

Волны шепчущей галереи

А.Н.Ораевский

Дан обзор теории собственных волн (мод) диэлектрического шара. Особое внимание уделено модам с большими радиальными и азимутальными индексами – так называемым модам шепчущей галереи. Приведены экспериментальные результаты спектроскопического изучения мод диэлектрического шара. Обсуждаются области применения мод шепчущей галереи.

Ключевые слова: потенциалы Дебая, моды диэлектрического шара, моды шепчущей галереи, резонансные частоты, добротность моды.

Содержание

1. Введение	377
2. Основные уравнения. Потенциалы Дебая.	378
3. Поля диэлектрического шара и моды шепчущей галереи	379
4. Приповерхностное поле МШГ	381
5. Корни характеристических уравнений и собственные частоты	382
6. Влияние неоднородностей диэлектрической проницаемости на частоту МШГ	384
7. Эффективный объем МШГ	385
8. Добротность МШГ	386
9. Возбуждение МДШ плоской волной	388
10. Возбуждение МШГ волноводной волной	390
11. Возбуждение МШГ плоской волной через призму ПВО и волнами других конфигураций	392
12. Добротность связи	394
13. Динамические уравнения для амплитуд МШГ	395
14. Применение МШГ	396
Приложение 1. Векторные шаровые функции	398
Приложение 2. Полезные формулы.	399
Литература	399

1. Введение

В Пекине рядом со знаменитым историческим памятником – Храмом Неба – находится чудесная каменная стена, представляющая собой почти замкнутый цилиндр. «Чудо» заключается в том, что звуки, произнесенные тихим голосом в одном из направлений вдоль стены, спустя некоторое время возвращаются к говорящему. При этом создается впечатление, что кто-то невидимый за спиной говорящего произносит те же звуки его же голосом.

Современное физическое объяснение эффекта дал Рэлей более ста лет тому назад [1]. Он основывался на собственных наблюдениях, сделанных в старинной галерее, находящейся под куполом собора Святого Павла в Лондоне (рис.1). Отсюда и название этих волн – волны шепчущей галереи. До Рэрея эффект приписывался отражению звуковых «лучей» от поверхности вблизи вершины купола. При этом концентрация лучей, прошедших по

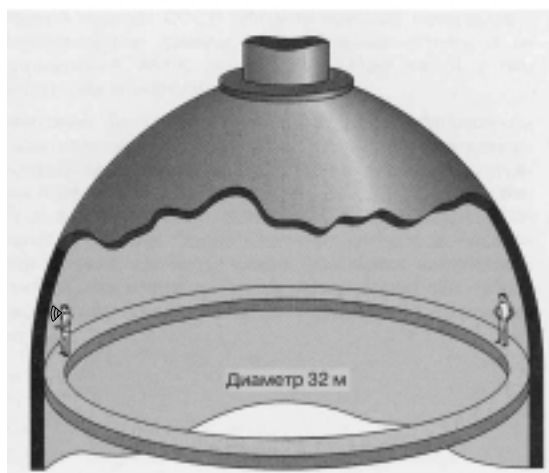


Рис.1. Шепчущая галерея под куполом собора Святого Павла в Лондоне.

разным большим дугам купола, имеющего форму полусферы, должна происходить только в точке, диаметрально противоположной источнику звука. Однако Рэлей заметил, что помимо этого эффекта существует еще

один: звук «цепляется» за поверхность стены и «ползет» вдоль нее. При этом вогнутая поверхность купола не дает сечению пучка расширяться так же быстро, как при распространении в свободном пространстве. Если в последнем случае сечение пучка растет, а интенсивность излучения падает пропорционально квадрату расстояния от источника, то в шепчущей галерее излучение заключено в узком слое, примыкающем к поверхности. В результате интенсивность звука внутри этого слоя падает лишь пропорционально расстоянию, т.е. значительно медленнее, чем в свободном пространстве. Свое объяснение Рэлей подтвердил прямыми экспериментами, используя свисток как источник звука и горящую свечу – как приемник.

