ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

PACS 42.50.Ct; 14.70.Bh

Векторный потенциал электромагнитного поля фотона

Б.И.Макшанцев, В.Б.Макшанцев

Найдено решение уравнения Даламбера для векторного потенциала электромагнитного поля в виде нерасплывающегося во времени и в пространстве волнового пакета. Полученное для векторного потенциала фотона выражение используется для решения ряда задач.

Ключевые слова: *векторный потенциал, взаимодействие излучения с веществом.*

1. Введение

Во многих экспериментах, связанных с исследованием процессов взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, потоки излучения могут соответствовать такой плотности фотонов $n_{\rm ph} \sim w/Sc\hbar\Omega$, что векторный потенциал этого излучения, необходимый для теоретических расчетов ряда экспериментально измеряемых величин, не может считаться классическим [1]. Здесь w – мощность электромагнитного излучения, S – площадь поперечного сечения потока фотонов, c – скорость света в вакууме, Ω – частота фотона.

Критерий классичности для поля с напряженностью $\boldsymbol{E}$ и характерного интервала времени Δt имеет вид [1]

$$\left(\overline{\boldsymbol{E}^2}\right)^{1/2} \gg \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(c\Delta t)^2} \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(c/\Omega)^2}.$$

Так, например, при использовании гелий-неонового лазера (энергия фотона $\hbar\Omega \sim 1$ эВ, $w \sim 10^{-3}$ Вт, $S \sim 0.01$ см^2) $n_{\rm ph} \sim 10^7$ см$^{-3}$, что явно недостаточно для выполнения критерия классичности, т. к. $(\hbar c)^{1/2}(c/\Omega)^{-2} \sim 0.01$ В/м. Аналогичная ситуация имеет место в экспериментах с рентгеновскими лучами [2]: при $\hbar\Omega \sim 10^4$ эВ и $w/S \sim 10^{-7}$ Вт/см^2 $(\overline{\boldsymbol{E}^2})^{1/2} \sim (\hbar\Omega n_{\rm ph})^{1/2} \sim 10^{-6}$ В/м значительно меньше $(\hbar c)^{1/2}(c/\Omega)^{-2} \sim 10^6$ В/м.

Итак, в реальной ситуации встречаются случаи взаимодействия с веществом электромагнитного излучения достаточно малой интенсивности, когда по существу следует рассматривать взаимодействие одной частицы вещества с одним фотоном. При этом, с одной стороны, векторный потенциал фотона нельзя считать квазиклассическим, а с другой – фотон нельзя рассматривать в виде плоской волны, локализованной во всем пространстве, поскольку в некоторых задачах это приводит, как будет показано ниже, к физически бессмысленным результатам.

В связи с этим представляется интересным рассмотреть, хотя бы в рамках простой модели, задачу о вычислении векторного потенциала электромагнитного поля для одного фотона. Соответствующий результат для ансамбля фотонов будет представлять собой сумму векторов электромагнитных полей для отдельных фотонов.

В исследуемой модели частица вещества рассматривается как нерелятивистский одномерный гармонический осциллятор. Для решения поставленной задачи нами получено выражение для векторного потенциала единичного внешнего фотона $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}, t)$. Векторный потенциал удовлетворяет уравнению Даламбера и описывает распространение локализованного однофотонного волнового пакета по некоторой прямой. Естественно, что при этом объемный интеграл по всему пространству от плотности энергии, вычисленной с помощью выражения $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}, t)$, должен быть равен энергии фотона $\hbar\Omega$. Важно отметить, что $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}, t)$ учитывает конечность области локализации фотона, размер которой не может быть меньше длины волны [3].

Полученные в работе результаты могут оказаться полезными при изучении некоторых задач, связанных с когерентностью и статистикой фотонов [4], поскольку позволяют учесть эффекты, обусловленные пространственно-временной локализацией фотонов.

2. Векторный потенциал электромагнитного поля одного фотона

Для вычисления векторного потенциала электромагнитного поля $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}, t)$ одного фотона сначала найдем выражение для векторного потенциала электромагнитного поля $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(\boldsymbol{r}, t)$, возникающего при рассеянии на частице вещества одного фотона.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \tag{1}$$

для системы, гамильтониан которой имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm v} + \hat{H}_{\rm f} + \hat{V}_{\rm f} + \hat{V}_{\rm ph}.$$

Здесь

$$\hat{H}_{\rm v} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{s}^2} + \frac{1}{2}m\tilde{\Omega}^2\tilde{s}^2$$

ВНИИ оптико-физических измерений, Россия, 103031 Москва, ул. Рождественка, 27

Поступила в редакцию 5 февраля 2001 г.

– гамильтониан одномерного нерелятивистского гармонического осциллятора; $m, \tilde{s}, \tilde{\Omega}$ – масса, координата и частота осциллятора соответственно;

$$\hat{H}_{\mathrm{f}} = -\frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha}\tilde{\omega}_{\alpha}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\alpha}^2}+\xi_{\alpha}^2\right)$$

– гамильтониан квантованного электромагнитного поля, где переменные ξ_α формально можно рассматривать как нормальные координаты непрерывно-распределенных осцилляторов, представляющих собой квантованное электромагнитное поле;

$$\hat{V}_{\mathrm{f}} = \frac{e}{mc}\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\sum_{\alpha}\hat{\boldsymbol{A}}_{\alpha}(\tilde{s})\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}$$

– оператор взаимодействия осциллятора с квантованным электромагнитным полем;

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{\alpha}(\tilde{s}) = \left(\frac{2\pi\hbar}{V}\right)^{1/2} c\,\frac{\boldsymbol{e}_{\alpha}}{\tilde{\omega}_{\alpha}^{1/2}}$$

$$\times[\hat{a}_{\alpha}\exp(\mathrm{i}q\boldsymbol{e}_{q}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\tilde{s})+\hat{a}_{\alpha}^{+}\exp(-\mathrm{i}q\boldsymbol{e}_{q}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\tilde{s})];$$

