

# Возбуждение волноводных мод в одномерном фотонном кристалле

А.В.Андреев, А.Б.Козлов

*Исследованы режимы возбуждения волны четырехволнового смешения в одномерном фотонном кристалле и определены условия, при которых возбуждаемая волна распространяется вдоль структуры в волноводном режиме. Получен набор собственных волноводных мод многослойной структуры для различных поляризаций поля. Исследован резонансный характер возбуждения волноводных мод в процессе четырехволнового смешения. Установлено многократное увеличение амплитуды поля внутри структуры при резонансном возбуждении волноводных мод.*

**Ключевые слова:** фотонные кристаллы, волноводные моды, нелинейно-оптические эффекты.

## 1. Введение

В последнее время значительный интерес привлекают исследования линейных и нелинейных процессов распространения и взаимодействия волн в фотонных кристаллах. Наличие областей сильной пространственной и временной дисперсии в таких структурах открывает широкие возможности управления формой импульсов и эффективностью нелинейно-оптических преобразований. В [1, 2] показана возможность компрессии фемтосекундных импульсов в тонких одномерных периодических структурах, в [3–5] – возможность управления эффективностью ГВГ, а также генерации суммарной и разностной частот в таких структурах.

Существуют две основные причины увеличения нелинейно-оптического отклика среды. Первая связана с указанной выше дисперсией, позволяющей управлять условиями синхронизма взаимодействующих волн. Вторая причина обусловлена перераспределением амплитуды интерференционного поля в кристалле. Варьируя угол падения, мы можем перемещать пучности интерференционного поля из одного материала структуры в другой. Такое перераспределение амплитуды поля приводит к аномальному прохождению рентгеновских лучей в кристаллах (эффект Бормана [6]). Хорошо известно, что в результате интерференционного сложения амплитуда волны возрастает не более чем вдвое. Гораздо значительнее она может возрасти в условиях возбуждения волноводных мод.

В одномерном фотонном кристалле может быть реализовано возбуждение неоднородной волны, т. е. волны, распространяющейся вдоль структуры в волноводном режиме и экспоненциально затухающей в вакууме. Возбуждения неоднородной волны можно достигнуть в результате трехволнового ( $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ ) или четырехволнового ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$ ) смешения. В настоящей работе мы подробно рассмотрим возбуждение неоднородной волны при четырехволновом смешении. Результаты, аналогичные обсуждаемым ниже, можно получить и для трехволнового смешения.

Выбор процесса смешения (трех или четырехволнового), обеспечивающего эффективное возбуждение неоднородной волны, зависит от конкретных параметров многослойной структуры. При взаимодействии поля с многослойной структурой тангенциальная компонента импульса поля сохраняется, поэтому несложно представить себе ситуацию, когда при определенных частотах и углах падения волны накачки на многослойную структуру тангенциальная компонента волнового вектора волны как при трех-, так и при четырехволновом смешении может стать больше его длины в вакууме, что приведет к возбуждению волны, неоднородной в вакууме. Тем самым может быть реализовано возбуждение волноводных мод в многослойной структуре, которое имеет ярко выраженный резонансный характер. В настоящей работе мы определим собственные моды многослойной структуры, использованной ранее в экспериментах [1–5], найдем условия возбуждения волноводных мод и рассчитаем распределение поля в структуре, при которой имеет место многократное увеличение амплитуды поля резонансно возбужденных мод.

## 2. Рекуррентные соотношения и функция Грина

Рассмотрим взаимодействие электромагнитного поля, распространяющегося в плоскости  $yz$ , со слоистой средой, диэлектрическая проницаемость которой является функцией координаты  $z$ . Динамика  $s$ -компоненты электромагнитного поля описывается волновым уравнением для  $x$ -компоненты напряженности электрического поля

$$\Delta E_x - \frac{\varepsilon(z)}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J_x}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}$  – плотность атомного тока;  $\varepsilon(z)$  – диэлектрическая проницаемость среды. В случае, когда со средой взаимодействует плоская волна  $E_x(y, z, t) = E_x(z) \exp(-i\omega t + ik_y y)$ , где  $\omega$  – частота поля,  $k_y$  – тангенциальная про-

екция волнового вектора, волновое уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + (k^2(z) - k_y^2) E_x = -i\omega \frac{4\pi}{c^2} J_x, \quad (2)$$