Заметно позже, в начале двадцатого столетия, было установлено [2–4], что в диэлектрических шарах могут существовать электромагнитные волны с такой же пространственной структурой, как и звуковые волны шепчущей галереи. Эти типы волн не привлекали к себе большого внимания вплоть до последнего десятилетия, когда они вдруг стали предметом широкого исследования и применения в оптике. Почему?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо понять, что же такое волны шепчущей галереи и при каких условиях они возникают. Для этого необходимо исследовать структуру поля в диэлектрических телах. Дальнейшее рассмотрение будет посвящено электродинамике диэлектрического шара. Вне рамок этого обзора остаются проблемы электродинамики диэлектрических цилиндров, диэлектрических сферических слоев и тел несферической формы. Электродинамика диэлектрического цилиндра является основой теории волоконных диэлектрических волноводов и хорошо изложена в монографиях (см., напр., [5]). Что касается электродинамики диэлектрических сферических слоев и тел несферической формы, то этим проблемам целесообразно посвятить специальный обзор.

2. Основные уравнения. Потенциалы Дебая

Прежде чем приступить к исследованию волн диэлектрического шара, покажем, следуя книге [6], что решение уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая [3].

Уравнения Максвелла для монохроматического поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \quad (1)$$

в криволинейной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} (L_m E_m) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (L_n E_n) = ikL_m L_n H_l, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} (L_m H_m) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (L_n H_n) = -ikL_m L_n E_l, \quad (2b)$$

где $k = (\omega/c)(\epsilon\mu)^{1/2}$; ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала шара; L_1, L_2, L_3 – коэффициенты Ляме; $m = 1, 2, 3, n = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3, m \neq n \neq l$. В уравнениях (2) при подстановке конкретных значений m, n, l должна соблюдаться круговая последовательность индексов: 321, 132, 213. Если же указанная последовательность нарушена, то в правой части уравнений (2) следует поменять знак.

Решение системы уравнений (2) связано с нахождением шести скалярных функций – шести проекций векторов электрического и магнитного полей. Оказывается, однако, что при определенных соотношениях между коэффициентами Ляме электромагнитные поля можно разбить на две подгруппы: подгруппу волн электрического типа и подгруппу волн магнитного типа.

Для подгруппы волн электрического типа (Е-типа) одна из составляющих магнитного поля (например, H_3) тождественно равна нулю, а все остальные компоненты, вообще говоря, не равны нулю. Для подгруппы волн магнитного типа (Н-типа) одна из составляющих электрического поля (например, E_3) тождественно равна нулю, а все остальные компоненты, вообще говоря, не равны нулю. В таком случае каждая из подгрупп волн может быть определена с помощью одной скалярной функции. Покажем это.

Рассмотрим волны Е-типа ($H_3 = 0$). Тогда из уравнения (2a) при $l = 3$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (L_2 E_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} (L_1 E_1). \quad (3)$$

Введением функции W , такой, что

$$L_1 E_1 = \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad L_2 E_2 = \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \quad (4)$$

уравнение (3) удовлетворяется тождественно. Подставляя соотношение (4) в уравнения (2b), соответствующие индексам $l = 1$ и 2 , находим

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (L_2 H_2) = ik \frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (L_1 H_1) = -ik \frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial W}{\partial \xi_2}. \quad (5b)$$

Предположим теперь, что $L_3 = 1$, а отношение L_1/L_2 не зависит от ξ_3 . Тогда, полагая $W = \partial U / \partial \xi_3$, где U – пока неизвестная функция, мы находим, что

$$H_1 = -ik \frac{1}{L_2} \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \quad H_2 = ik \frac{1}{L_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1}. \quad (6)$$

При этом в соответствии с уравнением (2b) E_3 определяется соотношением

$$E_3 = -\frac{1}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{L_2}{L_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{L_1}{L_2} \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \right) \right]. \quad (7)$$

Таким образом, все компоненты электромагнитного поля выражены через одну скалярную функцию U . Необходимо определить, какому уравнению удовлетворяет эта функция. В нашем распоряжении остались два уравнения системы (2):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} (L_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (L_2 E_2) = ikL_2 L_3 H_1, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (L_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (L_3 E_3) = ikL_3 L_1 H_2. \quad (8b)$$

В результате подстановки выражений (6) и (7) в уравнение (8) последние приводятся к виду

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3^2} + \frac{1}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{L_2 \partial U}{L_1 \partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{L_1 \partial U}{L_2 \partial \xi_2} \right) \right] + k^2 U \right\} = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3^2} + \frac{1}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{L_2 \partial U}{L_1 \partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{L_1 \partial U}{L_2 \partial \xi_2} \right) \right] + k^2 U \right\} = 0. \quad (9б)$$

Оба эти уравнения удовлетворяются одновременно, если функция U является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3^2} + \frac{1}{L_1 L_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{L_2 \partial U}{L_1 \partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{L_1 \partial U}{L_2 \partial \xi_2} \right) \right] + k^2 U = 0. \quad (10)$$

