

Распространение кноидальных волн в среде с насыщением нелинейного отклика

В.А.Алешкевич, В.А.Выслоух, Я.В.Карташов

Исследовано распространение периодических кноидальных волн в среде с насыщающимся нелинейным откликом. Найденны области существования солитонных решений, рассмотрены особенности последних в пределах сильной и слабой локализации энергии кноидальной волны. Обсужден вопрос об оптической мультистабильности применительно к периодическим решениям. Численно и аналитически исследована устойчивость кноидальных волн.

Ключевые слова: кноидальные волны, насыщение нелинейного отклика, солитоны.

1. Введение

Одной из интереснейших проблем современной оптики является исследование солитоноподобных структур в нелинейных средах. Вслед за предсказанием [1] и первой демонстрацией [2] оптических солитонов был исследован простейший случай среды с локальным кубическим нелинейным откликом. В подобных средах детально изучены семейства локализованных некогерентных пучков (нелинейных мод), связанных через нелинейную добавку к показателю преломления, пропорциональную сумме модальных интенсивностей [3–10]. Известно, что огибающие солитонов и мультисолитонных комплексов в кубической среде могут быть найдены с помощью аппарата обратной задачи рассеяния.

С практической точки зрения большой интерес имеют результаты, полученные при исследовании однокомпонентных солитонов и мультисолитонных комплексов в фоторефрактивных кристаллах [11–13]. Характерной особенностью последних является весьма высокая оптическая нелинейность, заметные проявления которой наблюдаются в пучках с интенсивностью всего несколько милливольт на квадратный сантиметр, что делает фоторефрактивные кристаллы одной из наиболее подходящих сред для экспериментальной проверки новых теоретических предсказаний.

Неотъемлемым свойством фоторефрактивной среды является насыщение ее нелинейного отклика. Учет насыщения приводит к появлению целого ряда новых свойств солитонных решений: существенно повышается запас устойчивости; при столкновениях солитонов в среде с насыщением возможно слияние и рождение новых солитонов; возникает оптическая бистабильность и т. д. При использовании аппарата обратной задачи рассеяния модели с насыщением нелинейности, как правило, не интегрируются. Солитонные профили в этом случае зачастую могут быть найдены лишь с помощью численного инте-

грирования [14, 15]. Для сред с насыщением найдено множество различных семейств солитонных решений, включающих в себя как симметричные одиночные и некогерентно связанные солитоны [16, 17], так и асимметричные мультисолитонные комплексы [18].

В кубической среде важную роль играет класс периодических солитонных решений – кноидальных волн [19–22]. Концепция кноидальных волн весьма привлекательна, поскольку она позволяет анализировать динамику распространения как одно-, так и мультикомпонентных периодических решений нелинейного уравнения Шредингера для случаев различной степени локализации энергии волнового поля. Как правило, кноидальные волны в керровских средах являются структурно устойчивыми по отношению к малым возмущениям входного профиля и столкновениям [19]. Одна из наиболее важных особенностей кноидальных волн заключается в том, что в пределе сильной локализации энергии волнового поля кноидальная волна трансформируется в хорошо известные светлые и темные локализованные солитоны [21].

Целью настоящей работы является расширение теории кноидальных волн на случай среды с насыщением нелинейного отклика. В работе описаны области существования солитонных решений, найдены их точные профили и обсуждены вопросы устойчивости.

2. Теоретическая модель

Одна из достаточно общих форм укороченного нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение оптического излучения в фокусирующей среде с насыщением локального изотропного нелинейного отклика, имеет вид

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \frac{q|q|^2}{1 + s|q|^2}. \quad (1)$$

Первый член в правой части уравнения (1) описывает дифракционное распывание лазерного пучка, а второй – нелинейную самофокусировку.

В фоторефрактивном кристалле, находящемся во внешнем электрическом поле, нелинейная добавка к показателю преломления возникает в результате линейно-

го электрооптического эффекта Поккельса при экранировании этого поля носителями зарядов, генерируемых пучком в освещенной области кристалла. При этом концентрация носителей зарядов и, следовательно, добавка к показателю преломления являются нелинейными функциями интенсивности пучка, что для щелевых пучков приводит к уравнению (1). В дальнейшем мы сосредоточимся на исследовании именно этого случая.