$V(V\to\infty)$ – объем квантованного электромагнитного поля; e – заряд электрона; $\boldsymbol{e}_\alpha$ – единичный вектор поляризации электромагнитной волны, соответствующий индексу $\alpha = \{\boldsymbol{q}, \sigma\}$, который представляет собой совокупность волнового вектора $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_q q$ и двух поляризаций $\sigma = 1, 2$ поперечного электромагнитного поля; $\boldsymbol{e}_q$ – единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{q}$; $\tilde{\omega}_\alpha$ – частота моды α квантованного электромагнитного поля, причем

$$0\leqslant\tilde{\omega}_{\alpha}=\tilde{\omega}_{q}=cq\leqslant cq_{\max}=\tilde{\omega}_{\max};$$

$$\hat{a}_{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_{\alpha}+\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}\right);\quad \hat{a}_{\alpha}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_{\alpha}-\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}\right);$$

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$ – единичный вектор вдоль прямой, по которой движется осциллятор.

Отметим, что в рассматриваемой задаче частота $\tilde{\omega}_\alpha$ неограничена [1], что приводит в квантовой электродинамике к необходимости перенормировок массы и заряда. В нашей нерелятивистской задаче достаточно перенормировать только массу осциллятора, что эквивалентно ограничению спектра частот некоторым $\tilde{\omega}_{\max}$. Оператор

$$\hat{V}_{\mathrm{ph}} = \frac{e}{mc}\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\,\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ph}}(t,\tilde{s})\,\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}$$

является оператором взаимодействия осциллятора с электромагнитным полем одного внешнего фотона. Полагаем, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ph}}(t,\tilde{s})$ параметрически зависит от переменных, характеризующих некую материальную систему в бесконечно удаленной области пространства, в которой возник внешний фотон. Проведем усреднение уравнения (1) по переменным этой системы, считая, что

$$\overline{\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ph}}\Psi} = \overline{\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ph}}}\,\overline{\Psi} = \hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ph}}(t,\tilde{s})\overline{\Psi}.$$

Введем безразмерные величины

$$s=\frac{\tilde{s}}{(\hbar/m\tilde{\Omega})^{1/2}}\ \text{и}\ \omega_{\alpha}=\omega_{q}=\frac{\tilde{\omega}_{\alpha}}{\tilde{\Omega}},$$

где $0\leqslant\omega_\alpha\leqslant\omega_{\max}/\tilde{\Omega}=\overline{\omega}$. Тогда, переходя к новым переменным $\xi_\alpha=\xi_\alpha\omega_\alpha^{-1/2}$ и учитывая, что для дальнейшего существенна лишь область изменения параметров $\omega_\alpha\sim 1$, $s\sim 1$ и что выполняется неравенство $\hbar\tilde{\Omega}/mc^2\ll 1$ (соответствующее длинноволновому приближению), в импульсном представлении для усредненной волновой функции (опустив в ней для простоты черту сверху) имеем

$$\Psi_{\{n_\lambda\}}(t,\{Q_\lambda\})=\prod_{\lambda}\Phi_{n_\lambda}\left[s_{\lambda}^{1/2}(Q_\lambda-\eta_\lambda)\right]$$

$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{1}{\tilde{\Omega}}\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial t}(Q_\lambda-\eta_\lambda)-\tilde{\Omega}\int_{-\infty}^{t}L_\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\right\},\qquad(2)$$

где $\Psi_{\{n_\lambda\}}[s_\lambda^{1/2}(Q_\lambda-\eta_\lambda)]$ – волновая функция гармонического осциллятора;

$$\eta_\lambda(t)=\frac{\tilde{Q}}{s_\lambda}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau X_{0\lambda}f(\tau)\sin\left[\tilde{Q}s_\lambda(t-\tau)\right]$$

и определяется уравнением [5]

$$\frac{1}{\tilde{\Omega}^2}\frac{\partial^2\eta_\lambda}{\partial t^2}+s_\lambda^2\eta_\lambda=X_{0\lambda}f(t);\quad f(t)=\frac{e}{c\left(m\hbar\tilde{\Omega}\right)^{1/2}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(t);$$

$$L_\lambda(t)=\frac{1}{2\tilde{\Omega}^2}\left(\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}s_\lambda^2\eta_\lambda{}^2+X_{0\lambda}f(t)\eta_\lambda(t);$$

символы $\{n_\lambda\}$, $\{Q_\lambda\}$ – совокупности квантовых чисел и нормальных координат, причем [6]

$$Q_\lambda=\sum_\alpha X_{0\lambda}\zeta_\alpha+X_{0\lambda}p,\ p=\sum_\lambda X_{0\lambda}Q_\lambda,\ \zeta_\alpha=\sum_\lambda X_{\alpha\lambda}Q_\lambda;$$

$$X_{0\lambda}^2=1\Big/\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_\lambda},\quad X_{\alpha\lambda}=\frac{\varepsilon_\alpha X_{0\lambda}}{z_\lambda-\omega_\alpha^2};$$

$z_\lambda=s_\lambda^2$ – корни уравнения

$$G(z)=z-1-\frac{\sum_\alpha\varepsilon_\alpha^2}{z_\lambda-\omega_\alpha^2}=0;\ \varepsilon_\alpha=2\left(\frac{\pi}{Vm}\right)^{1/2}\frac{\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{e}_\alpha}{\tilde{\Omega}}.$$

