathbf{r}, t) \eta_{\pm}(\mathbf{r}, t') \rangle = f(t - t')$$

$$\times \int \int W^{-1}(\mathbf{p}) n_p(\mathbf{r}, t) |\Phi_{\pm}(\mathbf{r})|^2 \frac{d^3p d^3r}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (69)$$

Несмотря на сделанные упрощения, в уравнениях сохраняются основные процессы, ответственные за формирование бозе-конденсата в ловушке.

Для удобства дальнейшего анализа введем

$$A(t) = |A(t)| \exp[i\varphi(t)], \quad B(t) = |B(t)| \exp[i\xi(t)] \quad (70)$$

и перепишем уравнения (67) в следующем виде:

$$\frac{d|A|}{dt} = \bar{\sigma}_+ |A| + \bar{\Omega} |B| \sin(\delta + \xi - \varphi) + \text{Re}[\bar{\eta}_+(t) \exp(-i\varphi)],$$

$$\frac{d|B|}{dt} = (\bar{\sigma}_- - \gamma) |B| - \bar{\Omega} |A| \sin(\delta + \xi - \varphi) + \text{Re}[\bar{\eta}_-(t) \exp(-i\xi)], \quad (71)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} |A| = -\bar{\Omega} |B| \cos(\delta + \xi - \varphi) + \text{Im}[\bar{\eta}_+(t) \exp(-i\varphi)],$$

$$\frac{d\xi}{dt} |B| = -\bar{\Omega} |A| \cos(\delta + \xi - \varphi) + \text{Im}[\bar{\eta}_-(t) \exp(-i\xi)], \quad (72)$$

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -2\bar{\sigma}_{\pm}|A|^2 - v_{\pm}n_{\pm} + Q_{\pm}.$$

При рассмотрении динамики поведения атомов в ловушке в первом приближении можно пренебречь флуктуациями. Тогда возможны стационарные режимы, определяемые равенством нулю всех производных в уравнениях (71) и (72). Нетрудно видеть, что в стационарном режиме $\cos(\delta + \xi - \varphi) = 0$, а для модулей амплитуд возможны два случая:

$$|A_{\text{st}}| = |B_{\text{st}}| = 0, \quad (n_{\pm})_{\text{st}} = \frac{Q_{\pm}}{v_{\pm}} \quad (73)$$

$$|A_{\text{st}}| \neq 0, \quad |B_{\text{st}}| \neq 0. \quad (74)$$

Очевидно, что в случае (73) когерентного бозе-конденсата не существует.

Исследуем устойчивость режима (73) обычным методом линеаризации уравнений относительно стационарных значений. Линеаризованные уравнения

$$\frac{d|A|}{dt} = \bar{\sigma}_+ |A| + \bar{\Omega} |B|, \quad \frac{d|B|}{dt} = (\bar{\sigma}_- - \gamma_-) |B| - \bar{\Omega} |A| \quad (75)$$

достаточно просты, чтобы сразу написать условия неустойчивости нулевого состояния (73)

$$\bar{\sigma}_+ + \bar{\sigma}_- - \gamma > 0, \quad \bar{\sigma}_+(\bar{\sigma}_- - \gamma_-) + \bar{\Omega}^2 < 0. \quad (76)$$

Атомы в состоянии (-) быстро покидают ловушку, в силу чего $\bar{\sigma}_-$ мало в сравнении с γ . Таким образом, для генерации бозе-конденсата в ловушке необходимо и достаточно иметь

$$\bar{\sigma}_+ > \min\left(\gamma, \frac{\bar{\Omega}^2}{\gamma}\right). \quad (77)$$

Условие (77) выпадения атомов в когерентный бозе-конденсат является более жестким, чем условие (14), означающее лишь положительность $\bar{\sigma}_+$. Таким образом, при

$$0 < \bar{\sigma}_+ < \min\left(\gamma, \frac{\bar{\Omega}^2}{\gamma}\right) \quad (78)$$

в «атомном лазере» возникает такая ситуация, когда даже при температуре ниже критической выпадение бозе-конденсата будет происходить только за счет спонтанных переходов (согласно уравнениям (67) – за счет флуктуаций). Бозе-конденсат в этом случае не будет когерентным. Неравенство (77) физически эквивалентно условию самовозбуждения обычного лазера, которое, как уже отмечалось, является более жестким, чем условие инверсной населенности в лазерной среде, и зависит от поглощения фотонов внутри лазерной системы и выхода фотонов из нее. Если v_+ настолько мало, что им можно пренебречь, то стационарное состояние с нулевыми амплитудами параметра порядка возможно лишь в отсутствие притока частиц в ловушку: $Q_{\pm} = 0$. Приток частиц в ловушку при $v_+ = 0$ обуславливает так называемый *беспороговый* режим формирования бозе-конденсата, если поступающие в ловушку атомы достаточно холодные для того, чтобы общая температура в системе была ниже критической. Максимальная критическая температура, очевидно, определится максимальным числом частиц, которое способна удержать ловушка. Беспороговый режим генерации является объектом исследований и в области лазерной физики [67, 68].