В уравнении (1) величина $q(\eta, \xi) = (L_{\text{dif}}/L_{\text{ref}})^{1/2} \times A(\eta, \xi)/(I_{\text{dark}} + I_{\text{bg}})^{1/2}$ – безразмерная комплексная амплитуда поля; $A(\eta, \xi)$ – медленно меняющаяся огибающая светового поля; I_{dark} – темновая проводимость; I_{bg} – интенсивность внешней некогерентной подсветки; $\eta = x/x_0$ – нормированная поперечная координата; x_0 – характерный поперечный масштаб (например, ширина входного лазерного пучка); $\xi = z/L_{\text{dif}}$ – нормированная продольная координата; $L_{\text{dif}} = k_0 x_0^2$ – дифракционная длина; $L_{\text{ref}} = 2/(k_0 r_{\text{eff}} n^2 E_{\text{bias}})$ – длина нелинейной рефракции; $k_0 = n\omega/c$ – волновое число; ω – частота света; r_{eff} – эффективный электрооптический коэффициент; n_0 – невозмущенный показатель преломления; E_{bias} – напряженность электрического поля, приложенного к кристаллу в направлении оси x ; $s = L_{\text{ref}}/L_{\text{dif}}$ – параметр насыщения.

Заметим, что эффекты самоискривления пучка [22], которые играют значительную роль при уменьшении исходного радиуса пучка, в уравнении (1) не учитываются. Изменение интенсивности внешней подсветки позволяет контролировать интенсивность насыщения $I_{\text{sat}} = I_{\text{dark}} + I_{\text{bg}}$ и, следовательно, осуществлять переход между режимами слабого и сильного насыщения нелинейности. Типичные для эксперимента значения параметра насыщения $s = 2/(k_0^2 x_0^2 r_{\text{eff}} n^2 E_{\text{bias}})$ в кристалле SnBaNb для пучков He–Ne-лазера с милливаттной мощностью на $\lambda = 633$ нм при $E_{\text{bias}} \sim 8 \cdot 10^5$ В/м, $x_0 \sim 10$ мкм, $r_{\text{eff}} = 2.5 \times 10^{-10}$ м/В, $n_0 = 2.35$ составляют $\sim 0.3 - 0.5$.

3. Кноидальные волны в среде с насыщением нелинейного отклика

Аналитическое решение уравнения (1) записать не удается и его необходимо решать численно. Отметим, что одно частное решение $q(\eta, \xi, s_1)$ при $s = s_1$ может быть использовано для анализа распространения солитонов при различных значениях s , если применять масштабное преобразование $s = u^{-2} s_1$ и $q(\eta, \xi, s) = uq(u\eta, u^2 \xi, s_1)$, где u – произвольный масштабный коэффициент. Стационарное решение (1) будем искать в виде $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$, где $w(\eta)$ – действительная огибающая поля, b – положительная постоянная распространения, описывающая нелинейный фазовый набег. Подстановка этого решения в уравнение (1) приводит к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = 2bw - \frac{2w^3}{1 + sw^2}. \tag{2}$$

При малых $s \rightarrow 0$ уравнение (2) переходит в уравнение для профилей солитонов в среде с керровской нелинейностью: $d^2 w/d\eta^2 = 2bw - 2w^3$. Его периодические решения хорошо известны [19] и описываются эллиптическими функциями Якоби [23]:

$$q_{\text{dn}}(\eta, \xi) = w_0 \text{dn}(w_0 \eta, (2 - 2bw_0^{-2})^{1/2}) \exp(ib\xi)$$

$$\text{при } w_0^2 \geq b \geq 0.5w_0^2, \tag{3}$$

$$q_{\text{cn}}(\eta, \xi) = w_0 (0.5 + bw_0^{-2})^{1/2} \text{cn}(w_0 \eta, (0.5 + bw_0^{-2})^{1/2})$$

