PACS 42.50.Ct; 42.25.Fx

Рассеяние ансамбля фотонов с учетом их пространственно-временной локализации

Б.И.Макшанцев, В.Б.Макшанцев

Дано решение задачи о рассеянии ансамбля фотонов частицами вещества. При этом векторный потенциал каждого из падающих на вещество и рассеиваемых им фотонов описывается нерасплывающимся волновым пакетом. Получены уточненные с учетом пространственно-временной локализации фотонов выражения для сечений упругого и неупругого рассеяния электромагнитного излучения. Обсуждаются возможные эксперименты по проверке полученных теоретических результатов.

***Ключевые слова**: векторный потенциал, рассеяние фотонов, взаимодействие излучения с веществом.*

1. Введение

Обычно при расчетах величин, характеризующих взаимодействие электромагнитного излучения с веществом, например сечений рассеяния на атоме (молекуле) фотона, используется теория возмущений по параметру взаимодействия электромагнитного поля с электроном, а векторный потенциал фотона принимается в виде монохроматической волны [1, 2]. В работе [3] показано, что существуют задачи, которые могут быть решены лишь при учете пространственно-временной локализации фотона, т. е. при использовании выражения для векторного потенциала фотона в виде волнового пакета, который, двигаясь вдоль оси z, имеет вид

$$\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r},t)=-[\gamma_0^3(1-g_0)^3\hbar/\pi c\Omega_0]^{1/2}\boldsymbol{u}_0{\rm kei}(r\theta_r\gamma_0(1-g)/2c)$$
$$\times\exp\left[-\frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)(t-z/c)\right]\sin[\Omega_0(t-z/c)]\theta(t-z/c).\quad(1)$$

Здесь $\gamma_0={}^2/_3e^2\tilde{\Omega}^2/m_0c^3$ – постоянная радиационного затухания осциллятора, испустившего волновой пакет, описываемый формулой (1); e – заряд электрона; $\tilde{\Omega}_0$ и m_0 – частота и масса осциллятора; c – скорость света в вакууме; $g_0=(3\Omega_{10}/8\pi)\sin^2\theta_{\rm v0}$; $\Omega_1=(1-2\gamma_0\bar{\omega}_0/\pi\tilde{\Omega}_0)^{1/2}$; $\bar{\omega}_0=\tilde{\omega}_{\max}/\bar{\Omega}_0$; $\tilde{\omega}_{\max}$ – частота, на которой обрезается фотонный спектр; $\sin\theta_{\rm v0}=\boldsymbol{e}_{\rm v0}\boldsymbol{u}_0$; $\boldsymbol{e}_{\rm v0}$ и $\boldsymbol{u}_0$ – единичный вектор прямой, вдоль которой колеблется осциллятор, и вектор поляризации фотона соответственно; $z=r\cos\theta_r\approx r-r\theta_r^2/2$; kei(...) – функция Томсона; Ω_0 – частота фотона. Здесь и ниже параметры фотона, падающего на частицу вещества (атом, молекулу), будем отмечать индексом «0».Функция $\theta(x)=1$ при $x>0$ и $\theta(x)=0$ при $x<0$.

Задачей, в которой необходимо учитывать пространственно-временную локализацию фотонов, является задача о рассеянии частицами вещества ансамбля параллельно движущихся фотонов. Она будет решаться с использованием следующего выражения для векторного потенциала фотона, распространяющегося по оси z' и возникшего в результате взаимодействия с частицей вещества падающего на нее фотона [3]:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{3\Omega_1}{2\pi^2}\gamma\boldsymbol{u}\sin\theta_v\,{\rm kei}\big[r\theta_r'\gamma(1-g)/2c\big]$$
$$\times\int_0^{t-z'/c}{\rm d}\tau\boldsymbol{e}_{\rm v}\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}_{\rm c}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_{\rm c}'),\tau)\exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-z'/c-\tau)\right]$$
$$\times\cos[\Omega(t-z'/c-\tau)]\theta(t-z'/c).\quad(2)$$

В (2) $\boldsymbol{A}_{\rm ph}\big(\boldsymbol{r}_{\rm c}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_{\rm c}'),\tau\big)$ определяется выражением (1); Ω_1, γ, $\sin\theta_{\rm v}$, $\boldsymbol{e}_{\rm v}$, $\boldsymbol{u}$, Ω – то же, что и в (1), но без индекса «0». Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_{\rm c}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_{\rm c}')$ характеризует место нахождения осциллятора как функцию его положения в штрихованной системе координат.

В настоящей работе с учетом пространственно-временной локализации фотонов уточнены выражения для сечений упругого и неупругого рассеяния электромагнитного излучения. Установлены точные критерии классичности рассеянного веществом электромагнитного поля и предложены возможные эксперименты по проверке полученных результатов.

2. Рассеяние гармонической системой ансамбля фотонов

На некоторую среду, занимающую объем цилиндра с радиусом $R_{\rm s}$ и длиной $h_{\rm s}$, в направлении оси z падает ансамбль фотонов, векторный потенциал которых описывается выражением

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m}^{L_m}\boldsymbol{A}_{ml_m}(t-z/c-t_{l_m},\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_m).\quad(3)$$

Здесь вектор $\boldsymbol{A}_{ml_m}(t-z/c-t_{l_m},\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_m)$ определяется выражением (1), в котором следует сделать замену $t\to t-t_{l_m}$, $r\theta_r\to\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_m$; $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_m$ – радиус-векторы в плоскости, перпендикулярной оси z; $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{e}_zz$; $\boldsymbol{e}_z$ – единичный вектор вдоль оси z. Отметим, что в зависимости от

ВНИИ оптико-физических измерений, Россия, 103031 Москва, ул. Рождественка, 27

Поступила в редакцию 5 февраля 2001 г.

параметров, входящих в (3), а также от свойств функций распределения случайных величин в этом выражении волновые пакеты $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}, t)$ обладают когерентными свойствами.