Сначала по квантовым состояниям, определяемым выражением (2), вычислим среднее значение пространственно-временного оператора $\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ векторного потенциала электромагнитного поля:

$$\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mathrm{Sp}\left[\exp\left(-\hat{H}(t\to-\infty)/T_r\right)\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)\right]}{\mathrm{Sp}\left[\exp\left(-\hat{H}(t\to-\infty)/T_r\right)\right]}.\qquad(3)$$

Здесь T_r – температура системы, от которой в силу особенностей модели окончательный результат не зависит;

$$\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r})\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r})=\left(\frac{2\pi\hbar}{V}\right)^{1/2}c\left[\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{\left(\tilde{\Omega}\omega_\alpha\right)^{1/2}}\right]$$

$$\times\left[\hat{a}_\alpha\exp\left(\mathrm{i}\frac{\tilde{\Omega}}{c}\omega_\alpha\boldsymbol{e}_q\boldsymbol{r}\right)+\hat{a}_\alpha^{+}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\tilde{\Omega}}{c}\omega_\alpha\boldsymbol{e}_q\boldsymbol{r}\right)\right].$$

В выражениях для $\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ и $\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ гамильтониан $\hat{H}(t)$ входит в представление чисел заполнения

$$\hat{H}(t) = \tilde{\Omega} \sum_{\lambda} \left[\hat{a}_{\lambda}^{+} \hat{a}_{\lambda} + \frac{1}{2} s_{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2} s_{\lambda}} X_{0\lambda} (\hat{a}_{\lambda} + \hat{a}_{\lambda}^{+}) f(t) \right],$$

$$\hat{a}_{\alpha} = \sum_{\lambda} X_{0\lambda} \hat{a}_{\lambda} ,$$

где

$$\hat{a}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_{\lambda} + \frac{\partial}{\partial Q_{\lambda}} \right).$$

Будем искать выражение для векторного потенциала однофотонного волнового пакета $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, распространяющегося вдоль оси z, при t, $|\boldsymbol{r}| = r \to \infty$. Волновой пакет $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, регистрируемый наблюдателем, находящимся на оси z на расстоянии $r_0 \to \infty$, образуется из суперпозиции выражений (3) по всем модам плоских волн α с весовой функцией, т. е. с плотностью вероятности, обеспечивающей выполнение всех перечисленных во Введении требований, предъявляемых к однофотонному волновому пакету.

Как показано в Приложении 1, такая весовая функция имеет вид

$$P_{\omega_\alpha}(\theta_q, \varphi_q, \lambda; v) = \frac{C}{a^2 + \lambda^2} \, \mathrm{e}^{-u} u^{\lambda v} [\Gamma(1 + \lambda v)]^{-1}.$$

Здесь $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция; $C = 2a^2 \omega_\alpha \tilde{\Omega}^2 v \Delta R^2 / \pi c^2$; a – параметр, описывающий дисперсию переменной λ, по которой осуществляется интегрирование $(0 < \lambda < \infty)$; $v\,(v \to \infty)$ – некий параметр; θ_q, φ_q – полярный и азимутальный углы, определяющие направление вектора $\boldsymbol{q}$; $u = (\omega_\alpha \tilde{\Omega}/c)^2 (1 - \cos\theta_q) v a \Delta R^2$; ΔR – параметр, характеризующий размеры области локализации однофотонного волнового пакета. Весовая функция отражает факт суммирования лишь тех мод α векторного потенциала (3), направления волновых векторов которых $\boldsymbol{q}$ достаточно близки к направлению оси z, в котором движется фотон.

В предположении, что $\overline{\varpi} \gg 1$ и что в области $t - z/c < 0$, до которой электромагнитное поле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ не дошло, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0$, для рассеянного однофотонного волнового пакета $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = &-\frac{3}{\pi^3} \gamma \boldsymbol{u} \sin\theta_{\mathrm{v}} \operatorname{kei}\left(\frac{r\theta_r \sqrt{2}}{\Delta R} \right) \left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(\tau) \right. \\ &\times \left\{ 1 - \cos\left[\overline{\varpi} \tilde{\Omega} \left(t - \frac{z}{c} - \tau \right) \right] \right\} \left[\tilde{\Omega} \left(t - \frac{z}{c} - \tau \right) \right]^{-1} \\ &+ \frac{\pi}{2} \Omega_1 \int_0^{t - z/c} \mathrm{d}\tau \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(\tau) \exp\left[-\frac{\gamma}{2} \left(t - \frac{z}{c} - \tau \right) \right] \\ &\left. \times \cos\left[\Omega \left(t - \frac{z}{c} - \tau \right) \right] \theta\left(t - \frac{z}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_x \cos\varphi_{\mathrm{v}} + \boldsymbol{e}_y \sin\varphi_{\mathrm{v}}$ – единичный вектор поляризации волнового пакета $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$; $\sin\theta_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$; $\boldsymbol{e}_z$ – единичные векторы по осям декартовой системы координат; θ_{v}, φ_{v} – полярный и азимутальный углы вектора $\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$;

$$\Omega_1^2 = 1 - \frac{2\gamma\overline{\varpi}}{\pi\tilde{\Omega}}; \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \tilde{\Omega}^2}{mc^3}; \quad \Omega = \Omega_1 \tilde{\Omega};$$

$$\operatorname{kei}(z) = \frac{K_0[z \exp(\mathrm{i}\pi/4)] + K_0[z \exp(-\mathrm{i}\pi/4)]}{2\mathrm{i}};$$