где  $k(z)$  – модуль волнового вектора. Динамику  $x$ -компоненты электромагнитного поля удобно рассматривать с помощью  $x$ -компоненты напряженности магнитного поля, для которой уравнение, аналогичное уравнению (2), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_x}{dz^2} + (k^2(z) - k_y^2) H_x - \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \frac{dH_x}{dz} \\ = -\frac{4\pi}{c} \left[ ik_y J_z - \varepsilon(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{J_y}{\varepsilon(z)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Если эффективность нелинейно-оптического преобразования невелика, то решения уравнений (2), (3) для нелинейного отклика среды можно представить с помощью функции Грина. Для уравнения (2) решение имеет вид

$$\begin{aligned} E_x(z) = -i\omega \frac{4\pi}{c^2} \frac{1}{w} \left[ u(z) \int_0^z v(z') J_x(z') dz' \right. \\ \left. + v(z) \int_z^L u(z') J_x(z') dz' \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L$  – длина среды;  $u(z)$  и  $v(z)$  – линейно-независимые решения однородного волнового уравнения;  $w$  – определитель Вронского. В качестве двух линейно-независимых решений  $u(z)$  и  $v(z)$  однородного волнового уравнения могут быть выбраны решения, соответствующие двум плоским волнам, которые падают на среду с противоположных сторон.

Рассмотрим в многослойной структуре некоторый слой длиной  $d$ , в пределах которого линейный показатель преломления является константой (рис.1,а). Пусть

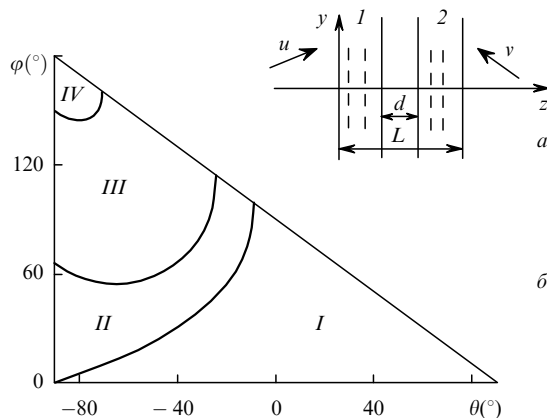


Рис.1. Схема падения волн  $u, v$  на многослойную структуру (1, 2 – фрагменты этой структуры) (а) и режимы возбуждения волны четырехволнового смешения  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$  в многослойной структуре в зависимости от угла падения первой волны накачки  $\theta$  и угла между волнами накачки  $\varphi$  при фиксированных длинах волн накачки  $\lambda_1 = 690$  нм и  $\lambda_2 = 817$  нм (б). Область I определяется условием  $|k_y(\omega_3)| < k_0(\omega_3)$ , область II –  $k_0(\omega_3) < |k_y(\omega_3)| < k_2(\omega_3)$ , область III –  $k_2(\omega_3) < |k_y(\omega_3)| < k_1(\omega_3)$ , область IV –  $k_1(\omega_3) < |k_y(\omega_3)|$ .

рассматриваемый слой ограничен фрагментами 1, 2 многослойной структуры с коэффициентами отражения и прохождения для поля  $R_1, R'_1, T_1, T'_1$  и  $R_2, R'_2, T_2, T'_2$ , где коэффициенты без штриха соответствуют волне, падающей на фрагменты среды слева направо, а со штрихом – справа налево. Два линейно-независимых решения  $u(z')$  и  $v(z')$  однородного волнового уравнения в рассматриваемом слое имеют вид

$$\begin{aligned} u(z') = \frac{T_1 [\exp(ik_z z') + R_2 \exp(i2k_z d - ik_z z')]}{1 - R_2 R'_1 \exp(i2k_z d)}, \\ v(z') = \frac{T'_1 [\exp(ik_z d - ik_z z') + R'_1 \exp(ik_z d + ik_z z')]}{1 - R_2 R'_1 \exp(i2k_z d)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k_z$  – нормальная составляющая волнового вектора;  $z'$  – относительная координата, изменяющаяся от нуля до  $d$ .