Подведем итог нашим рассуждениям. Если $L_3 = 1$ и отношение L_1/L_2 не зависит от ξ_3 , а функция U подчиняется уравнению (10), то поля волн Е-типа определяются следующими формулами:

$$E_1 = \frac{1}{L_1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_3}, \quad E_2 = \frac{1}{L_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2 \partial \xi_3}, \quad E_3 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_3^2} + k^2 U, \quad (11)$$

$$H_1 = -\frac{ik}{L_2} \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \quad H_2 = \frac{ik}{L_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \quad H_3 = 0.$$

Совершенно аналогичными рассуждениями можно доказать, что поля волн Н-типа ($E_3 = 0$) определяются формулами

$$E_1 = \frac{ik}{L_2} \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \quad E_2 = -\frac{ik}{L_1} \frac{\partial V}{\partial \xi_1}, \quad E_3 = 0, \quad (12)$$

$$H_1 = \frac{1}{L_1} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial \xi_3}, \quad H_2 = \frac{1}{L_2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2 \partial \xi_3}, \quad H_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_3^2} + k^2 V,$$

а функция V удовлетворяет тому же уравнению (10). Хотя функции U и V , входящие в соотношения (11) и (12), определяются одним и тем же уравнением (10), их принято считать двумя разными потенциалами Дебая, т. к. они описывают поля различной структуры.

3. Поля диэлектрического шара и моды шепчущей галереи

Пользуясь уравнением (10) и соотношениями (11) и (12), определим структуру полей диэлектрического шара радиусом a , помещенного в вакуум. Для решения этой задачи удобно воспользоваться сферической системой координат r, θ, φ . Если положить $\xi_1 = \varphi, \xi_2 = \theta, \xi_3 = r$, то оказывается, что $L_1 = r \sin \theta, L_2 = r, L_3 = 1$. При таком выборе координат удовлетворяются условия, налагаемые на коэффициенты Лямэ (см. выше), при которых возможно представление решений уравнений Максвелла в виде волн Е- и Н-типа.

В сферической системе координат уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0, \quad (13)$$

где $k = k_0(\varepsilon\mu)^{1/2}$ внутри шара, $k = k_0$ вне шара; $k_0 = \omega/c$. Соотношения (11) и (12), определяющие поля, в сферической системе координат приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) U, \quad H_r = 0, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, \quad H_\theta = -ik \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, \quad H_\varphi = ik \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) V, \quad E_r = 0, \\ H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}, \quad E_\theta = ik \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}, \quad E_\varphi = -ik \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Представим потенциал U в виде

$$U = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (16)$$

При подстановке (16) в (10) получим следующие уравнения для функций $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{c_1}{r^2} \right) R = 0, \quad (17a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(c_2 - \frac{c_3}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (17б)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + c_3 \Phi = 0, \quad (17в)$$

где c_1, c_2, c_3 – константы, возникающие при решении уравнений методом разделения переменных. Физическое требование однозначности решений уравнений (17б), (17в) приводит к соотношениям

$$c_2 = n(n+1), \quad c_3 = m^2, \quad (18)$$

где n и m – целые числа, включая нуль. Сами же решения имеют следующий вид:

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad \Phi(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi, \end{cases} \quad (19)$$

где $P_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра. Уравнение (17a) при подстановке в него $R(r) = (kr)^{1/2} Z(kr)$ преобразуется в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2} \right) Z = 0, \quad z = kr, \quad v = n + \frac{1}{2}. \quad (20)$$

По физическому смыслу решение вне шара должно иметь асимптотический вид убегающей волны, поскольку не

может существовать волна, приходящая из бесконечности. Значит, вне шара решения должны выражаться через функции Ганкеля первого рода, которые при больших значениях аргумента имеют асимптотический вид убывающей волны с амплитудой, убывающей обратно пропорционально расстоянию. В итоге решение системы (14) внутри диэлектрического шара ($r \leq a$) имеет вид

$$U_{mn}^i(r, \theta, \varphi) = C_i P_n^m(\cos \theta) (kr)^{1/2} J_\nu(kr) e^{\pm im\varphi}, \quad (21)$$

а вне диэлектрического шара ($r > a$) –

$$U_{mn}^e(r, \theta, \varphi) = C_e P_n^m(\cos \theta) (kr)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0 r) e^{\pm im\varphi}, \quad (22)$$

где $C_{i,e}$ – произвольные постоянные.