K_0 – функция Бассе; $z = r\cos\theta_r \approx r - {}^1/_2 r\theta_r^2$; $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Отметим, что (4) удовлетворяет всем сформулированным во Введении требованиям. Действительно, оно удовлетворяет уравнению Даламбера с точностью до членов порядка

$$\left(\frac{\gamma}{\tilde{\Omega}} \right)^2 \ll 1 , \tag{5}$$

характерных для оптического диапазона ($\gamma \sim 10^7 - 10^9$ c^{-1}, $\tilde{\Omega} \sim 10^{15}$ c^{-1}). Выражение (4) «не расплывается» во времени. Наконец, объемный интеграл по всему пространству от плотности энергии, вычисленной с помощью (4), равен энергии фотона $\hbar\Omega$:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V \mathrm{d}^3 r \left[\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \right)^2 \right] = \hbar\Omega. \tag{6}$$

Найдем с помощью (4) векторный потенциал $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(t)$. Для этого предположим, что в точке пространства с радиус-вектором $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}_0 (r_0 = |\boldsymbol{r}_0| \to \infty)$ находится точно такой же осциллятор с той же ориентацией, что и в рассмотренном выше случае. Пусть этот осциллятор испустил вдоль оси z фотон, который возбудил рассмотренный нами осциллятор, а этот осциллятор испустил точно такой же фотон вдоль оси z, чему соответствуют $r = r_0$ и $\theta_r = 0$.

Заменив $t - z/c$ переменной t и учтя, что

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0, t) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(t), \quad -\operatorname{kei}(0) = \pi/4 ,$$

для $A_{\mathrm{ph}}(t) = \boldsymbol{e}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(t)$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{ph}}(t) = g\gamma \Bigg[&\int_0^t \mathrm{d}\tau K(t - \tau) A_{\mathrm{ph}}(t) \\ &+ \int_0^\infty K_1(t - \tau) A_{\mathrm{ph}}(\tau) \mathrm{d}\tau \Bigg], \quad t \geqslant 0 , \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$K(t) = \mathrm{e}^{\gamma/2} \cos\Omega t ; \; K_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos(\overline{\varpi}\tilde{\Omega} t)}{\Omega t}; \qquad g = \frac{3\Omega_1}{8\pi} \sin^2\theta_{\mathrm{v}} . \tag{8}$$

В Приложении 2 показано, что, принимая во внимание решение уравнения (7) с учетом (8), для $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{r}, t)$ имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{r}, t) = &-\left[\frac{\gamma^3 (1 - g)^3 \hbar}{\pi c \Omega} \right]^{1/2} \boldsymbol{u} \operatorname{kei}\left(\frac{r\theta_r \sqrt{2}}{\Delta R} \right) \\ &\times \exp\left[-\frac{\gamma}{2} (1 - g) \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \sin\left[\Omega \left(t - \frac{z}{c} - \tau \right) \right], \end{aligned} \tag{9}$$

где $t - z/c > 0$; $z = r\cos\theta_r \approx r - r\theta_r^2/2$. Из (9) и условия равенства в (4) параметра ΔR для всех трех осей системы координат следует, что $\Delta R = 2c/\gamma(1 - g)$.

Отметим, что рассмотренная нами модель и проведенные для нее расчеты, в том числе и необходимая при формально неограниченном спектре частот ω_α процедура перенормировки затравочных значений массы осциллятора m' и его частоты Ω' (m', $\Omega' \to \infty$), внутренне непротиворечивы, поскольку всё осуществляется в рамках нерелятивистского приближения. В самом деле, масса осциллятора m' пропорциональна его частоте Ω', т. к. квант энергии осциллятора $\hbar\Omega' \sim m'e^4/\hbar^2$ [8, 9] и коэффициент жесткости $m'\Omega'^2 \sim e^2/a_0^3$, где $a_0 = \hbar^2/m'e^2$. При этом выполняется условие нерелятивизма $\hbar\Omega' \sim m'e^4/\hbar^2 \ll m'c^2$.

Приведем пример задачи, в которой важен учет пространственно-временной локализации фотона. Это задача о вычислении для осциллятора в уравнении (1) среднего числа заполнения энергетических уровней $\overline{\hat{n}(t)}$.

Пусть векторный потенциал $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(t)$ внешнего фотона в (1) определяется выражением (9), в котором всем параметрам этого фотона приписывается индекс нуль. При подстановке (9) в (1) полагаем $r\theta_r \simeq z \simeq 0$, что соответствует помещению осциллятора в начало координат. Учтем, что оператор

$$\hat{n} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2} + s^2\right) - \frac{1}{2}$$

и что $\overline{\hat{n}(t)}$ определяется выражением (3), в котором оператор $\hat{\boldsymbol{A}}_\alpha(r)$ следует заменить оператором $\hat{n}$. Тогда, принимая во внимание волновую функцию (2), получаем

$$\overline{\hat{n}(t)} = \frac{1}{8}\tilde{\Omega}\left\{\left[\int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]\cos\left[\Omega(t-t')\right]f(t')\mathrm{d}t'\right]^2\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t')\right]\sin\left[\Omega(t-t')\right]f(t')\mathrm{d}t'\right]^2\right\}$$
$$+\left[\exp\left(\frac{\hbar\Omega}{T_r}\right)-1\right]^{-1}.$$

Здесь

$$f(t) = \frac{e}{c\left(m\hbar\tilde{\Omega}\right)^{1/2}}\,\boldsymbol{e}_{\rm v}\boldsymbol{A}_{\rm ph}(t).$$

После вычисления интегралов по переменной t имеем

$$\overline{\hat{n}(t)} = \frac{3\pi^2}{512}\frac{\gamma\gamma_0^3}{\tilde{\Omega}\Omega_0}\sin^2\theta_{\rm v0}\left\{\left[\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)[a(\omega=-\Delta\Omega)\cos\Omega t\right.\right.$$
$$+b(\omega=-\Delta\gamma)\sin\Omega t] + \exp\left(-\frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)t\right)$$
$$\left.\times[-a(\omega=-\Delta\Omega)\cos\Omega_0 t + b(\omega=\Delta\gamma)\sin\Omega_0 t]\right]^2$$
$$+\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)[a(\omega=\Delta\Omega)\sin\Omega t - b(\omega=\Delta\gamma)\cos\Omega t]$$
$$+\exp\left(-\frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)t\right)[a(\omega=-\Delta\Omega)\sin\Omega_0 t$$
$$\left.\left.+b(\omega=\Delta\gamma)\cos\Omega_0 t]\right]^2\right\} + \left[\exp\left(\frac{\hbar\Omega}{T_r}\right)-1\right]^{-1}.$$