Если интересоваться динамикой параметра порядка, а не деталями функции распределения некогерентных частиц, то для функционала $\bar{\sigma}_+$ можно использовать простую аппроксимацию, т.к. $\bar{\sigma}_+$ прежде всего зависит от полной концентрации некогерентных частиц в ловушке и несущественно меняется при плавных изменениях функции распределения частиц по энергиям. Например, возможна аппроксимация

$$\bar{\sigma}_+ = \sigma_0(n - n_0), \quad (79)$$

и

где σ_0 – константа, а n_c – равновесная плотность некогерентных квазичастиц при нулевом химическом потенциале и заданной температуре частиц в ловушке. Она определяется формулой (10). Использование соотношения (79) дает возможность вычислить ненулевые значения стационарных амплитуд $|A_{st}|$ и $|B_{st}|$ параметра порядка и найти поток когерентных атомов, выходящих из ловушки. В пренебрежении $\bar{\sigma}_-$ и γ_+ получим

$$\begin{aligned} |A_{st}| &= \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma}{\bar{\Omega}^2} (Q_+ - v_+ n_0) - \frac{v_+}{\sigma_0} \right], \\ |B_{st}| &= \frac{\bar{\Omega}}{\gamma} |A_{st}|, \quad I = 2\gamma |B_{st}| V, \end{aligned} \quad (80)$$

где V – объем ловушки. Условие стационарности фаз $\cos(\delta + \xi - \varphi) = 0$ определяет частоту радиочастотного поля, при которой возможен стационарный режим. Она должна удовлетворять соотношению

$$\delta(t) = \frac{1}{\hbar} \left\{ (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)t - \int [u_+(t) - u_-(t)] dt \right\} - \omega t = 0, \quad (81)$$

которое при постоянных амплитудах параметра порядка может быть выполнено. Если же условие (81) не выполнено, режим с постоянной амплитудой невозможен. При непрерывном поступлении в ловушку некогерентных частиц параметр порядка бозе-конденсата будет пульсирующей функцией времени.

Если γ превышает все остальные параметры, имеющие размерность обратного времени, динамическая переменная B может быть исключена из системы уравнений (67); тогда последняя примет вид

$$\frac{d|A|}{dt} = \left(\bar{\sigma}_+ - \frac{\bar{\Omega}^2}{\gamma} \right) |A|, \quad (82)$$

$$\frac{dn_+}{dt} = -2\bar{\sigma}_+ |A|^2 - v_+ n_+ + Q_+.$$

При подстановке в (82) вместо $\bar{\sigma}_+$ соотношения (79) система уравнений для «атомного лазера» становится изоморфной системе уравнений (32) для лазера класса В. Поэтому к «атомному лазеру» полностью применима теория релаксационных пульсаций [43, 44], кратко описанная в разд.4 настоящей статьи. В частности, при модуляции амплитуды радиочастотного поля можно возбудить глубокие пульсации параметра порядка атомов в ловушке, что выразится в появлении пучка когерентных атомов вне ловушки в виде периодически повторяющихся сгустков. Можно довести «атомный лазер» и до режима динамического хаоса, как это было сделано в свое время с CO₂-лазером [45]. В этом случае следование сгустков атомов теряет периодичность во времени. Экспериментальное изучение динамического хаоса в атомной ловушке представляет собой очень интересную задачу.

«Атомный лазер» можно использовать в качестве источника моноимпульса когерентных атомов. Для этого в отсутствие радиочастотного поля, переводящего атомы бозе-конденсата из устойчивого потенциала в неустойчивый, следует создать в ловушке бозе-конденсат, а затем быстро включить радиочастотное поле.

Как уже отмечалось, в рамках системы уравнений (67) можно описать не только динамику сформированного

бозе-конденсата, но и процесс его формирования при охлаждении атомов в ловушке. В наиболее простой форме это можно сделать в условиях медленного охлаждения, когда формирование квазиравновесной функции распределения происходит быстрее, чем изменение средней энергии атомов в ловушке. В таком случае среднюю энергию газа можно выразить через температуру, а последнюю рассматривать как дополнительную динамическую переменную. Именно такой подход используется в теории полупроводникового лазера, когда температура носителей «отрывается» от температуры решетки и описывается как дополнительная динамическая переменная [69, 70].

В заключение отметим, что в литературе можно найти разные подходы к динамике бозе-конденсата атомов в ловушке [71–81]. Описанный здесь подход прозрачен физически и отражает многие важнейшие особенности динамики бозе-конденсата.

8. Сверхпроводящий бозе-конденсат

По аналогии с электромагнитным полем и атомным бозе-конденсатом можно ввести оператор рождения \hat{A}^+ и уничтожения \hat{A} куперовской пары и определить когерентное состояние как собственную функцию уравнения

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \Psi|\Psi\rangle. \quad (83)$$

Тогда в пределе большого числа частиц Ψ можно отождествить с параметром порядка сверхпроводника, понятие о котором было впервые введено в работе [82]. В этой работе было предложено стационарное уравнение для параметра порядка

$$(a - b|\Psi(\mathbf{r})|^2)\Psi(\mathbf{r}) + \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (84)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – вектор-потенциал магнитного поля; a и b – параметры, описывающие свойства материала, причем параметр a зависит от температуры:

$$a(T) = \alpha \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (85)$$

Для построения теории сверхпроводящего состояния на основе уравнения (84) необходимо дополнить его выражением для сверхпроводящего тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= i \frac{e\hbar}{2m} [\Psi(\mathbf{r})\nabla\Psi^*(\mathbf{r}) - \Psi^*(\mathbf{r})\nabla\Psi(\mathbf{r})] \\ &\quad - \frac{2e^2}{mc} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (86)$$

и граничными условиями.

Уравнение (84), первоначально полученное на основе минимизации функционала свободной энергии [82], впоследствии было обосновано в рамках микроскопического подхода [83]. Считается, что оно справедливо вблизи критической температуры. В настоящее время уравнение (84) является основой макроскопической теории сверхпроводимости (согласно предложенной в [2] терминологии – Ψ -теории), изложение которой можно найти в книгах [1, 84].