$$\times \exp(ib\xi) \text{ при } 0.5w_0^2 \geq b \geq 0.$$

Подобные решения называются кноидальными волнами. Первое из них (dn-волна) соответствует волновому полю, имеющему постоянную составляющую, на которую накладываются пространственные осцилляции вдоль оси η . Период этих осцилляций равен $2K((2 - 2b \times w_0^{-2})^{1/2})$, где $K(m)$ – эллиптический интеграл первого рода. Второе решение (cn-волна) соответствует осциллирующему полю без постоянной составляющей с пространственным периодом $4K[(0.5 + bw_0^{-2})^{1/2}]$. Максимальная локализация для волн обоих типов достигается при $m = 1$ или $b = 0.5w_0^2$. При этом оба решения (3) совпадают и имеют вид светлого солитона $q_{\text{dn}} = q_{\text{cn}} = w_0 \times \text{sech}(w_0 \eta) \exp(-0.5iw_0^2 \xi)$.

Первый интеграл уравнения (2) может быть записан следующим образом:

$$\left(\frac{dw}{d\eta}\right)^2 = 2w^2\left(b - \frac{1}{s}\right) + \frac{2}{s^2} \ln(1 + sw^2) + \text{const}. \tag{4}$$

Это уравнение описывает семейство кноидальных волн с различными амплитудами w_0 , постоянными распространения b и пространственными периодами T . Для пространственно локализованной волны постоянная интегрирования в правой части равна нулю. При $\eta = 0$, полагая $w = w_0$ и $dw/d\eta = 0$, находим однозначную связь между постоянной распространения b локализованного солитона и амплитудой w_0 :

$$b = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\ln(1 + sw_0^2)}{sw_0^2} \right]. \tag{5}$$

Для плоской нелокализованной волны с постоянной амплитудой связь, подобная (5), легко находится из уравнения (2) с учетом равенства нулю его левой части:

$$b = \frac{w_0^2}{1 + sw_0^2}. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) определяют границы областей существования решений типа кноидальных волн. Сами области существования приведены на рис.1. Выше кривой, соответствующей уравнению (5), расположена область существования cn-волн. Она существенно увеличивается с ростом амплитуды волны и при $w_0 \rightarrow \infty$ расширяется

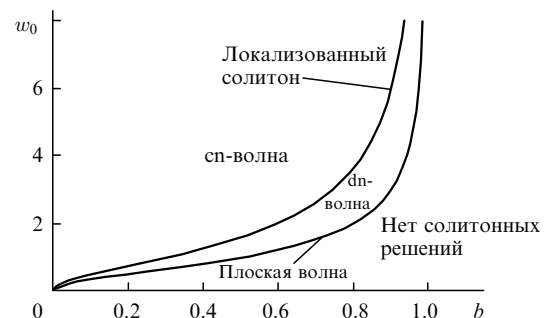


Рис.1. Области существования солитонных решений при параметре насыщения $s = 1$.

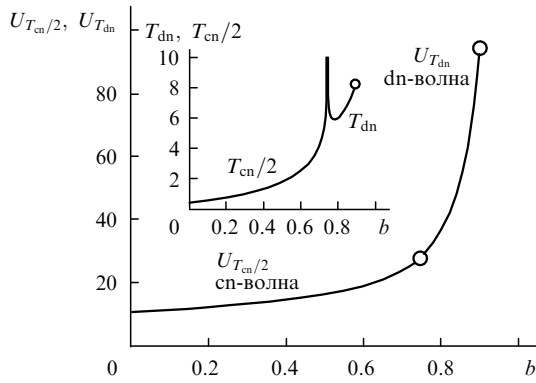


Рис.2. Зависимости периода (вставка) и энергии кноидальных волн сп- и dn-типов от постоянной распространения b при параметре насыщения $s = 1$ и амплитуде волны $w_0 = 3.0$. Кружками на рисунке обозначены (слева направо) точка пространственной локализации, соответствующая переходу между областями существования сп- и dn-волн, и точка, соответствующая переходу dn-волны в плоскую волну; кружок на вставке отвечает точке перехода dn-волны в плоскую волну.