Для простоты в выражении для вектора $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}, t)$ параметры всех фотонов в ансамбле считаются одинаковыми и $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{e}_x$, где $\boldsymbol{e}_x$ – единичный вектор вдоль оси x. Величина t_{l_m} определяет момент времени пересечения l_m-м фотоном плоскости xy в точке m с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_m$. Целые числа M и L_m определяют к моменту времени t соответственно полное число точек пересечения фотонами плоскости xy и полное число фотонов, пересекших эту плоскость в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_m$. Будем полагать, что $z, \boldsymbol{\rho}$ конечны, время $t \to \infty$ и, следовательно, $M, L_m \to \infty$.

Положим, что концы радиус-векторов $\boldsymbol{\rho}_m$ в выражении (3) распределены в плоскости xy на площади S с плотностью вероятности $1/S$, где $S \to \infty$. Для простоты считаем, что все частицы вещества одинаковы и их местоположение определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}_n$, где номера частиц $1 \leqslant n \leqslant N$. Далее представим, что частицы различаются лишь пространственной ориентацией единичных векторов $\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n}$, вдоль которых происходят колебания осцилляторов. Предположим также, что поглощение фотонов веществом мало. Тогда, используя (1)–(3) и производя в (2) замену $\boldsymbol{r} \to |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|, \theta_r \to \theta_{nl_m}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}} \to \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n}, \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_{nl_m}, \theta_{\mathrm{v}} \to \theta_{\mathrm{v}nl_m}, \gamma(1-g)/2c \to \gamma(1-g_{nl_m})/2c$, для векторного потенциала рассеянного веществом ансамбля фотонов получаем

$$\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)} = \sum_{n=1}^{N} \overline{\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{r}, t)}. \tag{4}$$

Здесь

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l_m}^{L_m} \boldsymbol{A}_{nml_m}(\boldsymbol{r}, t);$$

$$\boldsymbol{A}_{nml_m}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{3}{2\pi^2} \Omega_1 \gamma\, \boldsymbol{u}_{nl_m} \sin\theta_{\mathrm{v}nl_m}$$

$$\times \mathrm{kei}\left(\frac{\gamma}{2c}(1 - g_{nl_m})|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|\theta_{nl_m}\right)$$

$$\times \int_0^{\bar{t}_n} d\tau\, \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n} \boldsymbol{A}_{ml_m}(\tau, \boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\rho}_m) \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(\bar{t}_n - \tau)\right]$$

$$\times \cos[\Omega(\bar{t}_n - \tau)]\theta(\bar{t}_n);$$

$\bar{t}_n = t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|/c + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|\theta_{nl_m}^2/2c - z_n/c - t_{l_m} > 0$; черта сверху означает усреднение по моментам времени t_{l_m} и местоположению векторов $\boldsymbol{\rho}_m$, а также по пространственным переменным $\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n}, \theta_{\mathrm{v}nl_m}$ и т.д. Усреднение в (4) по моментам времени $\{t_{l_m}\}$ будем производить с плотностью распределения [3]

$$P(t_{l_m}) = \frac{\alpha l_m C_{L_m}^{l_m}}{T} \left(\frac{t_{l_m}}{T}\right)^{\alpha l_m - 1} \left[1 - \left(\frac{t_{l_m}}{T}\right)^{\alpha}\right]^{L_m - l_m},$$

где $0 < t_{l_m} < T;\ T \to \infty;\ 0 \leqslant l_m \leqslant L_m;\ L_m \to \infty;$

$$C_{L_m}^{l_m} = \frac{L_m!}{(L_m - l_m)!\,l_m!};$$

$$\alpha = \alpha(n_{\mathrm{ph}}) = -\frac{n_0}{2n_{\mathrm{ph}}} + \left[\left(\frac{n_0}{2n_{\mathrm{ph}}}\right)^2 + \frac{n_0}{n_{\mathrm{ph}}}\right]^{1/2} \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$n_0 = \frac{(\Omega_0/c)^3 \gamma_0 (1 - g_0)}{128\pi^2 \Omega_0};$$

$n_{\mathrm{ph}} = j/c$ – средняя объемная плотность фотонов в ансамбле, падающем на вещество; j – плотность потока фотонов; l_m – номер фотона.

Вычислим среднее значение векторного потенциала для ансамбля рассеянных веществом фотонов, а затем вычислим $\overline{\boldsymbol{E}^2}$, которое определяет интенсивность рассеянного излучения ($\boldsymbol{E} = -(1/c)(\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$).

Учтем, что поскольку $r \to \infty$ и векторы $\boldsymbol{e}_{knl_m}$ и $\boldsymbol{e}_r$ существенно различаются ($\boldsymbol{e}_r$ – единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{r}$), то выражение (4) при усреднении будет стремиться к нулю. Отличный от нуля результат возможен лишь при $\boldsymbol{e}_{knl_m} \approx \boldsymbol{e}_r$. В этом случае будут иметь место соотношения

$$\boldsymbol{u}_{nl_m} = \frac{\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n} - \boldsymbol{e}_{knl_m}(\boldsymbol{e}_{knl_m}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})}{\left[1 - (\boldsymbol{e}_{knl_m}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})^2\right]^{1/2}} \approx \frac{\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n} - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})}{\left[1 - (\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})^2\right]^{1/2}},$$

$$\sin\theta_{\mathrm{v}nl_m} = \boldsymbol{u}_{nl_m}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n} \approx \left[1 - (\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})^2\right]^{1/2} \approx \sin\theta_{\mathrm{v}n}, \tag{5}$$

$$\sin\theta_{nl_m} \approx \theta_{nl_m} \approx \left[2(1 - \boldsymbol{e}_{knl_m}\boldsymbol{e}_r)\right]^{1/2},$$

где $\boldsymbol{e}_{knl_m}$ – единичный вектор вдоль волнового вектора $\boldsymbol{k}_{nl_m}$, определяющего направление движения l_m-го фотона, рассеянного n-й частицей вещества.