Коэффициенты отражения и прохождения слоистой структуры могут быть вычислены при помощи рекуррентной процедуры. Пусть некоторый фрагмент слоистой структуры состоит из двух частей с известными коэффициентами отражения и прохождения  $R_1, R'_1, T_1, T'_1$  и  $R_2, R'_2, T_2, T'_2$ . Тогда коэффициенты отражения и прохождения всего рассматриваемого фрагмента  $R, R', T, T'$  выражаются через известные коэффициенты его частей следующим образом:

$$\begin{aligned} R = R_1 + \frac{T_1 T'_1 R_2}{1 - R_2 R'_1}, \quad T = \frac{T_1 T_2}{1 - R_2 R'_1}, \\ R' = R'_2 + \frac{T_2 T'_2 R'_1}{1 - R_2 R'_1}, \quad T' = \frac{T'_2 T'_1}{1 - R_2 R'_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве фрагментов среды могут рассматриваться любые объекты, например кусок однородной среды или граница между двумя слоями. В последнем случае коэффициенты отражения и прохождения определяются формулами Френеля. Отметим, что последовательное применение формул (6) позволяет вычислить коэффициенты отражения и прохождения для сколь угодно сложной среды, не прибегая при этом к прямому численному интегрированию волнового уравнения.

### 3. Условия возбуждения неоднородной волны

В одномерной периодической среде может быть реализовано возбуждение неоднородной волны, т. е. волны, распространяющейся вдоль слоев в волноводном режиме. Для реализации такого процесса необходимы две или более волны накачки, падающие на среду под разными углами. Кроме того, необходимо, чтобы частота возбуждаемой неоднородной волны определялась разностью хотя бы двух частот волн накачки. Возбуждение неоднородной волны может быть достигнуто в результате как трехволнового ( $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ ), так и четырехволнового ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$ ) смешения. Здесь мы подробно рассмотрим четырехволновое смешение.

Пусть неоднородная волна возбуждается в одномерной периодической структуре  $ZnS/SrF_2$ , состоящей из восьми слоев с большим ( $ZnS, n_1 = 2.31$  при  $\lambda = 780$  нм) и семи слоев с меньшим ( $SrF_2, n_2 = 1.43$  при  $\lambda = 780$  нм) показателями преломления. Толщины слоев  $d_i$  мы полагали равными  $3\lambda/4n_i$  при  $\lambda = 780$  нм. Такой выбор па-

раметров структуры связан с рядом экспериментов, на которые ориентированы наши расчеты [1–5].

Рассмотрим взаимодействие указанной периодической структуры с полем двух волн накачки с  $\lambda_1 = 690$  нм и  $\lambda_2 = 817$  нм, падающих на среду под разными углами. Различные режимы возбуждения волны четырехволнового смещения  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$  определяются тангенциальной компонентой волнового вектора  $k_y(\omega_3) = 2 \sin \theta_1 \omega_1 / c - \sin \theta_2 \omega_2 / c$ , где  $\theta_{1,2}$  – углы падения волн накачки. Пусть  $k_0(\omega_3), k_1(\omega_3), k_2(\omega_3)$  – модули волновых векторов поля отклика среды в вакууме, ZnS и SrF<sub>2</sub> соответственно, которые при выбранных параметрах среды и внешнего поля подчиняются условию  $k_0(\omega_3) < k_2(\omega_3) < k_1(\omega_3)$ . Для дальнейшего анализа вместо углов  $\theta_{1,2}$  используем углы  $\theta = \theta_1$  и  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ .

На рис.1,б представлена область допустимых углов  $\theta$  и  $\varphi$ , разбитая на четыре подобласти. Подобласть I определяется условием  $k_y(\omega_3) < k_0(\omega_3)$ , что соответствует возбуждению волны четырехволнового смещения, однородной как в вакууме, так и в фотонном кристалле. Подобласть II определяется соотношением  $k_0(\omega_3) < |k_y(\omega_3)| < k_2(\omega_3)$ , что соответствует возбуждению волны, однородной в фотонном кристалле, но неоднородной (экспоненциально затухающей) в вакууме. Подобласть III определяется соотношением  $k_2(\omega_3) < |k_y(\omega_3)| < k_1(\omega_3)$ , что соответствует возбуждению волны, однородной в слоях ZnS и неоднородной в слоях SrF<sub>2</sub> и в вакууме, а подобласть IV – соотношением  $k_1(\omega_3) < |k_y(\omega_3)|$ , что соответствует случаю, когда волну четырехволнового смещения возбудить невозможно. Таким образом, возбуждение неоднородной волны может быть реализовано при условии, что точка, задаваемая углами  $\theta$  и  $\varphi$ , лежит в подобласти II или III.