по оси b до интервала $[0, s]$. По мере приближения к кривой локализации период сп-волны стремится к бесконечности. В пределе больших амплитуд $w_0 \gg 1$ сп-волна трансформируется в синусоидальную волну $w(\eta) = w_0 \cos[2^{1/2}(b - 1/s)^{1/2}\eta]$ с пространственным периодом $T_{cn} = 2^{1/2}\pi(s^{-1} - b)^{-1/2}$. Область существования волны dn-типа лежит между кривыми, соответствующими локализованным солитонам и плоской волне. С ростом w_0 область существования dn-волны вначале расширяется, а затем при $w_0 \rightarrow 0$ практически исчезает. В области ниже кривой, соответствующей уравнению (6), периодических решений в виде кноидальных волн не существует.

Огибающие волн кноидального типа в среде с насыщением вычислялись с помощью численного интегрирования уравнения (2) методом стрельбы. Задавая функцию w и ее производную в точке $\eta = \eta_0$ и варьируя b от нуля до s , при интегрировании получаем семейство решений с

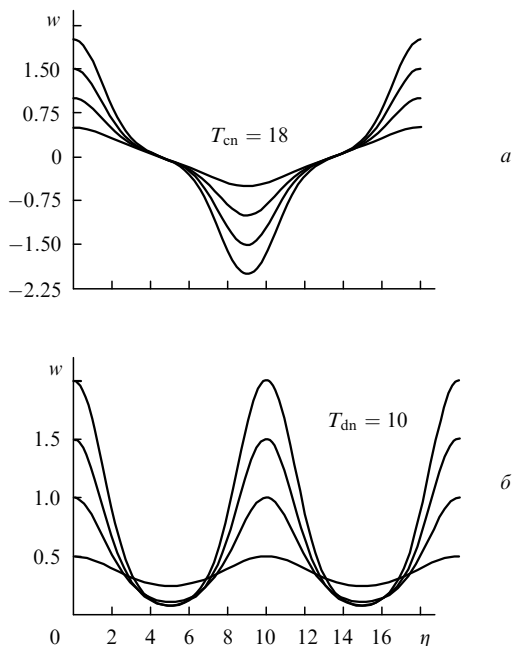


Рис.3. Профили сп-волн (а) и dn-волн (б) с различными амплитудами и одинаковыми периодами при $s = 1$.

различными пространственными периодами. На рис.2 приведены зависимости периода и энергии кноидальных волн сп- и dn-типов от постоянной распространения. В качестве энергетической характеристики далее используется энергия, заключенная в пределах одного периода волны. Для удобства сравнения энергий и периодов в точке пространственной локализации на рис.2 для сп-волны изображены зависимости полупериода $T_{cn}/2$ и энергии полупериода $U_{T_{cn}/2}$ от b .

Период сп-волны с ростом b монотонно возрастает от минимального значения, определяемого параметром насыщения, и стремится к бесконечности в пределе пространственной локализации. Энергия сп-волны также увеличивается с ростом b и стремится к удвоенной энергии локализованного солитона. При данном параметре насыщения существует бесконечное множество решений сп-типа с одинаковым пространственным периодом T_{cn} (рис.3,а). Из рис.3,а видно как меняется пространственная локализация кноидальной волны с изменением амплитуды при фиксированном периоде. Расчеты показывают, что при фиксированном T_{cn} минимальная амплитуда сп-волны w_0^{min} реализуется при $b = 0$, а максимальная амплитуда ничем не ограничена. Зависимость w_0^{min} от периода для различных параметров насыщения приведена на рис.4. С ростом s при фиксированном периоде величина w_0^{min} возрастает. При малых амплитудах, когда среда практически кубична, минимальная амплитуда не зависит от s .