Нестационарное уравнение для параметра порядка удалось получить только для так называемых бесщелевых сверхпроводников [85], содержащих парамагнитные примеси достаточно большой концентрации. Оно имеет вид [84]

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D(a - b|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2)\Psi(\mathbf{r}, t) + D\left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2\Psi(\mathbf{r}, t) - i\frac{2e}{\hbar}\chi(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t). \quad (87)$$

Здесь D – коэффициент диффузии электронов в нормальном состоянии; χ – электрохимический потенциал, отнесенный к заряду электрона. Из этого уравнения следует, что

$$\frac{\partial |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{\partial t} = D(a - b|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2)|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + 2\text{Re}[\Psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{L}\Psi(\mathbf{r}, t)], \quad (88)$$

$$\hat{L} \equiv D\left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2.$$

В уравнении (88) слагаемое в правой части $2\text{Re}[\Psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{L}\Psi(\mathbf{r}, t)]$ не является дивергенцией тока. Ситуация выглядит так, как будто уравнение (48) не удовлетворяет закону сохранения числа частиц. Однако с уравнением для атомарного бозе-конденсата (57) не возникает такой трудности. Формально это связано с тем, что в уравнении (57) при операторе ∇^2 имеется множитель в виде мнимой единицы. Аналогичный множитель в уравнении (87) отсутствует. Как это понимать? Данный вопрос прояснится при выводе уравнений, объединяющих в единую динамическую систему параметр порядка и свободные квазичастицы, чему и посвящен следующий раздел.

9. Динамическая система уравнений для сверхпроводника

Сравним уравнение (87) с динамическими уравнениями для лазера. На основе этого уравнения сверхпроводник следовало бы соотнести с лазерами класса С. Вспомним, что к лазерам класса С относятся такие системы, в которых релаксационные процессы в активной среде протекают значительно быстрее, чем релаксация фотонов в резонаторе. Для сверхпроводника аналогом активной среды являются свободные квазичастицы, поэтому можно считать, что уравнение (87) получено из полной динамической системы уравнений сверхпроводника путем адиабатического исключения концентрации квазичастиц как динамической переменной. Это возможно лишь тогда, когда квазиравновесие в подсистеме квазичастиц устанавливается намного быстрее, чем в подсистеме куперовских пар. В противном случае для описания динамики сверхпроводника нужно иметь полную динамическую систему уравнений.

Получение полной нестационарной связанной системы уравнений для параметра порядка и свободных квазичастиц, исходя из последовательной микроскопической теории, представляет собой трудную и пока не решенную задачу [62]. Именно поэтому была сделана попытка [58] решить ее модельным путем, опираясь на

энергетическую схему сверхпроводника (см. рис.5). Следуя [58], для вывода такой системы уравнений мы воспользуемся законом сохранения частиц и рассмотрим в качестве первого шага случай, когда параметр порядка не зависит от координат. Тогда изменение во времени модуля параметра порядка полностью связано с обменом частицами с m - и n -подсистемами электронов, так что

$$\frac{\partial |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{\partial t} = \Sigma_m = +\Sigma_n, \quad (89)$$

где Σ_m – скорость обмена частицами между подсистемой куперовских пар и m -подсистемой электронов; Σ_n – скорость обмена частицами между подсистемами куперовских пар и свободных квазичастиц. По сути это те же рекомбинационные интегралы, о которых шла речь в разд.6. Динамически они похожи на рекомбинационные интегралы, обсуждаемые в литературе [63, 64].

Величину Σ_m можно разделить на два слагаемых, описывающих индуцированные и спонтанные переходы соответственно: $\Sigma_m = \Sigma_m^{\text{ind}} + \Sigma_m^{\text{sp}}$. Согласно правилам квантовой механики, скорость индуцированных переходов между подсистемами

$$\Sigma_m = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \int W_m(p)[m_p m_{-p} - (1 - m_p) \times (1 - m_{-p})] \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (90)$$

Функция $W_m(p)$ представляет собой матричный элемент гамильтониана взаимодействия между частицами для перехода из когерентного состояния куперовских пар (Ψ -подсистема) в состояние m -подсистемы. Как уже отмечалось, в сверхпроводнике эффективно взаимодействуют электроны, импульсы которых близки к импульсам Ферми p_F . Поэтому $W_m(p)$ довольно быстро уменьшается при удалении p от p_F , так что эффективное число электронов, принимающих участие в формировании конденсата куперовских пар, становится заметно меньше полного числа электронов в зоне проводимости. В соответствии с этим введем обозначения полного эффективного числа электронов, вовлеченного в процесс сверхпроводимости,

$$N_s = \frac{1}{W_m(p_F)} \int W_m(p) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (91)$$

и эффективного числа электронов m -подсистемы

$$N_m = \frac{1}{W_m(p_F)} \int m_p W_m(p) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (92)$$

По закону сохранения числа частиц

$$n + N_m + 2|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = N_s, \quad (93)$$

где n – полное число свободных квазичастиц n -подсистемы. Используя (93) и исключая N_m из соотношения (90), получаем

$$\Sigma_m^{\text{ind}} = \frac{2}{\tau_m} \left(1 - 2\frac{n}{N_s} - 4\frac{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{N_s}\right) |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (94)$$

$$\frac{2}{\tau_m} = W_m(p_F)N_s.$$

Спонтанные переходы из Ψ -подсистемы в m -подсистему описываются величиной

$$\Sigma_m^{\text{sp}} = \int W_m(p) m_p m_{-p} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (95)$$

Предполагая фермиевское распределение для m_p и используя соотношение (93), выразим (95) через полную концентрацию квазичастиц и куперовских пар. Не будем проделывать эти вычисления в явном виде, т. к. в дальнейшем это нам не потребуется.