Будем считать, что рассеивающий слой вещества представляет собой твердый раствор одинаковых частиц, случайным образом расположенных в пространстве. Последнее обстоятельство позволяет усреднять выражения (4) по направлениям волновых векторов рассеиваемых фотонов с равномерной плотностью вероятности

$$p(\varphi_{nl_m},\ \theta_{nl_m}) = 1/4\pi. \tag{6}$$

Проведем вычисление $\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}$, полагая, что $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n| \approx r - \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{r}_n$. Учитывая выражение для плотности распределения $P(t_{l_m})$ (см. выше), выражения (5), (6) и принимая во внимание то, что в (4) при усреднении по углам θ_{nl_m} основной вклад вносят углы, при которых выполняются неравенства $\gamma r\theta_{nl_m}^2,\ \gamma r_n\theta_{nl_m}^2 \ll 1$, получаем

$$\overline{\boldsymbol{A}(r, t)} = -\frac{3}{4}|\boldsymbol{A}_0| \frac{\gamma\Omega_0 c n_{\mathrm{s}}}{r} \int_0^T \mathrm{d}t_{l_m} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{v}n} \sin\theta_{\mathrm{v}n}$$

$$\times [\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n} - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n})](\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}n}\boldsymbol{e}_x) \int_{V_{\mathrm{s}}} \mathrm{d}^3 r_n J(t_{l_m}, r_n, \theta_{\mathrm{v}n}), \tag{7}$$

где явное выражение для $J(t_{l_m}, r_n, \theta_{\mathrm{v}n})$ приведено в Приложении 1.

Проанализируем полученный результат. Прежде всего отметим, что интерес представляют лишь те значения r, при которых

$$r/r_{\mathrm{c}},\ r/r_{\mathrm{c}0} \ll 1, \tag{8}$$

где $r_{\mathrm{c}} = 8c\Omega/\gamma^2 \approx r_{\mathrm{c}n}(\omega = \Omega); r_{\mathrm{c}0} = 8c\Omega_0/\gamma^2 \approx r_{\mathrm{c}n}(\omega = \Omega_0)$. Именно в этой области значений, как следует из (7), вектор $\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}$ обратно пропорционален r. Отметим, например, что для характерных для оптики значений

Ω, $\Omega_0 \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, γ, $\gamma_0 \sim 10^8$ с$^{-1}$ параметры $r_{\rm c}$, $r_{\rm c0}$ настолько велики, что неравенства (7) имеют место при всех представляющих интерес r.

Условия, накладываемые на радиус r, при которых вектор $\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}$ обратно пропорционален ему, будут более точными, если принять во внимание результаты [3], а также учесть поведение при $x = r/r_{\rm c\it n} \ll 1$ асимптотик функций ${\rm ci}(x) \approx \ln x$ и ${\rm si}(x) - {\rm si}(-x) \approx 2x$. Эти условия имеют вид

$$\frac{c}{\gamma} \ll r \ll \frac{r_{\rm c}}{\ln(r_{\rm c}/r)},$$
$$\frac{c}{\gamma_0} \ll r \ll \frac{r_{\rm c0}}{\ln(r_{\rm c0}/r)}. \quad (9)$$

Отметим, что в рамках принятой модели при условиях, обратных условиям (8), (9), вектор $\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}$, как это следует из (7), обратно пропорционален r^2.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь ситуации, соответствующие условиям (9). Полагая для простоты, что $R_{\rm s}$, $h_{\rm s} \ll c/\Omega$ и $R_{\rm s}, h_{\rm s} \ll c/\Omega_0$, вычислим с помощью (7)

$$\overline{\boldsymbol{E}(r,t)} = \frac{1}{r}\gamma\, cN|E_0|[\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)]\alpha\left(\frac{n_{\rm ph}}{2n_0}\right)^{1/2}$$
$$\times\left\{\frac{1}{\Omega}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\,\bar{t}\right)\left[\left[\frac{\Omega_0-\Omega}{(\Omega_0-\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega_0+\Omega}{(\Omega_0+\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right]\sin\Omega\bar{t}$$
$$+\left[\frac{[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2}{(\Omega_0-\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2}{(\Omega_0+\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right]\cos\Omega\bar{t}\right] \quad (10)$$
$$-\frac{1}{\Omega_0}\exp\left[-\frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\bar{t}\right]\left[\left[\frac{\Omega_0-\Omega}{(\Omega_0-\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega_0+\Omega}{(\Omega_0+\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right]\sin\Omega_0\bar{t}$$
$$+\left[\frac{[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2}{(\Omega_0-\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2}{(\Omega_0+\Omega)^2+[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]^2/4}\right]\cos\Omega\bar{t}\right]\right\},$$

где $|\boldsymbol{E}_0| = (8\pi\hbar\,\Omega_0 n_{\rm ph})^{1/2}$; $\bar{t} = t - r/c - T$; $T = (1/v_0)E[v_0(t - r/c)]$; E – целая часть числа; $1/v_0 = {}^1/_4\pi c n_{\rm ph} s_0\alpha$ – средний временной интервал между двумя ближайшими по времени моментами пересечения фотонами участка в плоскости xy площадью

$$s_0 = S\Big/\lim_{\{L_m\},T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}(L_m/T)\Big/\lim_{\{L_m\},T\to\infty}(L_m/T).$$

Параметр $1/s_0$ определяет в плоскости xy порядок величины поверхностной плотности фотонов в их ансамбле, падающем на вещество.

С целью получения выражений для амплитуд рассеяния электромагнитной волны рассмотрим выражение (10) в классической ситуации, т. е. при $\alpha \approx (n_0/n_{\rm ph})^{1/2} \ll 1$ [3]. Кроме того, будем считать, что выполняется неравенство

$$\gamma_0 \ll v_0 \ll \Omega_0, \quad \gamma \ll v_0 \ll \Omega. \quad (11)$$

В выражении (10) слагаемое, содержащее множитель $\exp(-\gamma/2\bar{t})$, представляет собой расходящуюся электромагнитную волну, обусловленную неупругим рассеянием исходного электромагнитного излучения. Слагаемое, содержащее множитель $\exp[(-\gamma_0/2)(1-g_0)\bar{t}]$, представляет собой расходящуюся электромагнитную волну, связанную с упругим рассеянием первоначально падающей на вещество электромагнитной волны.

Пусть частотный диапазон определяется неравенствами

$$|\gamma-\gamma_0(1-g_0)|\Omega_0 \ll \Omega_0^2 \ll \Omega^2. \quad (12)$$

В этом случае из формулы (10) с учетом условия $\alpha \approx (n_0/n_{\rm ph})^{1/2} \ll 1$ и неравенства (11) для амплитуды неупругого рассеяния имеем

$$A_{\rm u} = \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{\rm e} N(\Omega_0/\Omega)|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|, \quad (13)$$

где $r_{\rm e} = e^2/mc^2$ – радиус Томсона; m – масса электрона; $\Omega, \Omega_0 \neq 0$.