Период dn-волны может быть немонотонной функцией постоянной распространения b . Отметим, что период dn-волны по мере приближения ее к плоской волне стремится к $T = \pi b^{-1/2}(1 - sb)^{-1/2}$. При увеличении b от значения, соответствующего пространственно локализованной волне, до значения, соответствующего плоской волне, период волны быстро уменьшается от бесконечности до некоторого минимального значения, а затем растет (рис.2). Интересно, что подобная неоднозначность периода dn-волны существует лишь в ограниченной области амплитуд w_0 . Вне этой области неоднозначность отсутствует, и период dn-волны монотонно убывает с ростом b .

На рис.5 изображена область параметров насыщения и амплитуд кноидальных волн, внутри которой период dn-волны является немонотонной функцией постоянной

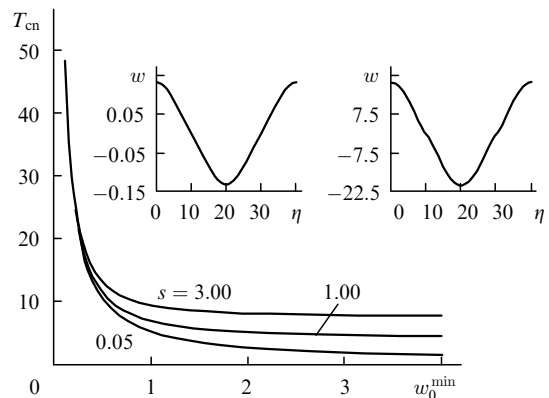


Рис.4. Зависимости периода сп-волны от минимальной амплитуды w_0^{min} при различных s . На вставках изображены характерные профили кноидальных волн, соответствующих предельным случаям слабой нелинейности (слева) и выхода отклика среды на насыщение (справа).

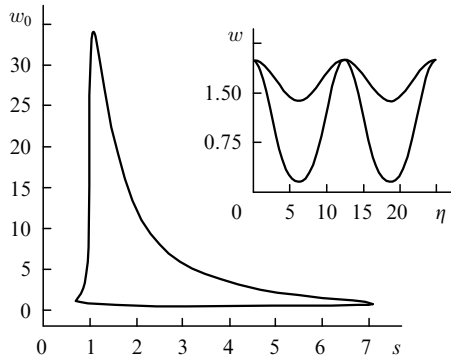


Рис.5. Область амплитуд w_0 dn -волны и параметров насыщения s , внутри которой период dn -волны является немонотонной функцией постоянной распространения b . На вставке изображены профили dn -волн, лежащих в области немонотонности периода, имеющих одинаковую амплитуду $w_0 = 2.0$, пространственный период $T_{dn} = 12.5$ и соответствующих двум различным b при $s = 2.0$.

распространения. С ростом амплитуды волны ширина этой области быстро уменьшается. На вставке к рис.5 приведены профили dn -волн, имеющих одинаковую амплитуду и пространственный период и отвечающих двум различным b . Видно, что кноидальная волна, соответствующая большей постоянной распространения, всегда имеет меньшую контрастность $v = (w^{max} - w^{min}) / (w^{max} + w^{min})$.

Для dn -волны существует бесконечно много решений, имеющих при данном s одинаковые пространственные периоды T_{dn} (см. рис.3,б). С уменьшением амплитуды волны при фиксированном T_{dn} контрастность уменьшается. Подобно sp -волне, у dn -волны при фиксированном периоде существует некоторая минимально возможная амплитуда w_0^{min} , которая практически линейно растет с ростом T_{dn} . Несмотря на немонотонную зависимость $T_{dn}(b)$, энергия dn -волны с фиксированной амплитудой монотонно возрастает с ростом b (рис.2).

При стремлении периода кноидальной волны к бесконечности семейство волн с одинаковыми пространственными периодами вырождается в локализованные солитоны. Именно эти солитоны являлись предметом анализа во множестве публикаций (см., напр., [14] и список литературы в ней). Используя связь между постоянной распространения и амплитудой локализованного солитона (5), дифференциальное уравнение (2) можно свести к интегральному уравнению

$$w(\eta) = w_0 \exp \left(- 2^{1/2} \int_0^\eta d\zeta \frac{1}{s} \times \left\{ \frac{\ln [1 + sw^2(\zeta)]}{sw^2(\zeta)} - \frac{\ln (1 + sw_0^2)}{sw_0^2} \right\} \right). \quad (7)$$