Здесь

$$\sin\theta_{\rm v0} = \boldsymbol{e}_{\rm v}\boldsymbol{u}_0;\quad a(\omega) = \frac{\omega}{\Delta\Omega^2+\Delta\gamma^2} + \frac{\Omega+\Omega_0}{(\Omega+\Omega_0)^2+\Delta\gamma^2};$$

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega'_0;\ \Delta\gamma = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma_0(1-g_0)}{2};$$

$$b(\omega) = \frac{\omega}{\Delta\Omega^2+\Delta\gamma^2} + \frac{\Delta\gamma}{(\Omega+\Omega_0)^2+\Delta\gamma^2}.$$

Из приведенного выражения видно, что $\overline{\hat{n}(t)}$ как функция времени ведет себя в полном соответствии с физическим процессом взаимодействия осциллятора с фотоном, т. е. сначала она, осциллируя, возрастает, а затем при $t \to \infty$ убывает до нуля. Отметим, в частности, что в условиях резонанса, т. е. при $|\Delta\Omega|t$, $|\Delta\gamma t| \ll 1$, из этого выражения следует

$$\overline{\hat{n}(t)} = \frac{3\pi^2}{512}\sin^2\theta_{\rm v0}\,\frac{\gamma^4}{\tilde{\Omega}\Omega}\,t^2\exp(-\gamma t) + \left[\exp\left(\frac{\hbar\Omega}{T_r}\right)-1\right]^{-1}.$$

Обратим внимание на то, что приведенные результаты для $\overline{\hat{n}(t)}$ нельзя получить без учета пространственно-временной локализации фотона. Действительно, $\overline{\hat{n}(t)}$ будет физически бессмысленно, если в выражение для функции $f(t)$ вместо вектора $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(t)$ подставить $\boldsymbol{A}_{\rm ph}(t) = 2c\times(2\pi\hbar/\Omega_0 V)^{1/2}\boldsymbol{u}_0\sin\Omega_0 t$, представляющее собой монохроматическую волну, локализованную в пространстве объемом $V \to \infty$.

3. Векторный потенциал электромагнитного поля и плотность энергии для ансамбля параллельно движущихся фотонов

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях средний векторный потенциал ансамбля фотонов, распространяющихся вдоль положительного направления оси z в декартовой системе координат, переходит в классический векторный потенциал. Для этого необходимо вычислить экспериментально наблюдаемую величину – интенсивность излучения (плотность энергии) ансамбля фотонов, пропорциональную $\boldsymbol{E}^2$.

С учетом результата (9) векторный потенциал ансамбля фотонов

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\boldsymbol{A}_{m\,l_m}\left(t - \frac{z}{c} - t_{l_m}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_m\right), \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{A}_{m\,l_m}\left(t-\frac{z}{c}-t_{l_m},\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_m\right) = -\boldsymbol{B}_0\mathrm{kei}\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_m|(1-g_0)}{2c}\right)$$
$$\exp\left[-\left(t-\frac{z}{c}-t_{l_m}\right)\frac{\gamma_0(1-g_0)}{2}\right]\sin\left[\Omega_0\left(t-\frac{z}{c}-t_{l_m}\right)\right];$$

$$t-\frac{z}{c}-t_{l_m} > 0;\ \boldsymbol{B}_0 = \left[\frac{\gamma_0^3(1-g_0)^3\hbar}{\pi c\Omega_0}\right]^{1/2}\boldsymbol{u}_0;$$

$$g_0 = \frac{3}{8\pi}\Omega_{10}\sin^2\theta_{\rm v0};$$

$\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_m$ – радиус-векторы в плоскости, перпендикулярной оси z. Для простоты в (10) γ_0, g_0, u_0, Ω_0 у всех фотонов в ансамбле считаются одинаковыми. Параметр t_{l_m} определяет момент времени пересечения l_m-м по счету фотоном плоскости xy в m-й точке этой плоскости с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_m$. Целые числа M и L_m определяют соответственно полное число точек пересечения фотонами плоскости xy к моменту времени t и полное число фотонов, пересекших эту плоскость в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_m$. В (9) z, $\boldsymbol{\rho}$ будем считать конечными, а t, M, $L_m \to \infty$.

Поставленная задача сводится к усреднению по моментам времени $\{t_{l_m}\}$ и радиус-векторам $\{\boldsymbol{\rho}_m\}$ выражения для векторного потенциала (10) и

$$\boldsymbol{E}^2 = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)^2.$$

Усреднение по моментам времени $\{t_{l_m}\}$ будем производить с плотностью распределения типа Бернулли

$$P(t_{l_m}) = \frac{\alpha l_m C_{L_m}^{l_m}}{T}\left(\frac{t_{l_m}}{T}\right)^{\alpha l_m - 1}\left[1-\left(\frac{t_{l_m}}{T}\right)^{\alpha}\right]^{L_m - l_m}, \tag{11}$$

где

$$0 < t_{l_m} < T\,;\ T\to\infty\,;\ 0 \leqslant l_m \leqslant L_m\,;\ L_m \to \infty\,;$$

$$C_{L_m}^{l_m} = \frac{L_m!}{(L_m - l_m)!\,l_m!}\,;\quad 0 < \alpha \leqslant 1\,.$$