Для рассматриваемого частотного диапазона амплитуда упругого рассеяния

$$A_{\rm e} = \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{\rm e} N|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|. \quad (14)$$

Для рассматриваемой модели при выполнении условия (12) выражение (14) не зависит ни от частоты фотона Ω_0, ни от частоты осциллятора Ω [1, 4]. Далее для частотного диапазона

$$\Omega_0 \gg \Omega \gg \gamma, \gamma_0, \quad (15)$$

$$A_{\rm u} = \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{\rm e} N(\Omega/\Omega_0)|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|,$$
$$A_{\rm e} = \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{\rm e} N(\Omega/\Omega_0)^2|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|. \quad (16)$$

Отметим, что в рамках принятой модели амплитуды рассеяния (16), определяемые частотным диапазоном (15), убывают с ростом энергии фотонов $\hbar\Omega_0$, что в известной мере коррелирует с поведением амплитуд рассеяния таких быстрых частиц, как электроны и атомы [5].

Наконец, рассмотрим случай резонанса, когда соответствующие результаты отличаются от результатов [1, 2], полученных в рамках приближения, в котором электромагнитное поле фотона считается плоской, неограниченной в пространстве волной. Отличие, в частности, состоит в том, что в «резонансных» знаменателях формулы (9) стоит разность $[\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2$, в то время как в аналогичных знаменателях соответствующих формул из [1, 2] – $\gamma/2$.

Более радикальное отличие от известных результатов [1, 2] имеет место для амплитуды рассеяния (сечения рассеяния) электромагнитного излучения в резонансе, который определяется условием

$$|\Omega_0 - \Omega| \ll \nu_0. \tag{17}$$

Учитывая неравенства (11), из которых следует, что в (10)

$$|\Omega_0 - \Omega|\bar{t} = \{\nu_0(t - r/c) - E[\nu_0(t - r/c)]\}|\Omega_0 - \Omega|/\nu_0,$$

$$\gamma\bar{t} = \{\nu_0(t - r/c) - E[\nu_0(t - r/c)]\}\gamma/\nu_0,$$

$$\gamma_0\bar{t} = \{\nu_0(t - r/c) - E[\nu_0(t - r/c)]\}\gamma_0/\nu_0$$

малы, и производя в (10) соответствующие разложения по этим величинам, получаем

$$\overline{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)} = \frac{\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{E}_0|\frac{r_\mathrm{e}}{r}N[\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)]\Omega\bar{t}\cos\Omega\,\bar{t}. \tag{18}$$

Поскольку из (16) следует, что амплитуда рассеяния в резонансе $A_\mathrm{res}(t) = (\sqrt{2}/3)r_\mathrm{e}N\,\Omega\,\bar{t}\,[\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)]$ является периодической функцией с периодом $1/\nu_0$, определим A_res в следующем виде:

$$A_\mathrm{res} = \frac{\sqrt{2}}{3}r_\mathrm{e}N\,\Omega\,|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|\langle\bar{t}^2\rangle^{1/2}, \tag{19}$$

где

$$\langle\bar{t}^2\rangle = \nu_0\int_0^{1/\nu_0} t^2\mathrm{d}t = 1/3\nu_0^2.$$

Наконец, принимая во внимание приведенные выше выражения для α и ν_0, а также учитывая то, что $(n_0/n_\mathrm{ph})^{1/2} \ll 1$, из (19) получаем

$$A_\mathrm{res} = \frac{\sqrt{2}}{288}\frac{c}{\Omega}\frac{1}{s_0}\left[\frac{r_\mathrm{e}}{(1 - g_0)n_\mathrm{ph}}\right]^{1/2}|\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)|.$$

Обратим внимание на то, что условие, обратное неравенству (17), является критерием возможности разделения электромагнитного излучения по частотам неупругого и упругого рассеяния.

3. Сечения рассеяния ансамбля фотонов

Вычислим с помощью выражения, которое стоит под знаком усреднения в (4), величину $\overline{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}, t)}$, непосредственно связанную с экспериментально измеряемой интенсивностью рассеянного электромагнитного излучения

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{n,m,l_m}\boldsymbol{E}_{nml_m}(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{E}_{nml_m}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}_{nml_m}}{\partial t}.$$

При тех же предположениях, при которых получено выражение (10), и полагая в (7) $g_n \ll 1$, получаем

$$\overline{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}, t)} = I_1(r, t) + I_2(r, t) + I_3(r, t). \tag{20}$$

Здесь

$$I_1(r, t) = \lim_{\{L_m\}, T\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\overline{\boldsymbol{E}_{nml_m}(r, t)}\right)^2 = \left(\overline{\boldsymbol{E}(r, t)}\right)^2,$$

$\overline{\boldsymbol{E}(r, t)}$ дается выражением (10);

$$I_2(r, t) = \lim_{\{L_m\}, T\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\overline{\boldsymbol{E}^2_{nml_m}}(r, t);$$

$$I_3(r, t) = \lim_{\{L_m\}, T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\left(\left\langle\left\langle\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{E}_{nml_m}\right\rangle_n^2\right\rangle_{ml_m} - \left\langle\sum_{n=1}^{N}\langle\boldsymbol{E}_{nml_m}\rangle_n^2\right\rangle_{ml_m}\right);$$

скобки $\langle\ldots\rangle_n$ означают усреднение по всем случайным переменным, содержащим индекс n; скобки $\langle\ldots\rangle_{ml_m}$ означают усреднение по всем случайным величинам, входящим в выражение для вектора $\boldsymbol{E}_{nml_m}$, которые содержат только индексы m, l_m; I_1, I_2, I_3 считаются усредненными по периодам высокочастотных колебаний 2Ω, $2\Omega_0$, $\Omega_0 + \Omega$. Ввиду громоздкости выражений для I_1, I_2, I_3 их явный вид приведен в Приложении 2.