Его можно решать методом последовательных итераций. При удачно выбранном нулевом приближении итерационный процесс сходится за 8–15 шагов. Используя критерий определения ширины солитона по уровню половины максимальной интенсивности, получим, что при фиксированном параметре насыщения существуют два солитона с одинаковой шириной, но различными амплитудами. При этом солитонные решения существуют в ограниченной области значений параметра насыщения. На рис.6 показана зависимость амплитуды солитона от параметра насыщения. Видно, что при $s > s_{max} = 0.702$

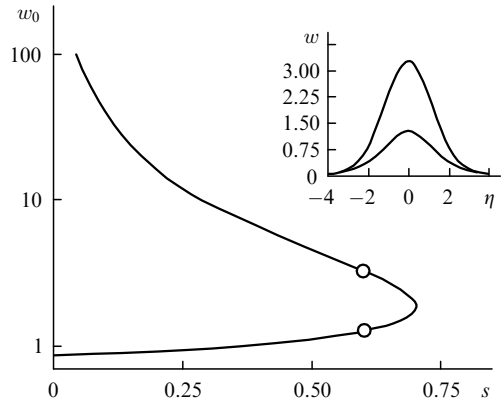


Рис.6. Зависимость амплитуды w_0 пространственно локализованного солитона от параметра насыщения s . На вставке приведены профили солитонов, соответствующих $s = 0.6$. Амплитуды этих солитонов обозначены кружками на зависимостях $w_0(s)$.

солитонных решений, которые удовлетворяют критерию $w(\eta = 1) = 2^{-1/2}w_0$, не существует. Профили солитонов показаны на вставке к рис.6.

4. Устойчивость кноидальных волн

В этом разделе мы остановимся на анализе устойчивости полученных решений по отношению к малым возмущениям. Исследование устойчивости в среде с насыщением осложняется отсутствием аналитических выражений для профилей солитонов. Более того, широко распространенный критерий линейной устойчивости, требующий положительности производной $\partial U / \partial b$ (где U – энергия кноидальных волн), сформулирован для локализованных солитонов и неприменим, например, для исследования устойчивости dn -волны, которая при положительности $\partial U / \partial b$ (рис.2) подвержена воздействию модуляционной неустойчивости. Упомянутый критерий позволяет, однако, предположить, что обе ветви локализованного солитонного решения (7) являются устойчивыми (оптическая бистабильность).

Устойчивость периодических решений может быть исследована численно с помощью анализа динамики малых возмущений входного профиля. Численное интегрирование уравнения (1) с начальными условиями $q(\eta, \xi = 0) = w(\eta) + \delta w \cos(\Omega\eta)$, где $w(\eta)$ – огибающая солитона, а δw – амплитуда возмущения, показало устойчивость кноидальных sp -волн во всей области их существования и наличие экспоненциально нарастающих возмущений для dn -волн в некотором интервале частот модуляции Ω . На рис.7,а приведена характерная динамика распространения возмущенной sp -волны. Видно, что sp -волна нейтрально устойчива, т.е. сохраняет структуру профиля в процессе распространения.

Иная картина имеет место для dn -волны. Благодаря наличию постоянной составляющей в спектре dn -волны последняя подвержена модуляционной неустойчивости (рис.7,б). Если частота возмущения Ω находится в полосе неустойчивости, то происходит перекачка энергии из нулевой гармоники волны в гармоники возмущения. Если же частота возмущения лежит вне полосы неустойчивости, то dn -волна является нейтрально устойчивой (рис.7,в). Поскольку динамика волны определяется в основном гармониками, находящимися в полосе неустойчивости, то гармоники вне полосы неустойчивости (т.е.