Параметр

$$\Sigma_n = \int \int W_n(p, p') [n_p n_{p'} (M_q + 1) (|\psi|^2 + 1) - (1 - n_p)(1 - n_{p'}) M_q |\psi|^2] d^3 p' d^3 p \quad (96)$$

обычно называют рекомбинационным интегралом. Он строится по тем же принципам, что и интеграл обмена в атомарной системе между бозе-конденсатом и некогерентными частицами. Отличие состоит лишь в том, что выпадение конденсата куперовских пар происходит вследствие рекомбинации двух ферми-частиц с участием фононов, спектральная концентрация которых обозначена M_q , где в силу закона сохранения импульса $q = p - p'$.

Если теперь отойти от предположения об отсутствии координатной зависимости параметра порядка и магнитного поля, то в уравнение (89) следует включить слагаемое $2\text{Re}[\Psi^*(r, t) \hat{L}\Psi(r, t)]$, так что

$$\frac{\partial |\Psi(r, t)|^2}{\partial t} = \frac{2}{\tau_m} \left(1 - 2 \frac{n}{N_s} - 4 \frac{|\Psi(r, t)|^2}{N_s} \right) |\Psi(r, t)|^2 + 2\text{Re}[\Psi(r, t) \hat{L}\Psi^*(r, t)].$$

Теперь проясняется проблема сохранения числа частиц. Мы видим, что в динамике сверхпроводника принимают участие не только свободные квазичастицы, но и «подконденсатные» неспаренные электроны. Интерпретировать это обстоятельство можно следующим образом.

Представим себе, что сверхпроводящий образец при температуре, весьма близкой к абсолютному нулю, помещен в магнитное поле, адиабатически возрастающее во времени. Увеличиваясь, магнитное поле все больше будет проникать в образец, уменьшая параметр порядка. Уменьшение модуля параметра порядка связано с разрушением куперовских пар. Возникающие при этом электроны не могут появиться в виде свободных квазичастиц, т. к. это требует энергии, равной энергии сверхпроводящей щели Δ , которую неоткуда взять при температуре, близкой к нулю. Им остается один путь – в систему подконденсатных электронов. Таким образом, если бы мы в явном виде написали уравнение для концентрации частиц подсистемы m , то выражение $2\text{Re}[\Psi^*(r, t) \hat{L}\Psi(r, t)]$ должно было бы появиться в левой части этого уравнения, но со знаком минус. Тем самым разрешается проблема сохранения числа частиц в уравнении (87).

В итоге мы можем перейти к уравнению для комплексного параметра порядка Ψ , включив в него слагаемое с химическим потенциалом

$$\frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -i \frac{2e}{\hbar} \chi(r, t) \Psi(r, t) + \frac{1}{\tau_m} \left(1 - 2 \frac{n}{N_s} \right.$$

$$\left. - 4 \frac{|\Psi(r, t)|^2}{N_s} \right) \Psi(r, t) + D \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar c} A(r, t) \right)^2 \Psi(r, t) + \frac{1}{2} S^{\text{rec}} \Psi(r, t) + \Xi(r, t), \quad (97)$$

$$S^{\text{rec}}(r, t) = \int W_n(p, p') [n_p n_{p'} (M_q + 1) - (1 - n_p)(1 - n_{p'}) M_q] d^3 p' d^3 p. \quad (98)$$

Величина Σ_n содержит слагаемые, пропорциональные $\Psi(r, t)$. Эти слагаемые соответствуют индуцированным переходам, и в уравнение (97) они входят в виде когерентного члена $(1/2)S^{\text{rec}}\Psi(r, t)$, пропорционального параметру порядка. Оставшееся слагаемое соответствует спонтанным переходам. Оно включено в уравнение (97) в виде флуктуационной силы $\Xi(t)$. В эту же флуктуационную силу включен член, обусловленный спонтанными $\Psi \rightarrow m$ -переходами. Корреляционная функция $\Xi(t)$ дается соотношением

$$\langle \Xi^*(t) \Xi(t') \rangle = f(t - t') \left[\Sigma_m^{\text{sp}} + \int \int W_n(p, p') n_p n_{p'} M_q d^3 p d^3 p' \right]$$

(см. формулу (59) и комментарий к ней).

Динамика свободных квазичастиц рассматривалась в работах [58–60]. Для ее описания использовалось кинетическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} n_p(r, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} n_p(r, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = S_p^{\text{col}}(r, t) - S_p^{\text{rec}}(r, t), \quad (99)$$

в котором энергия квазичастиц определяется соотношением

$$\varepsilon = \left\{ \Delta^2 + \frac{1}{4m^2} \left[p_F^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (100)$$

В уравнении (99) $S_p^{\text{col}}(r, t)$ является обычным интегралом столкновений, описывающим перераспределение по импульсам и энергиям внутри подсистемы квазичастиц. Рекомбинационный интеграл $S_p^{\text{rec}}(r, t)$ описывает обмен частицами между подсистемой n , с одной стороны, и конденсатом куперовских пар и системой m – с другой. Этот рекомбинационный интеграл приведен в обзоре [64] в следующем виде:

$$S_p^{\text{rec}}(r, t) = \int U_c(p, p', A) [n_p n_{p'} (M_q + 1) - (1 - n_p)(1 - n_{p'}) M_q] d^3 p'. \quad (101)$$

В него, наряду с концентрацией свободных квазичастиц, входит концентрация фононов M_q . Функция U_c , как и W_n в формуле (98), есть не что иное, как матричный элемент гамильтониана взаимодействия частиц. Различие между этими функциями состоит в том, что W_n есть матричный элемент гамильтониана взаимодействия для перехода между подсистемой n и конденсатом куперовских пар, в то время как U_c соответствует переходу между подсисте-

мой n и совокупной m – Ψ -системой, рассматривавшейся в работах [63, 64] в качестве своеобразного вакуума, из которого рождаются свободные квазичастицы.