Усреднив $\boldsymbol{E}^2/4\pi = \hbar\Omega_0 n_\mathrm{ph}\exp[-\gamma_0(1 - g_0)(t - z/c - T)]$ [3] и выражение (18) по периоду колебаний $1/\nu_0$, получим интенсивность излучения, рассеянного веществом в единичный телесный угол ω_s:

$$\overline{\boldsymbol{E}^2}r^2 = \boldsymbol{E}_0^2\sigma'\frac{\{1 - \exp[-\gamma_0(1 - g_0)/\nu_0]\}}{\gamma_0(1 - g_0)/\nu_0}. \tag{21}$$

Здесь $\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\omega_\mathrm{s}$ – сечение рассеяния потока фотонов в единичный телесный угол; σ'_1, σ'_2 и σ'_3 соответствуют I_1, I_2 и I_3 .

Для простоты изложения приведем выражения для $\sigma'_{1,2,3}$ лишь для двух типичных случаев, определяемых неравенствами

$$\gamma, \gamma_0 \ll \nu_0, \tag{22}$$

$$\gamma, \gamma_0 \gg \nu_0. \tag{23}$$

При этом полагаем выполненным неравенство

$$\gamma, \gamma_0, \nu_0 \ll \Omega_0, \Omega.$$

Рассмотрим сначала случай, далекий от резонанса, т. е. будем считать выполненным неравенство, обратное (17). Тогда

$$\sigma' = \sigma'_{1\mathrm{u}} + \sigma'_{2\mathrm{u}} + \sigma'_{3\mathrm{u}} + \sigma'_{1\mathrm{e}} + \sigma'_{2\mathrm{e}} + \sigma'_{3\mathrm{e}}, \tag{24}$$

где $\sigma'_{1\mathrm{u},2\mathrm{u},3\mathrm{u}}$ – составляющие сечения σ'_u неупругого рассеяния (вторичного свечения) в единичный телесный угол, а $\sigma'_{1\mathrm{e},2\mathrm{e},3\mathrm{e},}$– составляющие сечения σ'_e упругого рассеяния в единичный телесный угол.

Пусть выполняются условия (12), (22), а также

$$|\Omega - \Omega_0| \gg \gamma, \gamma_0, \nu_0. \tag{25}$$

В этом случае для слагаемых в (24) имеем

$$\sigma'_{1\mathrm{u}} = \frac{4}{9}r_\mathrm{e}^2N^2(\Omega_0/\Omega)^2[1 - (\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha^2 n_\mathrm{ph}/n_0,$$

$$\sigma'_{2\mathrm{u}} = \frac{2}{5}N\left(c\Omega_0/\Omega^2\right)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha m(1-g_0)/m_0,$$

$$\sigma'_{3\mathrm{u}} = \frac{4}{9}N(N-1)r_{\mathrm{e}}(\Omega_0/\Omega)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha m(1-g_0)/m_0, \tag{26}$$

$$\sigma'_{1\mathrm{e}} = \frac{4}{9}N^2 r_{\mathrm{e}}[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha^2 n_{\mathrm{ph}}/n_0,$$

$$\sigma'_{2\mathrm{e}} = \frac{8}{5}N(c\Omega_0/\Omega^2)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha,$$

$$\sigma'_{3\mathrm{e}} = \frac{4}{9}N(N-1)r_{\mathrm{e}}^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\,\alpha.$$

Поскольку $\alpha^2 n_{\mathrm{ph}}/n_0+\alpha=1$ [3], величина $\sigma'_{1\mathrm{e}}+\sigma'_{3\mathrm{e}} = {}^4/_9 N(N-\alpha)r_{\mathrm{e}}^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]$ и не зависит от частот Ω, Ω_0, а также от плотности потока фотонов $j = c\,n_{\mathrm{ph}}$ в области квазиклассичности, где $\alpha \ll 1$. Если выполняются условия (15), (22) и (25), то

$$\sigma'_{1\mathrm{u}} = \frac{4}{9}N^2 r_{\mathrm{e}}(\Omega/\Omega_0)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha^2 n_{\mathrm{ph}}/n_0,$$

$$\sigma'_{2\mathrm{u}} = \frac{8}{5}N\left(c/\Omega_0\right)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha m(1-g_0)/m_0,$$

$$\sigma'_{3\mathrm{u}} = \frac{4}{9}N(N-1)r_{\mathrm{e}}^2(\Omega/\Omega_0)^4[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha, \tag{27}$$

$$\sigma'_{1\mathrm{e}} = \frac{4}{9}N^2 r_{\mathrm{e}}^2(\Omega/\Omega_0)^4\left[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha^2 n_{\mathrm{ph}}/n_0,$$

$$\sigma'_{2\mathrm{e}} = \frac{8}{5}N(c/\Omega_0)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha,$$

$$\sigma'_{3\mathrm{e}} = \frac{4}{9}N(N-1)r_{\mathrm{e}}^2(\Omega/\Omega_0)^4\left[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha.$$

Отметим, что $\sigma'_{1\mathrm{e}}+\sigma'_{3\mathrm{e}} = {}^4/_9 N(N-\alpha)\,r_{\mathrm{e}}^2(\Omega/\Omega_0)^4[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]$. При выполнении условий (12), (23) и (25) в выражении (24) следует произвести замену

$$\sigma'_{1\mathrm{u}} \to \frac{\gamma_0(1-g_0)}{\gamma}\sigma'_{1\mathrm{u}},\;\; \sigma'_{2\mathrm{u}} \to \frac{\gamma_0(1-g_0)}{\gamma}\sigma'_{2\mathrm{u}}, \tag{28}$$

$$\sigma'_{3\mathrm{u}} \to \frac{\gamma_0(1-g_0)}{\gamma}\sigma'_{3\mathrm{u}},\;\; \sigma'_{1\mathrm{e}} \to \sigma'_{1\mathrm{e}},\;\; \sigma'_{2\mathrm{e}} \to \sigma'_{2\mathrm{e}},\;\; \sigma'_{3\mathrm{e}} \to \sigma'_{3\mathrm{e}}.$$

При этом $\sigma'_{1\mathrm{u},2\mathrm{u},3\mathrm{u}}$ и $\sigma'_{1\mathrm{e},2\mathrm{e},3\mathrm{e}}$ даются выражениями (26). При выполнении условий (15), (23) и (25) замена в (24) должна быть аналогичной произведенной в (28), однако теперь $\sigma'_{1\mathrm{u},2\mathrm{u},3\mathrm{u}}$ и $\sigma'_{1\mathrm{e},2\mathrm{e},3\mathrm{e}}$ даются выражениями (27).