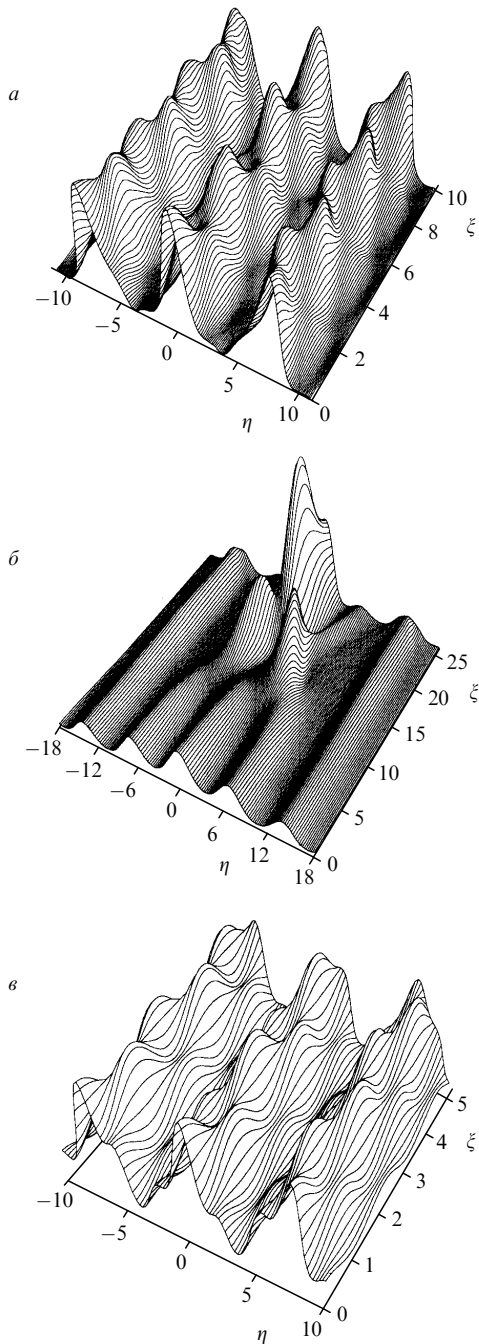


Рис.7. Динамика распространения кноидальных волн в среде с $s = 1$ при малом гармоническом возмущении $\delta w \cos(\Omega\eta)$ входного профиля: сп-волна с амплитудой $w_0 = 2.0$, пространственным периодом $T_{cn} = 14$ при частоте возмущения $\Omega = 2.0$ и амплитуде возмущения $\delta w/w_0 = 0.15$ (а); dn-волна с $w_0 = 2.0$, $T_{dn} = 7$ при $\Omega = 0.22$ и $\delta w/w_0 = 0.15$ (б); dn-волна с $w_0 = 2.0$, $T_{dn} = 7$ при $\Omega = 2.5$ и $\delta w/w_0 = 0.15$ (е).

собственные гармоники dn-волны с номерами $n \geq 1$) практически не участвуют в энергообмене. В этом случае можно, используя технику линеаризации и зная лишь амплитуду нулевой гармоники w_h , найти, что нарастание малого гармонического возмущения будет происходить с инкрементом

$$g = \frac{\Omega}{2} \operatorname{Im} \left[\Omega^2 - \frac{4w_h^2}{(1 + sw_h^2)^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

если частота возмущения Ω попадает в полосу неустой-

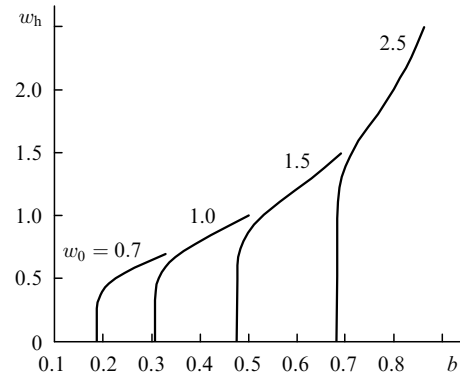


Рис.8. Зависимости амплитуды w_h нулевой гармоники dn-волны от постоянной распространения b для различных амплитуд волны w_0 при $s = 1$.