В соответствии с (14), (15), (21) и (22) для описания поля внутри ($r < a$) и вне ($r > a$) шара удобно ввести векторные сферические функции $\mathbf{m}_{mn}(\sigma; k)$ и $\mathbf{n}_{mn}(\sigma; k)$. Векторы $\mathbf{m}_{mn}(\sigma; k)$, $\mathbf{n}_{mn}(\sigma; k)$ приведены в табл. П1.1–П1.3 в Приложении 1.

Поля Е- и Н-типа внутри шара описываются следующими формулами:

$$\mathbf{E}_{mnq}(r, \theta, \varphi) = C_i \mathbf{n}_{mn}(\sigma; k), \quad (23a)$$

$$\mathbf{H}_{mnq}(r, \theta, \varphi) = C_i \mathbf{m}_{mn}(\sigma; k), \quad (23b)$$

$$\mathbf{E}_{mnq}(r, \theta, \varphi) = C_i \mathbf{m}_{mn}(\sigma; k), \quad (24a)$$

$$\mathbf{H}_{mnq}(r, \theta, \varphi) = C_i \mathbf{n}_{mn}(\sigma; k). \quad (24b)$$

Соответствующие выражения для полей вне шара получаются из формул (23) и (24) путем замены функций Бесселя $J_\nu(kr)$ функциями Ганкеля $H_\nu^{(1)}(k_0 r)$, а константы C_i константой C_e .

Обратим внимание на то, что в левых частях формул (23) и (24) появляется индекс q , которого нет в правых частях. Смысл его введения будет пояснен в дальнейшем.

Формулы (23) и (24) должны удовлетворять условиям на границе шара. Эти условия могут быть выполнены при соответствующем выборе свободного параметра $k_0 a$ и произвольных констант $C_{i,e}$. Условие непрерывности тангенциальных компонент полей на границе между шаром и вакуумом, во-первых, позволяет найти отношение этих констант

$$\frac{C_i}{C_e} = \left(\frac{1}{\varepsilon^5 \mu} \right)^{1/4} \frac{H_\nu^{(1)}(k_0 a)}{J_\nu[k_0 a (\varepsilon \mu)^{1/2}]} \quad (25)$$

и, во-вторых, приводит к характеристическим уравнениям, определяющим допустимые значения параметра $k_0 a$. Характеристическое уравнение для волн Е-типа имеет вид

$$\frac{[(ka)^{1/2} J_\nu(ka)]'}{(ka)^{1/2} J_\nu(ka)} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} \frac{[(k_0 a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0 a)]'}{(k_0 a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0 a)}, \quad (26)$$

а для волн Н-типа –

$$\frac{[(ka)^{1/2} J_\nu(ka)]'}{(ka)^{1/2} J_\nu(ka)} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{[(k_0 a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0 a)]'}{(k_0 a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0 a)}, \quad (27)$$

где штрих означает полную производную по аргументу, от которого зависит функция, т. е. по ka или $k_0 a$.

Характеристические уравнения фактически определяют соотношение между волновым числом k и радиусом шара a . Поскольку эти уравнения имеют множество корней, то при заданном радиусе шара они определяют бесконечный набор волновых векторов (собственных частот). Возникает необходимость введения третьего индекса q , который бы указывал, какому по счету номеру корня уравнения (26) или (27) соответствует то или иное значение волнового вектора (собственной частоты). Поэтому собственные поля (моды) диэлектрического шара описываются тремя индексами m, n, q . Чем больше индекс q (номер корня), тем больше нулей функции Бесселя находится внутри шара, т. е. индекс q соответствует числу узлов данной моды, лежащих внутри шара. Отметим, что характеристические уравнения не зависят от индекса m , так что моды диэлектрического тела идеально шаровой формы оказываются вырожденными по этому индексу. Это вырождение снимается при отклонении формы диэлектрического тела от шаровой.

Граничные условия позволяют найти только отношение констант C_i и C_e , так что одна из них остается свободной. Она определяется мощностью источников, возбуждающих волны. Таким образом, соотношения (23) – (27) в принципе дают полное описание системы волн внутри диэлектрического шара и вне его. Какие же из них соответствуют волнам (модам) шепчущей галереи?