Как будет видно из дальнейшего, параметр α в (11) определяет степень квазиклассичности электромагнитного поля:

$$\alpha = \alpha(n_{\mathrm{ph}}) = -\frac{n_0}{2n_{\mathrm{ph}}} + \left[\left(\frac{n_0}{2n_{\mathrm{ph}}}\right)^2 + \left(\frac{n_0}{n_{\mathrm{ph}}}\right)\right]^{1/2}. \tag{12}$$

Здесь

$$n_0 = \left(\frac{\Omega_0}{c}\right)^3 \frac{\gamma_0(1-g_0)}{128\pi^2\Omega_0}\,;$$

$n_{\mathrm{ph}} = j/c$ – плотность фотонов в потоке;

$$j = \frac{1}{4\pi}\lim_{L_m,\,T\to\infty}\frac{L_m}{Ts_0} = \frac{1}{4\pi}\lim_{\{L_m\},\,T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{L_m}{TS}$$

– плотность потока фотонов; S – площадь, через которую проходит весь поток фотонов в выражении (10);

$$s_0 = S\Big/\lim_{\{L_m\},\,T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{L_m}{T}\Big/\lim_{L_m,\,T\to\infty}\frac{L_m}{T}.$$

Отметим, что условие квазиклассичности электромагнитного поля соответствует $\alpha \ll 1$, т.е $(n_0/n_{\mathrm{ph}})^{1/2} \ll 1$. Очевидно, что если принять $\Delta t = \sqrt{\pi}\Omega_0^{-1}\{128\Omega_0\times[\gamma_0(1-g_0)]^{-1/4}\}$ и учесть, что $\overline{\boldsymbol{E}^2} = \hbar\Omega_0 n_{\mathrm{ph}}$, то это условие совпадет с условием квазиклассичности [1].

С помощью выражения (11) можно убедиться в том, что для среднего значения временного интервала $1/v_0$ между двумя ближайшими по времени моментами пересечения фотонами данной площадки s_0 в плоскости xy справедлива формула

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{\bar{v}\alpha}, \tag{13}$$

где $\bar{v} = \lim_{L_m,\,T\to\infty} L_m/T = 4\pi c n_{\mathrm{ph}} s_0$ и α определяется формулой (12).

Принимая во внимание то, что в (10) переменная $t_{l_m} < t - z/c \to \infty$ и учитывая, что согласно (11) $\bar{t}_{l_m} = L_m/v_0$ $(L_m\to\infty)$, можно для простоты расчетов считать в (10) $L_m = E[v_0(t-z/c)]$ не зависящим от m, где $E[x]$ – целая часть числа x. Тогда в (11) можно считать, что

$$T = \frac{1}{v_0}E\left[v_0\left(t - \frac{z}{c}\right)\right], \tag{14}$$

поскольку разумно положить $T = L_m/v_0$.

Проведем усреднение выражения (10) по радиус-векторам $\boldsymbol{\rho}_m$ в плоскости xy с плотностью вероятности $1/S$, где $S\to\infty$ – площадь, через которую проходит полный поток фотонов. Затем усредним полученное выражение по моментам времени t_{l_m} с плотностью вероятности (11). С учетом того, что $T\to\infty$ и что, согласно (5), $\Omega_0 \gg \gamma_0$, получаем

$$\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)} = \boldsymbol{A}_0\exp\left[-\frac{\gamma_0}{2}(1-g_0)\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right]$$
$$\times\cos\left[\Omega_0\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right]\theta\left(t-\frac{z}{c}-T\right), \tag{15}$$

где

$$T = T\left(t-\frac{z}{c}\right) = \frac{1}{v_0}E\left[v_0\left(t-\frac{z}{c}\right)\right];\ t-\frac{z}{c}-T>0;$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{32\pi^2\boldsymbol{B}_0 c^3\alpha n_{\mathrm{ph}}}{\gamma_0^2(1-g_0)^2\Omega_0}\,;\quad \alpha = \alpha(n_{\mathrm{ph}})\,.$$

Как будет видно из дальнейшего, формула (15) непосредственно определяет экспериментально измеряемую величину (интенсивность излучения) лишь в классическом случае, когда

$$\alpha \approx \left(\frac{n_0}{n_{\mathrm{ph}}}\right)^{1/2} \ll 1\,. \tag{16}$$

В связи с этим рассмотрим выражение (15) в данном случае и оценим входящие в него параметры. Считаем, что

$$\left(\frac{n_0}{n_{\mathrm{ph}}}\right)^{1/2} \sim 0.1,\ \Omega_0 \sim 10^{15}\ \text{с}^{-1},\ \gamma_0 \sim 10^8\ \text{с}^{-1},$$

$$n_0 = \left(\frac{\Omega_0}{c}\right)^3\frac{\gamma_0(1-g_0)}{128\pi^2\Omega_0} \sim 10^4\ \text{см}^{-3};$$

тогда, приняв для оценки, что $s_0 \sim n_{\mathrm{ph}}^{-2/3} \sim 10^{-4}$ см^2, получим $v_0 \approx 4\pi s_0(n_0 n_{\mathrm{ph}})^{1/2}c \sim 10^{12}$ с$^{-1}$. Следовательно, при выполнении условия (16) имеет место неравенство

$$\gamma_0 \ll v_0 \ll \Omega_0, \tag{17}$$

при котором вектор (15) в пределах изменения $\Delta(t-z/c) \lesssim 1/v_0$ имеет вид плоской волны

$$\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)} = \boldsymbol{A}_0\cos\left[\Omega_0\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right], \tag{18}$$

где

$$A_0=\frac{(8\pi\hbar\Omega_0 n_{\rm ph})^{1/2}\boldsymbol{u}_0 c}{\Omega_0}\,;\quad t-\frac{z}{c}-T>0\,.$$