#### 4. Волноводные моды

При анализе возбуждения неоднородной волны в слоистой среде исключительно важную роль играет решение однородного волнового уравнения с граничными условиями, соответствующими экспоненциальному затуханию поля вне фотонного кристалла. Решением этой краевой задачи является набор собственных значений и соответствующих им мод. Собственные значения удобно характеризовать тангенциальной компонентой волнового вектора поля отклика среды  $k_y(\omega_3)$ . На рис.2 изображен спектр собственных значений для s- и р-поляризованного поля на длине волны  $\lambda_3 = 597$  нм. Тангенциальная компонента волнового вектора изменяется от  $k_0(\omega_3) = 10.52$  мкм<sup>-1</sup> до  $k_2(\omega_3) = 15.13$  мкм<sup>-1</sup>, что соответствует углам  $\theta$  и  $\varphi$ , которые задают точку в подобласти II на рис.1,б. Для s-поляризации число собственных значений равно восьми, а для р-поляризации – девяти. Отметим, что в случае s-поляризации собственные значения расположены на шкале  $k_y(\omega_3)$  более плотно, чем в случае р-поляризации.

В качестве примера на рис.2,в изображена усредненная тангенциальная компонента вектора Умова – Пойнтинга  $P_y(\omega_3, z)$ , соответствующая s-поляризованной моде с собственным значением  $k_y(\omega_3) = 13.16$  мкм<sup>-1</sup> (четвертая вертикальная черта на шкале  $k_y(\omega_3)$ , рис. 2,а), как функция поперечной координаты  $z$ . Поток энергии поля вдоль структуры в слоях SrF<sub>2</sub> существенно превышает поток в слоях ZnS. Эта особенность справедлива практически для всех s-поляризованных мод. В отличие от

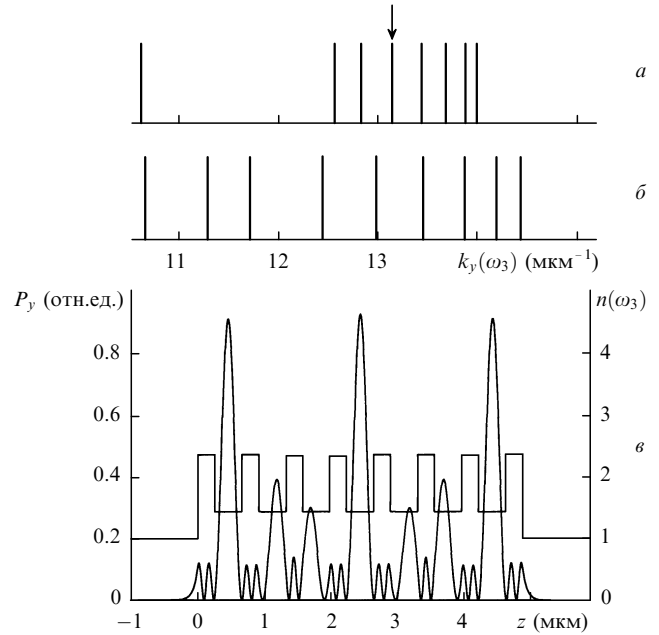


Рис.2. Спектр собственных значений тангенциальной компоненты волнового вектора s- (а) и р-поляризованного (б) поля на длине волны  $\lambda_3 = 597$  нм, а также зависимость усредненной тангенциальной компоненты вектора Умова – Пойнтинга s-поляризованной волноводной моды поля, которая соответствует собственному значению тангенциальной компоненты волнового вектора  $k_y(\omega_3) = 13.16$  мкм<sup>-1</sup>, обозначенной сверху стрелкой, от поперечной координаты  $z$  (в).

s-поляризации, поток энергии поля вдоль структуры р-поляризованных мод распределен в фотонном кристалле более «равномерно».

#### 5. Возбуждение волноводных мод

Рассмотрим теперь возбуждение s-поляризованной волны четырехволнового смещения с помощью р-поляризованной ( $\lambda_1 = 690$ ) нм и s-поляризованной ( $\lambda_2 = 817$  нм) волн накачки. Если эффективность нелинейно-оптического преобразования невелика, то можно считать, что плотность атомного тока  $\mathbf{J}$  зависит только от напряженности поля накачки, истощением которого можно пренебречь. В численных расчетах, результаты которых представлены ниже, мы полагали, что нелинейной средой, участвующей в генерации поля на комбинационной частоте, являлись только слои ZnS с большим показателем преломления. Плотность атомного тока  $\mathbf{J}$ , индуцируемого в среде, мы полагали равной  $\chi(\mathbf{E}\mathbf{E})\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  – напряженность поля накачки;  $\chi$  – эффективная нелинейная восприимчивость слоев ZnS. Такая аппроксимация является достаточно грубой, но вполне приемлемым для наших целей приближением.