Прежде всего отметим, что зависимость полей от угла φ в виде $e^{\pm im\varphi}$ соответствует волнам, бегущим по кругу во взаимно противоположных направлениях. Но из описаний Рэлея мы вправе ожидать, что волна шепчущей галереи должна быть «прижата» к стенке шара. Внимательно взглянем в радиальную зависимость полей, представленных формулами (21) и (22). При малом индексе n поле, осциллируя, заполняет практически весь объем шара (рис.2). Такие моды не могут претендовать на роль волн шепчущей галереи. Но при большом индексе n (например, более 100) функция Бесселя очень мала вплоть до $r \approx v/k$. При $r > v/k$ функция Бесселя начинает осциллировать с убывающей амплитудой (рис.3). Если выбрать значение ka , ближайшее к первому корню функции Бесселя, то вблизи поверхности шара поле будет иметь структуру без осцилляций.

Можно сказать, что функция Бесселя определяет радиальную поперечную структуру волны. Ее же угловая поперечная структура описывается функцией $P_n^m(\cos \theta)$. При $m = n$ функция $P_n^n(\cos \theta)$ пропорциональна $\sin^n \theta$. Соответствующая зависимость от θ изображена на

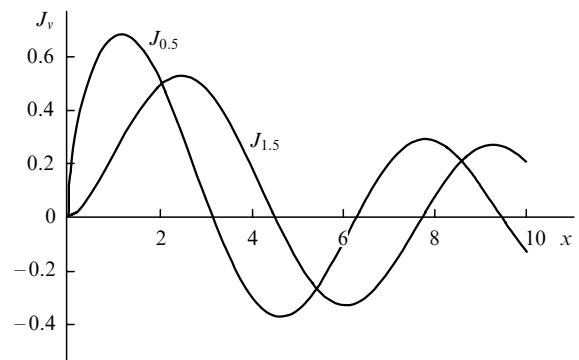


Рис.2. Функции Бесселя с малыми индексами.

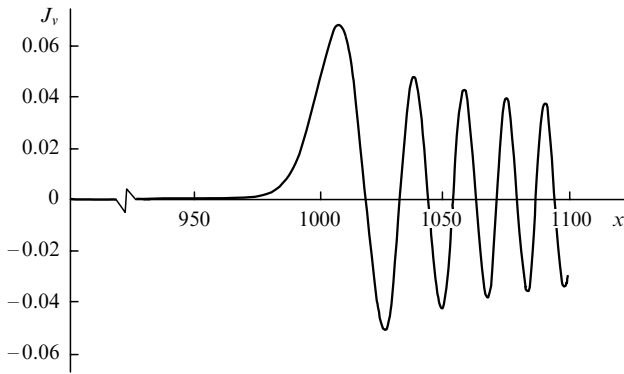


Рис.3. Функция Бесселя с большим индексом $v = 1000.5$.

рис.4. Видно, что амплитуда поля плавно спадает при возрастании угла θ . Если же $m \neq n$, то у моды появляется осциллирующая поперечная структура (рис.5). Осцилляции тем более развиты, чем больше разность $n - m$. Таким образом, модой шепчущей галереи (МШГ) логично назвать волну, у которой отсутствуют корни функции Бесселя внутри шара, и которая имеет одинаковые и большие индексы n и m . Следует, однако, отметить, что при индексах $m \neq n$, но близких к n , и $q > 1$, но близких к единице, соответствующие моды по своим свойствам близки к МШГ. Это означает, что нет резкой границы между МШГ и другими ближайшими по индексам модами. По этой причине иногда в литературе моды с малыми разностью $n - m$ и q также относят к МШГ. Мы же термин МШГ для определенности относим к модам с большим n , $m = n$ и $q = 1$.

Можно усмотреть подобие шаровых мод модам гауссовых пучков с прямоугольной геометрией [7, 8]. Действительно, такой пучок описывается функциями Эрмита – Гаусса $G(\xi) = H_v(\sqrt{2}\xi) \exp(-\xi^2)$, где $H_v(\sqrt{2}\xi)$ – полином Эрмита, v – целочисленный индекс. Эти функции являются решением уравнения

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} + 2(2v + 1 - 2\xi^2)G = 0. \quad (28)$$

Как было показано, при больших индексах n поле МШГ сосредоточено в малом интервале углов θ вблизи $\theta_0 = \pi/2$. Уравнение (17б) для углов θ , лежащих в этом малом интервале, оказывается совпадающим с уравнением (28), если положить в нем $v = n - m$ и $\xi = (n/2)^{1/2}\theta$. Выходит так, что шаровая мода с большими индексами n и m и небольшой разностью $n - m$ ведет себя подобно гауссову пучку с радиусом поперечного сечения $w = (2/n)^{1/2}a$. Таким образом,

$$\frac{P_n^m(\theta)}{P_n^m(0)} \approx \frac{H_{n-m}(\sqrt{n}\theta)}{H_{n-m}(0)} \exp(-n\theta^2/2). \quad (29)$$

Такая аппроксимация может оказаться весьма полезной при расчетах, т. к. заменяет вычисление присоединенного полинома Лежандра с большими индексами вычислением полинома Эрмита с малыми индексами.