Полагая, что радиус-векторы $\boldsymbol{\rho}_m$ в плоскости xy распределены с плотностью вероятности $1/S_0$, где $S\to\infty$, вычислим экспериментально наблюдаемую величину $\overline{\boldsymbol{E}^2}$. С учетом того, что

$$\boldsymbol{E}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\boldsymbol{E}_{ml_m}\,,$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}_{ml_m}$ определяются с помощью (10), т. е.

$$\boldsymbol{E}_{ml_m}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\boldsymbol{A}_{ml_m}}{\partial t}\,,$$

получим

$$\overline{\boldsymbol{E}^2}(t,n_{\rm ph})=I_1(t,n_{\rm ph})+I_2(t,n_{\rm ph})-I_3(t,n_{\rm ph})\,. \qquad (19)$$

Здесь

$$I_1(t,n_{\rm ph})=\lim_{\{L_m\},T\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\overline{E}_{ml_m}\right)^2;$$

$$I_2(t,n_{\rm ph})=\lim_{\{L_m\},T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\overline{E^2_{ml_m}}\,;$$

$$I_3(t,n_{\rm ph})=\lim_{\{L_m\},T\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l_m=1}^{L_m}\overline{E}^2_{ml_m}\,.$$

Принимая во внимание неравенства (5) и выражения (10)–(15), для I_1, I_2, I_3, усредненных по периоду $2\pi/\Omega_0$ высокочастотного колебания, имеем

$$I_1(t,n_{\rm ph})=2\pi I_0(t,n_{\rm ph})\alpha n_{\rm ph}a_1,$$

$$I_2(t,n_{\rm ph})=I_0(t,n_{\rm ph})\left[\frac{\Omega_0^2}{c\,\gamma_0(1-g_0)}\right]a_2\,,$$

$$I_3(t,n_{\rm ph})=0\,,$$

где

$$I_0(t,n_{\rm ph})=4\pi\boldsymbol{B}_0^2\alpha n_{\rm ph}\exp\left[-\gamma_0(1-g_0)\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right];$$

$$a_1=\left[\frac{8\pi c^2}{\gamma_0^2(1-g_0)^2}\right]^2;\quad a_2=\frac{\pi c^2}{[\gamma_0(1-g_0)]^2}\,.$$

Подставляя в (19) приведенные выше выражения для I_1, I_2 и I_3 и учитывая формулу (12), получаем

$$\overline{\boldsymbol{E}^2}=4\pi\hbar\Omega_0 n_{\rm ph}\left(\frac{\alpha^2 n_{\rm ph}}{n_0}+\alpha\right)$$
$$\times\exp\left[-\gamma_0(1-g_0)\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right]. \qquad (20)$$

Поскольку физически ясно, что для плоской электромагнитной волны плотность энергии фотонного поля $\overline{\boldsymbol{E}^2}/4\pi$ как в случае слабого потока фотонов ($\alpha\approx1$), так и в классическом случае ($\alpha\ll1$) должна линейно зависеть от объемной концентрации фотонов $n_{\rm ph}$, то в (20) следует положить

$$\frac{\alpha^2 n_{\rm ph}}{n_0}+\alpha=1. \qquad (21)$$

Из уравнения (21) получаем (см. (12))

$$\alpha=-\frac{n_0}{2n_{\rm ph}}+\left[\left(\frac{n_0}{2n_{\rm ph}}\right)^2+\frac{n_0}{n_{\rm ph}}\right]^{1/2}.$$

Отметим, что при $n_{\rm ph}\ll n_0$ $\alpha\approx1$, а при $n_{\rm ph}\gg n_0$ $\alpha\approx(n_0/n_{\rm ph})^{1/2}$.

Таким образом, средняя плотность энергии в потоке параллельно движущихся фотонов

$$\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^2}{4\pi}=\hbar\Omega_0 n_{\rm ph}\exp\left[-\gamma_0(1-g_0)\left(t-\frac{z}{c}-T\right)\right]$$

и при $\gamma_0\ll\nu_0$ не зависит от времени.

Обратим внимание на то, что условие классичности электромагнитного поля (16) означает, что в (20) основной вклад дает слагаемое $I_1(t,\,n_{\rm ph})$, которое, в свою очередь, представляет собой квадрат электрического поля, вычисленный с помощью векторного потенциала (15) и усредненный по периоду колебаний поля с частотой Ω_0. По существу это означает, что условие классичности электромагнитного поля соответствует малости дисперсии $\overline{(E-\overline{E})^2}\ll\overline{E^2}$.

Приложение 1

Учитывая соотношение неопределенности для импульса и координат, положим, что весовая функция зависит от

$$u=\frac{1}{\hbar^2}\left(\Delta p_x^2R_x^2+\Delta p_y^2R_y^2+\Delta p_z^2R_z^2\right),$$

где

$$\Delta p_x=\frac{1}{c}\,\hbar\omega_\alpha\tilde\Omega\sin\theta_q\cos\varphi_q,\ \ \Delta p_y=\frac{1}{c}\,\hbar\omega_\alpha\tilde\Omega\sin\theta_q\sin\varphi_q,$$

$$\Delta p_z=\frac{1}{c}\,\hbar\omega_\alpha\tilde\Omega(1-\cos\varphi_q)$$

– проекции на оси координат разности импульсов $c^{-1}\hbar\omega_\alpha\times\tilde\Omega(\boldsymbol{e}_z-\boldsymbol{e}_q)$; R_x, R_y, R_z – проекции на оси координат характерных размеров области локализации плоской волны (3). Будем считать что $R_x=R_y=R_z\to\infty$. Таким образом,

$$u=\left(\frac{\omega_\alpha\tilde\Omega}{c}\right)^2(1-\cos\theta_q)\nu a\Delta R^2,$$

где $\nu a\Delta R^2=R^2$, а параметр $\nu\to\infty$, поскольку a и ΔR конечны.