Если концентрация фононов неравновесна, то для нее также требуется динамическое уравнение. Часто его пишут в простой форме [64, 86]

$$\frac{\partial M_q}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_q}(M_q - M_{q0}) + S_q^{\text{rec}} + S_q^{\text{col}} + Q_q, \quad (102)$$

где M_{q0} – равновесная концентрация фононов при заданной температуре. Первый член в правой части уравнения (102) описывает уход фононов из сверхпроводящего образца в подложку, второй – рождение фононов при рекомбинации свободных квазичастиц, третий возникает вследствие рассеяния квазичастиц, а четвертый описывает возбуждение фононов внешним источником. Рекомбинационный член

$$S_q^{\text{rec}}(t) = \frac{1}{V_s} \int U(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{q}, \Delta) [n_p n_{p'} (M_q + 1) - (1 - n_p)(1 - n_{p'}) M_q] d^3 p' d^3 r, \quad (103)$$

где V_s – объем образца.

Таким образом, параметр порядка (97), свободные квазичастицы (99) и фононы (102) объединяются в единую динамическую систему с помощью рекомбинационных процессов. При необходимости можно написать рекомбинационный интеграл, в котором вместо фононов (или наряду с ними) будут фигурировать фотоны. Очевидно, что к системе уравнений (97), (99), (102) необходимо присоединить уравнения Максвелла, которые будут связаны с ней током носителей и плотностью фотонов, если таковые воздействуют на образец сверхпроводника. В нестационарном состоянии ток, наряду со сверхпроводящей компонентой (86), будет включать в себя и несверхпроводящую, так что полный ток

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = i \frac{e\hbar}{2m} [\Psi(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)] - \frac{2e^2}{mc} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \sigma \left(\nabla \chi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (104)$$

10. Стационарное состояние сверхпроводника

Вернемся к стационарному состоянию, когда параметр порядка не зависит от времени. Оно, строго говоря, имеет место в пренебрежении флуктуациями и описывается уравнением

$$\frac{1}{D\tau_m} \left(1 - 2 \frac{n}{N_s} - 4 \frac{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{N_s} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (105)$$

Уравнение (105) отличается от уравнения (84) тем, что в нем коэффициент $a = (1/D\tau_m)(1 - 2n/N_s)$ приобрел динамический смысл. В стационарном состоянии

$$n = \int \left(\exp \frac{\varepsilon}{kT} + 1 \right)^{-1} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (106)$$

причем ε определяется формулой (100). Таким образом, коэффициент a зависит не только от температуры, но и от магнитного поля и, в конечном счете, от пространственных координат, хотя зависимость от магнитного поля несущественна, если $(e/c)A \ll p_F$. В отсутствие магнитного поля это только функция температуры. Для ее вычисления необходимо знать зависимость ширины энергетической щели от температуры, которая, как известно, определяется уравнением Бардина – Купера – Шриффера [1, 17]

$$\frac{g}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\tanh(\varepsilon/2kT)}{\varepsilon} d^3 p = 1. \quad (107)$$

Функция $\Delta(T)$ вычисляется аналитически [1] лишь в предельных случаях низких температур

$$\Delta = \Delta^{(0)} \left[1 - \left(\frac{2\pi kT}{\Delta^{(0)}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\Delta^{(0)}}{kT} \right)^{1/2} \right] \quad (108)$$

и температур, близких к критической,

$$\Delta = 3.06kT_c \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (109)$$

Критическая температура T_c и ширина щели при абсолютном нуле $\Delta^{(0)}$ связаны соотношением $T_c = 0.57\Delta^{(0)}$.

Функция $a(T)$, найденная численным методом во всем интервале температур, приведена на рис. 17. Как и следовало ожидать, она отличается от линейной зависимости (85), которая имеет место только при температурах, близких к критической. Если при $\Delta(T_c) = 0$ критическую температуру определить условием $a(T_c) = 1$, то можно, связав T_c и N_s , получить

$$N_s = \frac{0.693mp_F k T_c}{\pi^2 \hbar^3}, \quad (110)$$

а коэффициент $a(T)$ представить в виде

$$a(T) = \frac{1}{D\tau_m} \left\{ 1 - 1.44 \frac{T}{T_c} \times \int \left[\exp \left(\frac{\Delta^2}{(kT)^2} + \xi^2 \right)^{1/2} + 1 \right]^{-1} d\xi \right\}. \quad (111)$$

Заметим, наконец, что $a(T)$ может быть отличным от нуля и при щели, тождественно равной нулю. Таким образом, уравнение (97) описывает и бесщелевые сверхпроводники, существование которых предсказано в работе [85].

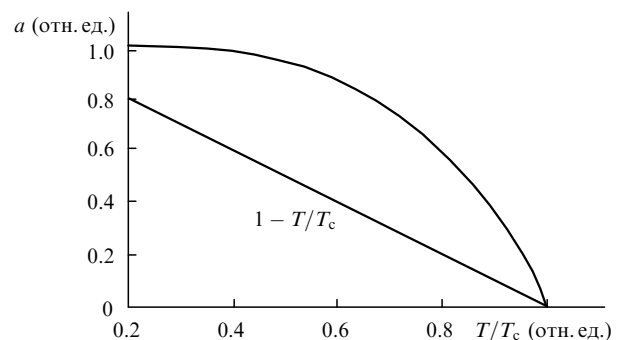


Рис. 17. Зависимость параметра a от температуры.

Уравнение (105) в отсутствие магнитного поля принимает форму

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{D\tau_m} \left(1 - 2 \frac{n}{N_s} - 4 \frac{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{N_s} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (112)$$

Кроме очевидных решений $\Psi = 0$ и $|\Psi|^2 = (N_s - 2n)/4 \equiv D\tau_m a(T)$, уравнение (112) имеет еще решения, зависящие от координат, которые могут быть либо периодическими, либо «асимптотическими» функциями, т. е. обращающимися в бесконечность на определенной поверхности (в одномерном случае – в точке). Периодические функции существуют при положительных значениях $a(T)$, а асимптотические – при отрицательных [87]. Одной из интересных проблем в физике сверхпроводящего состояния является проблема контакта сверхпроводник–металл, которая ранее рассматривалась на основе микроскопической теории [88].