4. Приповерхностное поле МШГ

Изучение свойств МШГ связано в первую очередь с вычислением корней характеристических уравнений. По-

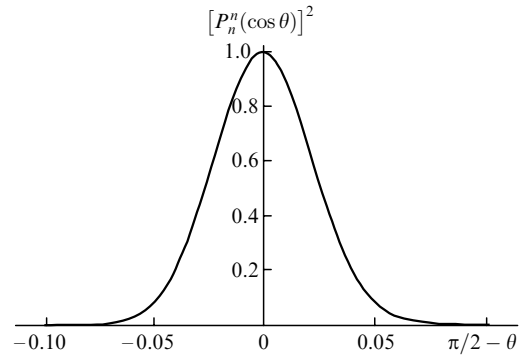


Рис.4. Функция $[P_n^n(\cos \theta)]^2 \propto \sin^{2n} \theta$ при $n = 1000$.

скольку речь пойдет о модах с большим индексом n , для вычисления указанных корней удобно использовать соответствующую аппроксимацию функций Бесселя. Обратим внимание на то, что удачная аппроксимация полезна не только для аналитических вычислений, но и для численных расчетов, т. к. вычисление функций Бесселя с большими индексами требует большого машинного времени. Например, построение графика функции $J_{1000}(x)$ с помощью современного персонального компьютера и программы Mathematica (или других аналогичных программ, таких как MathLab или MathCad) требует нескольких часов.

При отыскании подходящей аппроксимации следует иметь в виду, что для МШГ вблизи поверхности шара аргумент функции Бесселя порядка ее индекса. В этом случае функции Бесселя хорошо аппроксимируются функциями Эйри [6, 9]:

$$\sqrt{z}J_v(z) = \sqrt{2} \left(\frac{v}{2}\right)^{1/6} \text{Ai}(\zeta), \quad (30)$$

$$\frac{d}{dz} [\sqrt{z}J_v(z)] = -\sqrt{2} \left(\frac{2}{v}\right)^{1/6} \frac{d\text{Ai}(\zeta)}{d\rho}.$$

Поскольку функция Ганкеля определяет решение вне шара, для нее аргумент хотя и остается большим, но оказывается заметно меньшим ее индекса. В этом случае хорошо аппроксимирует функцию Ганкеля следующее соотношение:

$$\sqrt{z}H_z^{(1)}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{\psi}{\sinh \eta}\right)^{1/4} [\text{Ai}(\psi) - i\text{Bi}(\psi)]. \quad (31)$$

В формулах (30) и (31) функции $\text{Ai}(\zeta)$ и $\text{Bi}(\zeta)$ – линейно независимые решения уравнения Эйри [9];

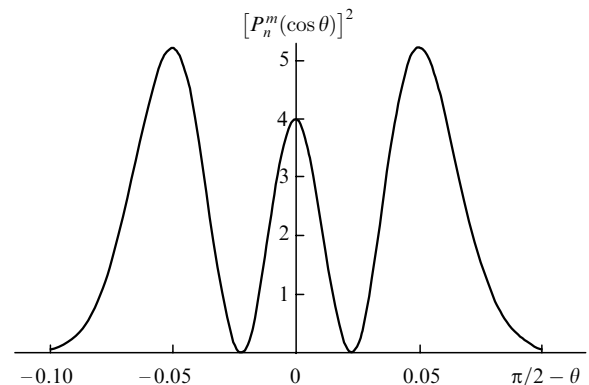


Рис.5. Функция $[P_n^m(\cos \theta)]^2$ при $m = n - 2$, $n = 1000$.

$$\zeta = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} (v - z); \quad \eta(z) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{v}{z}\right); \quad (32)$$

$$\psi = \left[\frac{3}{2}v(\eta - \tanh \eta)\right]^{2/3}.$$

Погрешность аппроксимаций (30) и (31) порядка v^{-1} . Если речь идет о v , превышающих 1000, то эта погрешность вполне удовлетворительна для многих расчетов, а требуемое для численных расчетов время уменьшается в сотни раз.