На рис.3 изображена усредненная тангенциальная компонента вектора Умова – Пойнтинга  $P_y(\omega_3, z)$ , т.е. поток энергии поля отклика среды вдоль структуры, как функция поперечной координаты  $z$  при разных углах  $\varphi$  и  $\theta$ . При фиксированном угле между волнами накачки  $\varphi = 40^\circ$  угол  $\theta$  определяет тангенциальную компоненту волнового вектора волны четырехволнового смещения. Если тангенциальная компонента волнового вектора совпадает с одним из собственных значений однородного волнового уравнения (рис.2,а, б), то можно говорить о резонансном возбуждении соответствующей моды поля.

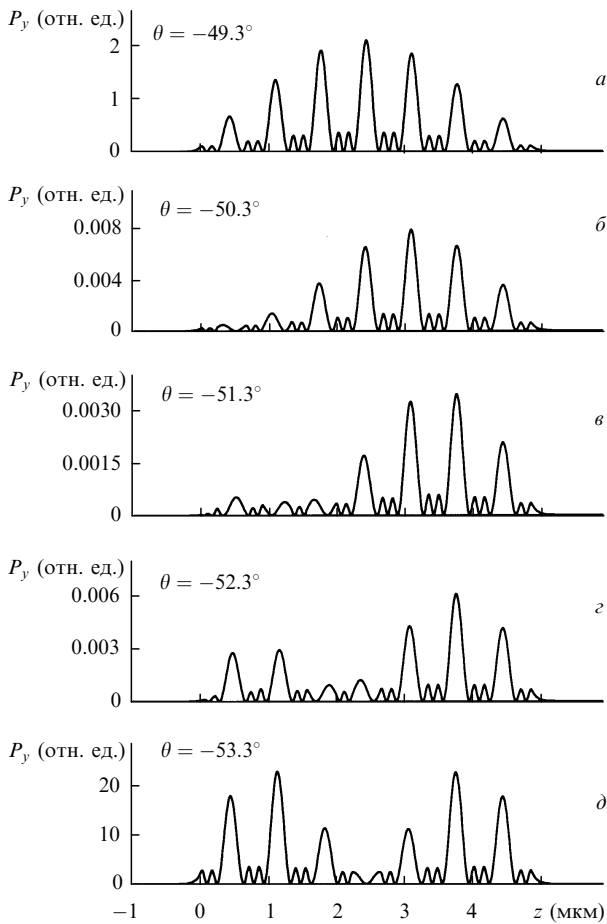


Рис.3. Зависимости усредненной тангенциальной компоненты вектора Умова – Пойнтинга s-поляризованного поля отклика на комбинационной частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$  от поперечной координаты  $z$  для разных углов падения первой волны накачки  $\theta$  при фиксированном угле между p- и s-поляризованными волнами накачки  $\varphi = 40^\circ$ .

Случаи рис.3,а и д являются квазирезонансными, точные резонансные условия выполняются при углах  $\theta = -49.35$  и  $-53.29^\circ$  для второй и третьей s-поляризованных мод соответственно. В квазирезонансных условиях профиль поля волны четырехволнового смешения совпадает с профилем поля соответствующей моды, а амплитуда поля возрастает с уменьшением отстройки от резонанса. В нерезонансных случаях (рис.3,б–з) профиль поля волны четырехволнового смешения определяется двумя параметрами (углами  $\varphi$  и  $\theta$ ), а не одним (тангенциальной компонентой волнового вектора), что имеет место в резонансных условиях.

Для анализа резонансного возбуждения волноводных мод введем в рассмотрение поток энергии вдоль структуры

$$S(\omega_3) = \int_0^L P_y(\omega_3, z) dz,$$

где  $L$  – длина фотонного кристалла. На рис.4 изображены зависимости потока энергии вдоль структуры от угла  $\theta$  при фиксированном угле между волнами накачки  $\varphi = 40^\circ$  для двух случаев – возбуждения s-поляризованной волны четырехволнового смешения p-поляризованной ( $\lambda_1 = 690$  нм) и s-поляризованной ( $\lambda_2 = 817$  нм) волнами накачки и возбуждения p-поляризованной волны четырехволнового смешения двумя p-поляризованными волнами накачки.