чивости $[0, 2w_h/(1 + sw_h^2)]$. Зависимости амплитуды нулевой гармоники dn-волны от параметра распространения b для различных амплитуд w_0 приведены на рис.8. При сравнении описанных выше результатов с данными компьютерного моделирования оказалось, что использование техники линеаризации при численно найденных амплитудах нулевой гармоники позволяет на удивление точно определить области модуляционной неустойчивости практически для всех значений b , за исключением тех, для которых контрастность волны v превышает ~ 0.9 .

5. Заключение

На наш взгляд, описанные выше кноидальные волны в средах с насыщением могут быть важны и для многих приложений, поскольку их использование открывает новые возможности управления допустимыми соотношениями между глубиной модуляции показателя преломления и степенью пространственной локализации светового поля в решетках светоиндуцированных волноводов. Кроме того, возбуждение кноидальных волн в фоторефрактивных кристаллах открывает отчетливые перспективы для создания светоиндуцированных периодических структур с управляемыми свойствами. Рассмотренный нами класс периодических решений нелинейного уравнения Шредингера имеет достаточно общий для квантовой электроники характер. К аналогичному уравнению приводит, в частности, описание распространения излучения в полимерах со штарковским сдвигом двухфотонных состояний, в некоторых легированных стеклах с высокими нелинейными свойствами и в тонких капиллярах, заполненных жидкостью.

1. Hasegawa A., Tappert F. *Appl.Phys.Letts*, **23**, 142 (1973).
2. Mollenauer L., Stolen R., Gordon J. *Phys.Rev.Letts*, **45**, 1095 (1980).
3. Akhmediev N., Krolikowski W., Snyder A. *Phys.Rev.Letts*, **81**, 4632 (1998).
4. Krolikowski W., Akhmediev N., Luther-Davies B. *Phys.Rev.E*, **59**, 4654 (1999).
5. Ankiewicz A., Krolikowski W., Akhmediev N. *Phys.Rev.E*, **59**, 6079 (1999).
6. Christodoulides D., Coskun T., Joseph R. *Optics Letts*, **22**, 1080 (1997).
7. Christodoulides D., Coskun T., Mitchell M., Segev M. *Phys.Rev.Letts*, **78**, 646 (1997).
8. Christodoulides D., Coskun T., Mitchell M., Chen Z., Segev M. *Phys.Rev.Letts*, **80**, 5113 (1998).
9. Kutuzov V., Petnikova. V., Shuvalov V., Vysloukh V. *Phys.Rev.E*, **57**, 6056 (1998).

10. Bang O., Berge L., Rasmussen J. *Phys.Rev.E*, **59**, 4600 (1999).
11. Maufroy J., Fressengeas N., Wolfersberger D., Kugel G. *Phys.Rev.E*, **59**, 6116 (1999).
12. Belic M., Stepken A., Kaiser F. *Phys.Rev.Letts*, **84**, 83 (2000).
13. Denz C., Krolikowski W., Petter J., Weilnau C., Tschudi T., Belic M., Kaiser F., Stepken A. *Phys.Rev.E*, **60**, 6222 (1999).
14. Gatz S., Herrmann J. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **14**, 1795 (1997).
15. Tikhonenko V., Kivshar Y., Steblina V., Zozulya A. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **15**, 79 (1998).
16. Chen Z., Segev M., Coskun T., Christodoulides D., Kivshar Y. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **14**, 3066 (1997).
17. Mitchell M., Segev M., Coskun T., Christodoulides D. *Phys.Rev.Letts*, **79**, 4990 (1997).
18. Litchinitser N., Krolikowski W., Akhmediev N., Agrawal G. *Phys.Rev.E*, **60**, 2377 (1999).
19. Выслоух В., Петникова В., Шувалов В. *Квантовая электроника*, **25**, 1062 (1998).
20. Выслоух В., Петникова В., Руденко К., Шувалов В. *Квантовая электроника*, **28**, 55 (1999).
21. Petnikova V., Shuvalov V., Vysloukh V. *Phys.Rev.E*, **60**, 1 (1999).
22. Aleshkevich V., Vysloukh V., Kartashov Y. *Optics Comms*, **173**, 277 (2000).
23. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям* (М., Наука, 1979, с. 380–401).