Формула (31) для функции Ганкеля позволяет вычислить поле вне шара. При радиусе шара, заметно большем длины волны, величина ψ велика. Функции Эйри при большом аргументе аппроксимируются следующими соотношениями [10]:

$$\operatorname{Ai}(\psi) \simeq \frac{1}{2}\psi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\psi^{3/2}\right), \quad (33a)$$

$$\frac{d\operatorname{Ai}(\psi)}{d\psi} = -\frac{1}{2}\psi^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\psi^{3/2}\right),$$

$$\operatorname{Bi}(\psi) \simeq \psi^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\psi^{3/2}\right), \quad (33b)$$

$$\frac{d\operatorname{Bi}(\psi)}{d\psi} \simeq \psi^{1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\psi^{3/2}\right).$$

Характер изменения поля вне шара вблизи его поверхности, когда $r/a - 1 \ll 1$, может быть установлен путем разложения аргумента в формулах (33) в ряд Тейлора:

$$\frac{2}{3}\psi^{3/2} = v[\eta(k_0r) - \tanh(k_0r)] = v\left[L(s) - \frac{(s^2 - 1)^{1/2}r}{s} \frac{1}{a}\right], \quad (34)$$

где

$$s = \frac{v}{k_0a}; \quad L(s) = \ln\left[s + (s^2 - 1)^{1/2}\right]. \quad (35)$$

Из выражений (33)–(35) следует, что вне шара, но вблизи его поверхности мнимая часть комплексной функции Эйри очень мала, так что поле в данной области определяется действительной частью этой функции. Подставляя (34) в (33a), находим, что поле экспоненциально спадает с ростом координаты r согласно формуле

$$|E| \propto \exp\left[-2\pi(\varepsilon\mu - 1)^{1/2} \frac{r}{\lambda}\right], \quad (36)$$

где λ – длина волны в вакууме. К этому результату можно прийти и путем прямого анализа уравнения (20). Действительно, при $r > a$ вблизи поверхности шара уравнение (20) может быть аппроксимировано следующим образом:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{k_0a} \frac{dZ}{dz} + \left[1 - \frac{v^2}{(k_0a)^2}\right]Z = 0. \quad (37)$$

Решение этого уравнения, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$Z(k_0r) = \operatorname{const} \cdot \exp\left\{-\left[\frac{v^2}{(k_0a)^2} - 1 + \frac{1}{4(k_0a)^2}\right]^{1/2} - \frac{1}{2k_0a}\right\} k_0r. \quad (38)$$

Ниже будет показано (см. формулу (45)), что $k_0a \approx v/(\varepsilon\mu)^{1/2} \gg 1$. С учетом этого показатель экспоненты в (38) примерно равен $(2\pi/\lambda)(\varepsilon\mu - 1)^{1/2}r$ и мы приходим к формуле (36). Начиная с $r > v/k_0 \approx (\varepsilon\mu)^{1/2}a$, величина $1 - v^2/(k_0r)^2$ в уравнении (20) становится положительной, так что решение оказывается близким к синусоиде с медленно убывающей амплитудой.

С увеличением r роль мнимой части функции Эйри возрастает. Вклад мнимой части сравнивается со вкладом действительной части при радиусах, определяемых соотношением $\eta(k_0r) - \tanh \eta(k_0r) = 0$, т. е. соотношением $\eta(k_0r) = 0$. Принимая во внимание определение параметра $\eta(k_0r)$ (см. (32)), находим, что это происходит на расстояниях $r \approx a(\varepsilon\mu)^{1/2}$. Сравнимые вклады реальной и мнимой частей обуславливают трансформацию экспоненциально затухающего поля в убегающую волну с амплитудой, убывающей обратно пропорционально \sqrt{r} .

Поскольку амплитуда поля на расстояниях $r > a \times (\varepsilon\mu)^{1/2}$ становится очень малой, излучение из объема шара исключительно мало. Это подтверждается приведенным ниже прямым вычислением добротности МШГ. В итоге можно представить себе следующую картину. Поле МШГ занимает пространство внутри объема, ограниченного сферической поверхностью радиусом $a(\varepsilon\mu)^{1/2}$. Из этого объема излучение «вытекает» наружу в виде убегающей волны с очень малой амплитудой. Однако фактически поле занимает не весь объем сферы с радиусом $a(\varepsilon\mu)^{1/2}$, а «прижато» к поверхности диэлектрического шара, простираясь вне шара на расстояние $r = \lambda/[2\pi(\varepsilon\mu - 1)^{1/2}] \ll a(\varepsilon\mu)^{1/2}$ (см. (36)). Для таких материалов, как стекло и кварц, это расстояние меньше длины волны в свободном пространстве, не говоря уже о диэлектриках с большим ε , например об алмазе ($\varepsilon \approx 6$) или о полупроводниковых материалах ($\varepsilon > 10$). Заметим, что в случае полупроводников речь идет о частотах излучения, значительно меньших частоты, соответствующей межзонным переходам. В этом случае поглощение излучения за счет межзонных переходов не играет существенной роли.