Величина u по существу является числом состояний для моды α, т. е. числом элементарных клеток в фазовом пространстве, геометрическая часть которого связана со сферической частью поверхности шарового сектора с углом θ_q. Полное число клеток на поверхности шара

$$N=u(\theta_q=\pi)=2\left(\frac{\omega_\alpha\tilde\Omega}{c}\right)^2R^2\to\infty.$$

Вероятность того, что из N клеток $\mu=\lambda\nu+1$ клеток $(0<\lambda<\infty)$ попадает на указанную сферическую поверхность шарового сектора, определяется выражением

$$P\left(\xi < \frac{1-\cos\theta_q}{2}\right) = \frac{N!}{(N-\lambda v-1)!(\lambda v)!}$$

$$\times \int_0^{(1-\cos\theta_q)/2} \mathrm{d}z z^{\lambda v}(1-z)^{N-\lambda v-1},$$

где $\xi < (1-\cos\theta_q)/2$ – случайная величина.

Продифференцируем это выражение по углу θ_q и учтем, что в дальнейшем будут представлять интерес лишь углы $\theta_q \to 0$ и что $N \to \infty$. Отметим, что число клеток μ (или, что то же самое, число мод α, из которых образуется однофотонный волновой пакет $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$) стремится к бесконечности. Предположим, что μ и v являются случайными величинами, распределение которых определяется нормальным законом. Тогда функция распределения отношения $\lambda = \mu/v$ определяется формулой Коши

$$P(\lambda) = \frac{2a}{\pi}\left(\lambda^2 + a^2\right)^{-1}.$$

Произведение плотностей вероятностей $P(\lambda)$, $\mathrm{d}P(\xi < {}^1\!/_2(1-\cos\theta_q))/\mathrm{d}\theta_q$ и определяет весовую функцию $P_{\omega_\alpha}(\theta_q, \varphi_q, \lambda, v)$.

Выражение (4) может быть получено при следующей последовательности действий. Выражение (3) суммируется по поляризациям $\sigma = 1, 2$. Полученное выражение интегрируется с найденной весовой функцией по углам φ_q и θ_q с учетом зависимости векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ от углов φ_q, θ_q. Эти вычисления приводят к выражению, в котором параметры $\mu = \lambda v$ и v входят только в вырожденную гипергеометрическую функцию, имеющую вследствие $v \to \infty$ вид

$${}_1F_1\left(1+\lambda v,\ 1;\ -\frac{r^2\sin^2\theta_r}{2\Delta R^2 a v}\right) \approx J_0\left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/2} r\sin\theta_r \frac{1}{\Delta R/\sqrt{2}}\right]$$

$$\approx J_0\left[\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/2} \frac{r\theta_r}{\Delta R/\sqrt{2}}\right],$$

где J_0 – функция Бесселя. Затем осуществляется интегрирование по параметру λ, суммирование по спектру частот s_λ и, наконец, интегрирование по частотам ω_α.

Приложение 2

Уравнение (7) можно решать методом Винера – Хопфа [7], однако его приближенное решение можно получить следующим образом. Представим уравнение (7) в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2A_{\mathrm{ph}}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma(1-g)\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{ph}}}{\mathrm{d}t} + \left[\Omega^2 + \frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{1}{2} - g\right)\right]A_{\mathrm{ph}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}A_{\mathrm{ph}}(+0) + K_1(t)\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{ph}}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=+0} + \int_0^\infty \mathrm{d}\tau K_1(t-\tau)$$

$$\times\left(\frac{\mathrm{d}^2A_{\mathrm{ph}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{ph}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + \Omega^2 A_{\mathrm{ph}}(\tau)\right), \quad t > 0,$$

$$A_{\mathrm{ph}}(+0) = g\gamma\int_0^\infty K_1(-\tau+0)A_{\mathrm{ph}}(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

где $A_{\mathrm{ph}}(+0) = A_{\mathrm{ph}}(t=+0)$.

Решение полученного дифференциального уравнения с учетом неравенства (5) и начального условия имеет вид

$$A_{\mathrm{ph}}(t) = A_{\mathrm{ph}}(+0)\exp\left[-\frac{\gamma}{2}(1-g)t\right]$$

$$\times\left(\cos\Omega t + \frac{\Omega}{g\gamma}\sin\Omega t\right), \quad t > 0\,.$$

Если выполняется условие $t \gg \gamma/\Omega^2$, то

$$A_{\mathrm{ph}}(t) = C\exp\left[-\frac{\gamma}{2}(1-g)t\right]\sin\Omega t\,,$$

где $C = A_{\mathrm{ph}}(+0)\Omega/g\gamma$. Наконец, принимая во внимание это выражение, из соотношения (4) с учетом (5) и (6) для однофотонного волнового пакета получаем формулу (9).

1. Берестецкий В.Б. , Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика* (М., Наука, 1980, с.31 – 33, 501 – 644).
2. Kepler R. G. Coppade F.N. *Phys.Rev.*, **151**, 610 (1966).
3. Ландау Л. Пайерлс Р. *Zs. Phys.*, **62**, 188 (1930).
4. *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (под ред. О.В.Богданкевича, О.В.Крохина) (М., Мир, 1966, с. 93 – 279).
5. Husimi K. *Prog.Theor.Phys.*, **9**, 382 (1953).
6. Ullersma P. *Physica*, **32**, 27 (1966).
7. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика* (М., Наука, 1969, с.136 – 140).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М., Физматгиз, 1963, с.146, 156).
9. Крейн М.Г. *УМН*, **13**, № 5 (1958).