В работе [87] предложен подход к расчету контакта сверхпроводник–металл на основе Ψ -теории, существенным образом опирающийся на асимптотические решения. Одним из результатов этой работы является вывод о том, что при контакте сверхпроводниковых слоев параметр порядка в слое с температурой ниже критической инициирует параметр порядка в другом слое, температура которого выше критической. В работе [87] для расчетов использовалась линейная зависимость a от температуры. Зависимость же коэффициента $a(T)$, представленная на рис. 17, более благоприятна для возникновения этого эффекта, т. к. коэффициент $a(T)$ при более высоких температурах принимает значение, близкое к предельному.

11. О нестационарных процессах в сверхпроводниках

Соберем уравнения, описывающие динамику сверхпроводника, в единую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & -i \frac{2e}{\hbar} \chi(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau_m} \left(1 - 2 \frac{n}{N_s} \right. \\ & \left. - 4 \frac{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2}{N_s} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + D \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t) \\ & + \frac{1}{2} S^{\text{rec}} \Psi(\mathbf{r}, t) + \Xi(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} n_p(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_p(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} n_p(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \\ = & S_p^{\text{col}}(\mathbf{r}, t) - S_p^{\text{rec}}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (113)$$

где S_q^{sc} описывает рассеяние фотонов. При воздействии на сверхпроводящий образец высокочастотного электромагнитного поля (например, с частотой, равной или превышающей Δ/\hbar) в семейство динамических уравнений следует включить и нестационарные уравнения Максвелла. В итоге получим развитую динамическую систему с многомерным фазовым пространством. Поэтому в сверхпроводнике возможно многообразие динамичес-

ких режимов, интересных как с теоретической, так и с практической точки зрения. В частности, любопытно было бы найти и исследовать возможность существования режимов с глубокой модуляцией параметра порядка, вызванной сравнительно неглубокой модуляцией внешнего магнитного поля или звука.

12. Заключительные замечания

До последнего времени в литературе не обсуждались явления, в которых бозе-конденсат частиц с ненулевой массой и лазерное излучение были бы компонентами единого динамического процесса. В самое последнее время появились предположения о том, что такой процесс может иметь место. Исследования вынужденного испускания излучения сильно перевозбужденным инжекционным GaAs-лазером [89] выявили ряд интересных и нетривиальных обстоятельств, которые подробно обсуждались на научной сессии отделения Общей физики и астрономии РАН [90]. Обстоятельство, наиболее существенное для рассматриваемой темы, состоит в том, что спектр вынужденного излучения сдвинут в сторону более длинных волн по сравнению со спектром нормально возбужденного лазера. Такое поведение спектра излучения можно объяснить тем, что в перевозбужденном полупроводниковом лазере носители «прижимаются» к дну соответствующих зон. Этот и ряд других фактов, подробно описанных в цитированных выше работах, привели их автора к предположению о возникновении бозе-конденсата в электрон-дырочной плазме сильно возбужденного полупроводника [90].

Вопрос о возможности бозе-конденсации фотовозбужденных электрон-дырочных пар в полупроводниках находился в центре внимания ученых в 60-х–70-х годах прошедшего столетия [91–94]. В этих исследованиях выяснилось, что при мощном лазерном возбуждении электрон-дырочная жидкость не является сверхтекучей и имеет мало общего с бозе-конденсатом экситонов. При большой плотности носителей, когда среднее расстояние между ними меньше радиуса экситона, понятие экситона как частицы теряет смысл. Однако в условиях больших плотностей неравновесных носителей речь должна идти не об экситонах, а о *коррелированном состоянии электрон-дырочной плазмы*. При этом, по аналогии со сверхпроводником, чем больше плотность носителей, тем сильнее эти корреляции, и возникать они должны при более высокой температуре. В валентной зоне GaAs имеются две энергетические ветви, соответствующие легким и тяжелым дыркам с большей и меньшей эффективными массами. Возникновение коррелированного состояния при температуре, близкой к комнатной, довольно вероятно для электрон-дырочной плазмы в GaAs, состоящей из легких дырок.

Подчеркнем еще раз, что в формировании когерентного бозе-конденсата любой природы решающую роль играют индуцированные переходы. Нам представляется, что они являются *универсальным механизмом, приводящим к спонтанному нарушению симметрии в Природе* [20, 21]. Для этого лишь нужны условия, при которых скорость индуцированного процесса создания какого-либо объекта с характерным признаком превышала бы скорость его распада. По-видимому, индуцированные процессы сыграли решающую роль при формировании нашей Вселенной, симметрия которой была нарушена в

пользу электронов и протонов. Аналогичное предположение можно высказать и в отношении возникновения жизни с левой хиральностью белковых молекул. Такие предположения обсуждались в литературе.

Уже около 20 лет обсуждаются процессы самоорганизации, происходящие в нелинейных системах [95–101]. Был придуман даже специальный термин, объединяющий разнообразные процессы самоорганизации, – синергетика. Однако этот термин объединяет процессы лишь по внешнему признаку. На наш взгляд, механизмом, объединяющим процессы самоорганизации, являются индуцированные переходы.