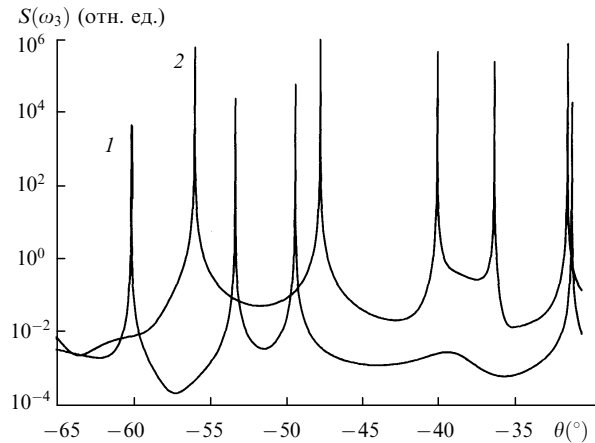


Рис.4. Зависимости потока энергии вдоль многослойной структуры s- (1) и p-поляризованного (2) поля волны четырехволнового смешения  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_1 - \omega_2$  от угла падения первой волны накачки при фиксированном угле между волнами накачки  $\varphi = 40^\circ$ . В первом случае среда взаимодействует с p- и s-поляризованными, во втором – с двумя p-поляризованными волнами накачки.

Положения максимумов интенсивности возбуждаемой волны определяются углом  $\theta$ , при котором тангенциальная компонента волнового вектора совпадает с одним из собственных значений однородного волнового уравнения (рис.2,а,б). Ширина резонансных максимумов зависит от того, насколько сильно изменяется тангенциальная компонента волнового вектора с изменением угла  $\theta$  в окрестности резонанса. Резонансное увеличение амплитуды поля обуславливается интерференцией отраженных и прошедших волн четырехволнового смешения. В рамках рассматриваемой модели амплитуда резонансных максимумов стремится к бесконечности, что есть следствие взаимодействия неограниченных плоских волн с неограниченным (в направлении оси  $y$ ) фотонным кристаллом.

Учет затухания волны четырехволнового смешения приводит к ограничению роста резонансных максимумов. В численных расчетах мы предполагали, что затухание волны четырехволнового смешения в слоях ZnS составляет  $\epsilon$  раз на длине 1 см. В реальных экспериментальных условиях конечный размер лазерного пучка и ограниченность взаимодействия излучения со структурой во времени приведут к уменьшению амплитуды резонансных максимумов. Наличие разного рода дефектов в фотонном кристалле порождает зависимость спектра собственных значений от продольной координаты  $y$ , вследствие чего характер резонансного возбуждения мод может существенно измениться.

## 6. Заключение

Таким образом, для возбуждения в одномерном фотонном кристалле волны четырехволнового смешения, распространяющейся вдоль структуры в волноводном режиме, необходимы две или более волны накачки, падающие на структуру под разными углами, причем частота возбуждаемой волны должна определяться разностью хотя бы двух частот волн накачки. Условия возбуждения волноводных мод определяются параметрами поля накачки – длинами волн и углами падения их на структуру. В квазирезонансных условиях распределение поля волны четырехволнового смешения совпадает с

распределением поля соответствующей моды, а амплитуда поля многократно возрастает с уменьшением отстройки от резонанса. Полученные результаты наглядно демонстрируют возможность управления распределением поля в среде. Резкое возрастание амплитуды поля неоднородной волны в квазирезонансных условиях может быть использовано для увеличения эффективности нелинейно-оптических преобразований или диагностики различных процессов внутри многослойной структуры.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-02-16093) и программы «Университеты России».

1. Андреев А.В., Балакин А.В., Буше Д., Масселин П., Ожередов И.А., Шкуринов А.П. *Письма ЖЭТФ*, **71**, 539 (2000).
2. Andreev A.V., Balakin A.V., Ozheredov I.A., Shkurinov A.P., Masselin P., Mouret G., Boucher D. *Phys.Rev.E*, **63**, 16602 (2001).
3. Балакин А.В., Буше Д., Бушуев В.А., Манцызов Б.И., Масселин П., Ожередов И.А., Шкуринов А.П. *Письма в ЖЭТФ*, **70**, 718 (1999).
4. Андреев А.В., Андреева О.А., Балакин А.В., Буше Д., Масселин П., Ожередов И.А., Прудников И.Р., Шкуринов А.П. *Квантовая электроника*, **28**, 75 (1999).
5. Balakin A.V., Boucher D., Bushuev V.A., Koroteev N.I., Mantsyzov B.I., Masselin P., Ozheredov I.A., Shkurinov. A.P. *Optics Letts*, **24**, 793 (1999).
6. Borrmann G. *Phys.Zs.*, **42**, 157 (1941).