Наконец, рассмотрим случай резонанса и приведем выражения для слагаемых, входящих в формулу для $\sigma' = \sigma'_{\mathrm{res}}$ в (21), где

$$\sigma'_{\mathrm{res}} = \sigma'_{1\mathrm{res}}+\sigma'_{2\mathrm{res}}+\sigma'_{3\mathrm{res}} \tag{29}$$

и где, очевидно, уже нет деления на неупругое и упругое рассеяние и каждое слагаемое в (29) отвечает соответствующему слагаемому в (20).

Если выполнено условие (22) и $\Omega_0 \to \Omega$, то

$$\sigma'_{1\mathrm{res}} = \frac{1}{6}N^2(c\gamma/v_0\Omega)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha^2 n_{\mathrm{ph}}/n_0,$$

$$\sigma'_{2\mathrm{res}} = \frac{16}{5}N(c/\gamma)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha\Big/\left[1+\frac{\gamma_0}{\gamma}(1-g_0)\right], \tag{30}$$

$$\sigma'_{3\mathrm{res}} = 2N(N-1)(c/\Omega)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha\Big/\left[1+\frac{\gamma_0}{\gamma}(1-g_0)\right].$$

При выполнении условия (23) и $\Omega_0 \to \Omega$

$$\sigma'_{1\mathrm{res}} = 2N^2(c/\Omega)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha^2(n_{\mathrm{ph}}/n_0)\gamma/[\gamma+\gamma_0(1-g_0)],$$

$$\sigma'_{2\mathrm{res}} = \frac{16}{5}N(c/\gamma)^2\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\alpha\Big[3+25\gamma_0(1-g_0)/\gamma$$
$$-11(\gamma_0/\gamma)^2(1-g_0)^2+(\gamma_0/\gamma)^3(1-g_0)^3\Big]$$
$$\times\gamma_0(1-g_0)/\gamma[1+\gamma_0(1-g_0)/\gamma]^4, \tag{31}$$

$$\sigma'_{3\mathrm{res}} = 2N(N-1)(c/\Omega)^2[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2]\alpha\big[3+25\gamma_0(1-g_0)/\gamma$$
$$-11(\gamma_0/\gamma)^2(1-g_0)^2+(\gamma_0/\gamma)^3(1-g_0)^3\big]$$
$$\times\gamma_0(1-g_0)/\gamma[1+\gamma_0(1-g_0)/\gamma]^4.$$

Прежде всего выясним, в каких из рассмотренных случаев (26)–(31) для рассеянного электромагнитного поля может реализовываться классическая ситуация, соответствующая, как отмечалось в [3], условию $\overline{\boldsymbol{E}^2}-\overline{\boldsymbol{E}}^2 \ll \overline{\boldsymbol{E}}^2$ или, с учетом (19), неравенствам $\sigma'_1 \gg \sigma'_2, \sigma'_3$.

Принимая во внимание условия вывода выражения (10) и выражений для n_0, γ (см. выше (1) и (13)), можно представить неравенства, обеспечивающие классичность рассеянного электромагнитного поля в ситуации, когда реализуются формулы (26), (28), в виде

$$n_{\mathrm{s}}(c/\Omega_0)^3, n_{\mathrm{s}}(c/\Omega)^3 \gg N \gg (\Omega_0/\Omega)^2 m/8\sqrt{2}\pi m_0(r_{\mathrm{e}}^3 n_{\mathrm{ph}})^{1/2}, \tag{32}$$
$$n_{\mathrm{s}}(c/\Omega_0)^3, n_{\mathrm{s}}(c/\Omega)^3 \gg N \gg (\Omega_0/\Omega)^4/8\sqrt{2}\pi(r_{\mathrm{e}}^3 n_{\mathrm{ph}})^{1/2},$$

где согласно (12) $\Omega >> \Omega_0$. Первое неравенство (32) обеспечивает условия квазиклассичности для неупругого рассеянного электромагнитного поля, а второе – для упругого рассеянного электромагнитного поля. Очевидно, что, несмотря на малость $r_{\mathrm{e}} \sim 10^{-13}$ см, неравенства (32) могут выполняться при физически разумных значениях содержащихся в них параметров. Так, например, полагая $n_{\mathrm{s}} \sim 10^{21}-10^{22}$ см$^{-3}$, $\Omega_0 \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, $\Omega \sim 10^{16}$ с$^{-1}$, $m/m_0 \sim 10^{-3}$, видим, что неравенства (32) выполняются при физически разумных значениях $n_{\mathrm{ph}} \sim 10^{16}-10^{18}$ см$^{-3}$. Условия классичности электромагнитного поля для ансамбля параллельно движущихся фотонов существенно менее жесткие, чем для ансамбля рассеянных веществом фотонов [3].

Выражение (19) в случаях, когда применимы формулы (26), (28), вообще говоря, является нелинейной функцией параметра α, который, в свою очередь, нелинейно зависит от плотности потока фотонов $j = c\,n_{\mathrm{ph}}$. Следовательно, интенсивность рассеянного излучения является нелинейной функцией. Указанную нелинейную зависимость (21) от j можно пытаться обнаружить экспериментально. Отметим, что поправки в сечениях рассеяния по интенсивности падающего на вещество излучения отражают факт влияния статистических свойств ансамбля падающих фотонов на процесс рассеяния и не связаны с коллективным рассеянием излучения на частицах-осцилляторах.