В настоящее время все больший интерес вызывает изучение глобальных проблем развития общества. В работе [101] одним из главных объектов дискуссии является рост народонаселения нашей планеты. На основе многолетних фактических данных автор приходит к парадоксальной на первый взгляд формуле, объясняющей сравнительно медленный рост народонаселения в давние времена и быстрое его увеличение в 20 веке, а также предсказывающей достаточно резкое его замедление в 21 веке. По-видимому, этот и другие процессы развития общества удастся глубже понять, если для формального описания его динамики опираться не на численность народонаселения Земли в целом и отдельных его частей, а ввести соответствующий параметр порядка, квадрат модуля которого можно будет отождествлять с численностью населения; фаза параметра порядка будет отражать различные общественные связи. Бесспорно, следует принять в расчет индуцированные процессы формирования параметра порядка общества в целом и отдельных его частей.

Настоящая статья написана по предложению Н.Г.Басова, и автор посвящает ее светлой памяти своего учителя. Автор выражает признательность В.П.Макарову за ценные замечания.

- Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Статистическая физика* (М., Наука, 1978, ч.2).
- Гинзбург В.Л. *УФН*, **167**, 429 (1997).
- Басов Н.Г., Прохоров А.М. *ЖЭТФ*, **101**, 431 (1954).
- Gordon J.P., Zeiger H.J., Townes C.H. *Phys.Rev.*, **95**, 282 (1954).
- Shawlow A.L., Townes C.H. *Phys.Rev.*, **112**, 1940 (1958).
- Басов Н.Г., Крохин О.Н., Попов Ю.М. *УФН*, **72**, 161 (1960).
- Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman E.A., Cornell S.E. *Science*, **269**, 198 (1995).
- Bradley C.C., Sackett C.A., Tolett J.J., Hulet R.G. *Phys.Rev.Letts*, **75**, 1687 (1995).
- Davis K.B., Meves M.-O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W. *Phys.Rev.Letts*, **75**, 3969 (1995).
- Wallis H., Röhl A., Naraschevski M., Schenzle A., Miesner H.J. *Phys.Rev.Letts*, **78**, 4143 (1997).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (М., Наука, 1989).
- Попов Ю.М. *Методы получения отрицательных температур в полупроводниках. Докт.дис.* (М., ФИАН, 1963); *Труды ФИАН*, **31**, 1 (1965).
- Басов Н.Г., Крохин О.Н., Попов Ю.М. *ЖЭТФ*, **40**, 1879 (1961).
- Арсенид галлия. Получение и свойства* (под ред. Ф.П.Кесаманлы и Д.Н.Наследова) (М., Наука, 1973).
- Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика* (М., Наука, 1979).
- Алексеев В.А., Крылова Д.Д. *Письма в ЖЭТФ*, **66**, 228 (1997).
- Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. *Phys.Rev.*, **106**, 162 (1957).
- Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В. *Новый метод в теории сверхпроводимости* (М., изд. АН СССР, 1958).
- Вайскопф В. *УФН*, **140**, 117 (1983).
- Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **11**, 1763 (1984).
- Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **89**, 608 (1985).
- Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **24**, 1127 (1997).
- Тамм И.Е. *Основы теории электричества* (М., Наука, 1978).
- Файн В.М. *ЖЭТФ*, **33**, 945 (1957).
- Ораевский А.Н. *Радиотехника и электроника*, **4**, 718 (1959).
- Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М., Мир, 1978).
- Crenshaw M.L., Bowden C. *Proc.SPIE (special issue on Photon Echo and Coherent Spectroscopy)*, **3239**, 190 (1997).
- Физическая энциклопедия* (М., изд-во СЭ, 1988, т. 1, с. 273).
- Справочник по лазерам* (пер. с англ. под ред. А.М.Прохорова) (М., Сов.радио, 1978).
- Ораевский А.Н. *Молекулярные генераторы* (М., Наука, 1964).
- Ханин Я.И. *Основы динамики лазеров* (М., Наука, Физматлит, 1999); *Principles of laser dynamics* (Amsterdam, North Holland (Elsevier), 1995).
- Narducci L.M., Abraham N.B. *Laser physics and laser instabilities* (World Scientific, New Jersey, 1988).
- Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. *Автоколебания в лазерах* (Минск, Наука и техника, 1990).
- Крюков П.Г., Летохов В.С. *УФН*, **99**, 169 (1969).
- Ораевский А.Н. *УФН*, **168**, 1311 (1998).
- Грасюк А.З., Ораевский А.Н. *Радиотехника и электроника*, **9**, 524 (1964); Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. *Proc. IV Intern.Congress Microwave Tubes* (Sheveningen, Holland, 1962, p.446).
- Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. *Estratto da Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica 'E.Fermi', XXXI Corso* (Varenna, Italy, 1963); P.A.Miles (Ed) *Quantum electronics and coherent light* (N.Y., Academic Press, 1964).
- Lorenz E.N. *J.Atmos. Sci.*, **20**, 130 (1963).
- Торонов В.Ю. *Исследование динамических моделей одномодового лазера. Канд.дис.* (Саратов, СГУ, 1992).
- Weiss C.O., Brock J. *Phys.Rev.*, **57**, 2804 (1986).
- Weiss C.O., Abraham N.B., Hubner U. *Phys.Rev.Letts*, **61**, 1587 (1988).
- Abraham N.B., Dangoisse D., Glorieux P., Mandel P. *J.Opt.Soc. Amer.*, **2**, 23 (1985).
- Беленов Э.М., Морозов В.Н., Ораевский А.Н. *Труды ФИАН*, **52**, 237 (1970).
- Ораевский А.Н. *Изв.вузов.Сер. Прикладная нелинейная динамика*, **4**, 3 (1996).
- Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G.P., Tredicce J.R. *Phys.Rev.Letts*, **49**, 1217 (1982).
- Беленов Э.М., Ораевский А.Н., Щеглов В.А. *ЖЭТФ*, **56**, 2143 (1969).
- Glauber R.J. *Phys.Rev.*, **130**, 2529 (1963).
- Sudarshan E.C.G. *Phys.Rev.Letts*, **10**, 277 (1963).
- Перина Я. *Когерентность света* (М., Мир, 1974).
- Arecchi F.T. *Photocount Distribution and Field Statistics. Lectyres at the Intern. School of Phys.* (Varenna, Italy, 1967); Ареки Ф.Т. и др. *Квантовые флуктуации излучения лазера* (М., Мир, 1974).
- Хакен Г. *Лазерная светодинамика* (М., Мир, 1988).
- Scully M.O., Lamb W.E. *Phys.Rev.*, **159**, 208 (1967); **166**, 246 (1968).
- Fetter A.L., Walecka J.D. *Quantum theory of many-particle systems* (N.Y., Mc Grow-Hill, 1971).
- Kagan Yu., Shlyapnikov G.V., Walraven Y.T.M. *Phys.Rev.Letts*, **76**, 2170 (1996).
- Kagan Yu., Surkov E.L., Shlyapnikov G.V. *Europ.Conf.Quantum Electronics (ECQE-1995)* (Hamburg, Germany, 1995).
- Naraschevski M., Wallis H., Schenzle A., Cirac J.I., Zoller P. *Phys.Rev.A*, **54**, 2185 (1996).
- Cirac J.I., Gardiner C.W., Naraschevski M., Zoller P. *Phys.Rev.A*, **54**, 3741 (1996).
- Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **103**, 981 (1993).
- Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **24**, 1127 (1997).
- Боголюбов Н.Н. *Вестник Моск. ун-та*, **7**, 43 (1947); *J. of Phys.*, **9**, 23 (1947).
- Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем* (М., Янус, 1995).
- Gulian A., Zharkov G. *Nonequilibrium electrons and phonons in superconductors* (N.Y., Kluwer/Plenum, 1999).
- Элиашберг Г.М. *ЖЭТФ*, **61**, 1274 (1971).
- Елесин В.Ф., Копяев Ю.В. *УФН*, **133**, 259 (1981).

65. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (под ред. Ю.Л.Климонтовича) (М., Наука, 1974).
66. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М., Наука, 1981).
67. Imamoglu A., Ram R.J., Pau S., Yamamoto Y. *Phys.Rev.A*, **53**, 4250 (1996).
68. Protsenko I., Domokos P., Lefevre-Seguin V., Hare J., Raimond J.M., Davidovich L. *Phys.Rev.A*, **59**, 1667 (1999).
69. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **17**, 1463 (1990).
70. Oraevsky A.N., Sarkisyan T.V., Bandy D.K. *Laser Phys.*, **7**, 920 (1997).
71. Holland M., Brunett K., Gardiner C., Cirac J.I., Zoller P. *Phys.Rev.A*, **54**, R1757 (1996).
72. Hiroshima T., Yamamoto Y. *Phys.Rev.A*, **53**, 1048 (1996).
73. Wright E.M., Walls D.F. *Phys.Rev.Letts*, **77**, 2158 (1996).
74. Haugerud H., Haugset T., Ravndal F. *Phys.Letts A*, **225**, 18 (1997).
75. Kocharovsky V.V., Scully M.O., Zhu S-Y., Zubairy S. *Phys.Rev.A*, **61**, 23609 (2000).
76. Alekseev V.A., Krylova D.D. *Laser Phys.*, **6**, 268 (1996).
77. Javanainen J., Wilkens M. *Phys.Rev.Letts*, **78**, 4675 (1997).
78. Ketterle W., van Druten N.J. *Phys.Rev.A*, **54**, 656 (1995).
79. Gardiner C.W., Zoller P. *Phys.Rev.A*, **55**, 2902 (1997).
80. Kocharovsky V.V., Kocharovsky V.I., Scully M.O. *Phys.Rev.Letts*, **84**, 2306 (2000).
81. Kocharovsky V.V., Kocharovsky V.I., Scully M.O. *Phys.Rev.A*, **61** (2000).
82. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. *ЖЭТФ*, **20**, 1064 (1950).
83. Горьков Л.П. *ЖЭТФ*, **34**, 735 (1958).
84. Тингхам М. *Введение в сверхпроводимость* (М., Атомиздат, 1980).
85. Абрикосов А.А., Горьков Л.П. *ЖЭТФ*, **39**, 1781 (1960).
86. Chang J.J., Scalapino D.J. *Phys.Rev.Letts B*, **15**, 2651 (1977).
87. Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **117**, 753 (2000).
88. Hauser J.J., Theuerer H.J. *Phys.Letts*, **14**, 270 (1965).
89. Васильев П.П. *Квантовая электроника*, **24**, 885 (1997).
90. Васильев П.П. *УФН*, **171**, 679 (2001).
91. Келдыш Л.В., Копаев Ю.В. *ФТТ*, **6**, 2791 (1964).
92. Келдыш Л.В., Козлов А.Н. *ЖЭТФ*, **54**, 978 (1968).
93. Jeffries C.D., Keldysh L.V. (Eds) *Electron-hole droplets in semiconductors. Modern problem in condensed matter sciences* (Amsterdam, North-Holland, 1969, v.6).
94. Москаленко С.А. *Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов и биэкситонов* (Кишинев, изд. АН Молд.ССР, 1970).
95. Эберлинг В. *Образование структур при необратимых процессах* (М., Мир, 1979).
96. Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах* (М., Мир, 1979).
97. Николис Дж. *Динамика иерархических систем* (М., Мир, 1989).
98. Хакен Г. *Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах* (М., Мир, 1980).
99. Полак Л.С., Михайлов А.С. *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах* (М., Наука, 1983).
100. Кадомцев Б.Б. *Динамика и информация* (М., изд. УФН, 1997).
101. Капица С.П. *УФН*, **166**, 63 (1996).