В ситуации, соответствующей выражениям (27), формальные условия классичности рассеянного электромагнитного поля имеют вид

$$n_s(c/\Omega_0)^3, n_s(c/\Omega)^3 \gg N \gg (\Omega_0/\Omega)^2 m/8\sqrt{2}\pi m_0(r_e^3 n_{ph})^{1/2},$$
$$n_s(c/\Omega_0)^3, n_s(c/\Omega)^3 \gg N \gg (\Omega_0/\Omega)^4/8\sqrt{2}\pi(r_e^3 n_{ph})^{1/2}, \quad (33)$$

где согласно (15) $\Omega_0 \gg \Omega$. Поскольку $\Omega_0 \gg \Omega$ и $r_e \sim 10^{-13}$ см, то условия (33) могут выполняться лишь при такой большой объемной плотности фотонов n_{ph}, которая является физически невозможной. Это означает, что вместо неравенства $\sigma'_1 \gg \sigma'_2, \sigma'_3$ имеет место неравенство $\sigma'_2 = \sigma'_{2u} + \sigma'_{2e} \gg \sigma'_1 = \sigma'_{1u} + \sigma'_{1e}$, $\sigma'_3 = \sigma'_{3u} + \sigma'_{3e}$, т. е. в случае, соответствующем (27), классичность рассеянного электромагнитного поля невозможна, и при выполнении условий (22) формула (21) имеет вид

$$\overline{E^2} \approx E_0^2(\sigma'_{2u} + \sigma'_{2e}). \quad (34)$$

При выполнении условий (23) имеет место выражение вида (34).

Для резонансной ситуации, когда $\Omega_0 \to \Omega$, справедливы формулы (30), (31), а формальный критерий классичности рассеянного электромагнитного поля имеет следующий вид:

$$n_s(c/\Omega_0)^3, n_s(c/\Omega)^3 \gg N \gg (v_0 c/\Omega^2 r_e)^2/8\sqrt{2}\pi$$
$$\times[1 + m(1-g_0)/m_0](r_e^3 n_{ph})^{1/2} \text{ при } v_0 \gg \gamma, \gamma_0,$$
$$n_s(c/\Omega_0)^3, n_s(c/\Omega)^3 \gg N \gg m/8\sqrt{2}\pi \quad (35)$$
$$\times m_0(1 + m/m_0)^3(r_e^3 n_{ph})^{1/2} \text{ при } v_0 \ll \gamma, \gamma_0.$$

Очевидно, что при физически возможных значениях n_{ph} неравенства (35) выполняться не могут. Следовательно, рассеянное электромагнитное поле не может быть классическим, т. е. вместо неравенства $\sigma'_1 \gg \sigma'_2, \sigma'_3$ имеет место неравенство $\sigma'_{2res} \gg \sigma'_{1res}, \sigma'_{3res}$, которое соответствует

$$\overline{E^2} \approx E_0^2 \sigma'_{2res}. \quad (36)$$

Здесь σ'_{2res} определено в (30), если справедливы неравенства (22). Если же выполняются неравенства (23), то σ'_{2res} из (36) определено в (31). Отметим, что в силу зависимости α и v_0 от n_{ph} выражения (35), (36) являются нелинейными функциями $j = cn_{ph}$.

Таким образом, в рамках принятой модели условия классичности рассеянного веществом электромагнитного поля определяются неравенствами $(n_0/n_{ph})^{1/2} \ll 1$ и (12), а также выражением (32). При этом, как показывают приведенные выше выражения для сечений рассеяния (26), (27), (30), (31), они в существенной мере зависят от параметров $m, m_0, \gamma, \gamma_0, g_0$, определяющих пространственную локализацию электромагнитных полей фотонов.

В заключение отметим, что хотя в настоящей работе частицы вещества моделировались гармоническими осцилляторами, тем не менее вывод о том, что в ряде задач о взаимодействии электромагнитного излучения с веществом необходимо учитывать пространственно-временную локализацию фотонов, носит достаточно общий характер. В этом плане было бы интересно провести эксперименты по проверке полученных теоретических результатов. Очевидно, что это должны быть лазерные спектроскопические эксперименты по исследованию спектральных характеристик рассеяния излучения в области резонанса, описываемых выражениями (19), (30), (31), а также эксперименты по обнаружению в сечениях рассеяния излучения поправок по интенсивности падающего на вещество потока фотонов, не связанных с нелинейными свойствами вещества (см. (26), (27), (30), (31)).

Приложение 1

Параметр $J(t_{l_m}, r_n, \theta_{vn}) =$

$$\Bigg[\Big[I_c\Big(\omega = \Omega, \Gamma = \frac{\gamma}{2}, t_{nl_m}\Big) - I_c\Big(\omega = \Omega_0, \Gamma = \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0), t_{nl_m}\Big)\Big]$$
$$\times(\Omega_0 - \Omega) - \Big[I_s\Big(\omega = \Omega, \Gamma = \frac{\gamma}{2}, t_{nl_m}\Big)$$
$$- I_s\Big(\omega = \Omega_0, \Gamma = \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0), t_{nl_m}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\Big]\Bigg] \Bigg/ \Bigg[(\Omega_0 - \Omega)^2 + \Big[\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\Big]^2\Bigg]$$
$$+ \Bigg[\Big[I_c\Big(\omega = \Omega, \Gamma = \frac{\gamma}{2}, t_{nl_m}\Big) - I_c\Big(\omega = \Omega_0, \Gamma = \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0) t_{nl_m}\Big)\Big]$$
$$\times(\Omega_0 + \Omega) + \Big[I_s\Big(\omega = \Omega, \Gamma = \frac{\gamma}{2}, t_{nl_m}\Big)$$
$$+ I_s\Big(\omega = \Omega_0, \Gamma = \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0), t_{nl_m}\Big)\Big]$$
$$\times\Big[\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\Big]\Bigg] \Bigg/ \Bigg[(\Omega_0 - \Omega)^2 - \Big[\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\Big]^2\Bigg].$$

Здесь $A_0 = 32\pi^2 B_0 c^3 \alpha n_{ph}/\gamma_0^2(1-g_0)^2\Omega_0$; $B_0 = e_x[\gamma_0^3(1-g_0)^3\hbar/\pi c\Omega_0]^{1/2}$; $n_s = N/V_s$ – плотность рассеивающих фотоны частиц вещества объемом V_s; T определяется после выполнения всех интегрирований в (7) так же, как и в [3];

$$I_c(\omega, \Gamma, t_{nl_m}) = -\frac{1}{\omega} e^{-\Gamma t_{nl_m}} \Big\{ e^{-r/r_{cn}} \sin(\omega t_{nl_m}) - \frac{1}{\pi}\cos(\omega t_{nl_m})$$
$$\times[-\sinh(r/r_{cn})[\mathrm{ci}(-\mathrm{i}r/r_{cn}) + \mathrm{ci}(\mathrm{i}r/r_{cn})] + \mathrm{i}\cosh(r/r_{cn})$$
$$\times[\mathrm{si}(-\mathrm{i}r/r_{cn}) - \mathrm{si}(\mathrm{i}r/r_{cn})]]\Big\};$$

$$I_s(\omega, \Gamma, t_{nl_m}) = \frac{1}{\omega} e^{-\Gamma t_{nl_m}} \Big\{ e^{-r/r_{cn}} \cos(\omega t_{nl_m}) + \frac{1}{\pi}\sin(\omega t_{nl_m})$$
$$\times[-\sinh(r/r_{cn})[\mathrm{ci}(-\mathrm{i}r/r_{cn}) + \mathrm{ci}(\mathrm{i}r/r_{cn})] + \mathrm{i}\cosh(r/r_{cn})$$
$$\times[\mathrm{si}(-\mathrm{i}r/r_{cn}) - \mathrm{si}(\mathrm{i}r/r_{cn})]]\Big\};$$

$$t_{nl_m} = t - r/c + \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{r}_n/c - \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{r}_n - t_{l_m};$$

$$r_{cn} = r_{cn}(\omega) = 8c\omega/\gamma^2(1-g_n)^2;\ g_n = \frac{3}{8\pi}\Omega_1\sin^2\theta_{vn}.$$

Приложение 2

Параметр

$$I_1(r,t) = N^2\boldsymbol{E}_0^2\gamma^2c^2\left[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\left(\alpha^2 n_{\rm ph}/4n_0\Omega_0^2r^2\right)$$

$$\times\Big[(\Omega_0/\Omega)^2 e^{\gamma\bar{t}}i_{\rm u}\big(\omega=-\Delta\Omega,\,\Gamma\big) + e^{-(\gamma-2\Gamma)\bar{t}}i_{\rm e}(\omega=\Delta\Omega,\Gamma)$$

$$-2\big(\Omega_0/\Omega\big)e^{-(\gamma-\Gamma)\bar{t}}\,i_r(\omega=-\Delta\Omega,\Gamma)\cos(\Delta\Omega\bar{t})\Big].$$

Здесь

$$i_{\rm u}(\omega,\Gamma) = \left[\frac{-\omega}{\omega^2+\Gamma^2}+\frac{\Omega+\Omega_0}{(\Omega+\Omega_0)+\Gamma^2}\right]^2+\frac{\Gamma^2}{\left(\omega^2+\Gamma^2\right)^2};$$

$$\Delta\,\Omega = \Omega-\Omega_0;\ \Gamma = [\gamma-\gamma_0(1-g_0)]/2;\ \ \bar{t} = t-r/c-T;$$

$$i_{\rm e}(\omega,\Gamma) = i_{\rm u}(\omega,\Gamma);\ \ i_r(\omega,\Gamma) = 1/(\omega^2+\Gamma^2).$$

Параметр

$$I_2(r,t) = \frac{2}{5}\boldsymbol{E}_0^2N\left[1-\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\left(\alpha c^2/r^2\right)$$

$$\times\Big\{(\Omega/\Omega_0)^2e^{-\gamma\bar{t}}i_{\rm u}(\omega=-\Delta\Omega,\,\Gamma)[(\gamma-2\Gamma)/\gamma]$$

$$+e^{-(\gamma-2\Gamma)\bar{t}}\,i_{\rm e}(\omega=-\Delta\Omega,\Gamma)$$

$$-4(\Omega/\Omega_0)^2e^{-(\gamma-\Gamma)\bar{t}}i_{\rm r}(\omega=-\Delta\Omega,\,\Gamma)$$

$$\times\Big[(\gamma-\Gamma)(\gamma-2\Gamma)/\big(\Delta\Omega^2+(\gamma-\Gamma)^2\big)\Big](\pi\Omega r/\Delta\Omega r_{\rm c})^{1/2}$$

$$\times\left[\cos(2\Omega r/\Delta\Omega r_{\rm c})\left[\frac{1}{2}-S(2\Omega r/\Delta\Omega r_{\rm c})^{1/2}\right]\right.$$

$$\left.-\sin(2\Omega r/\Delta\Omega r_{\rm c})\left[\frac{1}{2}-C(2\Omega r/\Delta\Omega r_{\rm c})^{1/2}\right]\cos(\Delta\Omega\bar{t})\right]\Big\},$$

где

$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\sin t^2{\rm d}t,\quad C(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\cos t^2{\rm d}t$$

– интегралы Френеля; остальные обозначения имеют прежний смысл (см. выше и (7), (10)).

Параметр

$$I_3(r,t) = N(N-1)\boldsymbol{E}_0^2\gamma^2c^2\left[1-(\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_x)^2\right]\left(\alpha/4\Omega_0^2r^2\right)$$

$$\times\Big[e^{-\gamma\bar{t}}i_{\rm u}(\omega=-\Delta\Omega,\Gamma)+e^{-(\gamma-2\Gamma)\bar{t}}i_{\rm e}(\omega=-\Delta\Omega,\,\Gamma)$$

$$-e^{-(\gamma-\Gamma)\bar{t}}i_r(\omega=-\Delta\Omega,\Gamma)$$

$$\times\Big[(\gamma-\Gamma)(\gamma-2\Gamma)/\big(\Delta\Omega^2+(\gamma-\Gamma)^2\big)\Big]\cos(\Delta\Omega\,\bar{t})\Big].$$

При получении выражений для $I_1(r,t), I_2(r,t), I_3(r,t)$ были отброшены слагаемые, малые в силу неравенств (11).

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика* (М., Наука, 1969, с.190).
2. Гайтлер В. *Квантовая теория излучения* (М. – Л., Гостехиздат, 1941).
3. Макшанцев Б.И., Макшанцев В.Б. *Квантовая электроника* **31**, (№713) (2001).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М., Физматгиз, 1962, с.266 – 269).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М., Физматгиз, 1963, с.554 – 561).