5. Корни характеристических уравнений и собственные частоты

Теперь займемся корнями характеристических уравнений. Используя соотношения (30)–(33), запишем (26) и (27) через функции Эйри. Получающиеся при этом уравнения имеют вид

$$\frac{1}{\operatorname{Ai}(\zeta)} \frac{d\operatorname{Ai}(\zeta)}{d\zeta} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{v}{2}\right)^{1/3} \left\{\left[\frac{v}{ka}(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]^2 - 1\right\}^{1/2} \times [1 - i \exp(-2T)], \quad \zeta = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} (v - ka), \quad T = v(\eta - \tan \eta) \quad (39)$$

для волн Е-типа и

$$\frac{1}{\operatorname{Ai}(t)} \frac{d\operatorname{Ai}(t)}{dt} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \left(\frac{v}{2}\right)^{1/3} \left\{\left[\frac{v}{ka}(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]^2 - 1\right\}^{1/2} \times [1 - i \exp(-2T)] \quad (40)$$

для волн Н-типа.

Если параметр v велик, так что достаточно велика и

величина $(v/2)^{1/3}$, то можно, следуя [10], найти корни уравнений (39) и (40) аналитически. Если бы v было бесконечно велико, то уравнения (39) и (40) удовлетворялись бы корнями уравнения

$$\text{Ai}(\zeta) = 0. \quad (41)$$

Обозначим корни этого уравнения через ζ_q и найдем $\Delta\zeta_q$ – поправку первого приближения к этим корням. Разложим правую и левую части уравнений (39) и (40) в ряд с точностью до линейных членов по $\Delta\zeta_q$ и решим их относительно $\Delta\zeta_q$. Тогда для уравнения (39) (моды E-типа)

$$\Delta\zeta_q = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} \left[\frac{\mu}{\varepsilon(\mu-1)}\right]^{1/2} [1 + i \exp(-2T_q)], \quad (42)$$

а для уравнения (40) (моды H-типа)

$$\Delta\zeta_q = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/3} \left[\frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon\mu-1)}\right]^{1/2} [1 + i \exp(-2T_{nq})]. \quad (43)$$

При этом

$$T_{nq} = v \left[\text{arcosh}(\varepsilon\mu)^{1/2} - \left(\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2} \right] + \left(\frac{v}{2}\right)^{1/3} \times \rho_q \left(\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2} + \frac{1}{\varepsilon}. \quad (44)$$

Учитывая, что $\zeta = (2/v)^{1/3}(v - ka)$ (см. (39)), собственные волновые числа можно представить в явном виде:

$$k_{0nq} = \frac{v - (v/2)^{1/3}(\zeta_q + \Delta\zeta_q)}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}}. \quad (45)$$

Поскольку величина $\Delta\zeta_q$ – комплексная, собственные значения волновых чисел также являются комплексными. Действительная часть волнового числа определяет собственные частоты мод. Пользуясь численным значением первого корня функции Эйри ($\zeta_1 = -2.33811$), приведем формулы для собственных частот МШГ к виду, удобному для вычислений:

$$\omega_n^E \approx \frac{c}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}} \left[v + 1.85576v^{1/3} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu-1}\right)^{1/2} + O(v^{-1/3}) \right], \quad (46a)$$

$$\omega_n^H \approx \frac{c}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}} \left[v + 1.85576v^{1/3} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu-1}\right)^{1/2} + O(v^{-1/3}) \right]. \quad (46b)$$

Символ $O(v^{-1/3})$ обозначает, как обычно, что отброшенные члены в формулах (46) по порядку величины равны $v^{-1/3}$.

Уточнению асимптотических формул, позволяющих вычислять положения резонансов мод диэлектрического шара (МДШ) с большой степенью точности, посвящены работы [11, 12]. В [11] приведены поправки $\Delta\omega_n^{E,H}$ к формулам (46), дающие возможность вычислять частоты МШГ с более высокой степенью точности:

$$\Delta\omega_n^E = \frac{c}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}} \left[\frac{3}{10\sqrt[3]{4}} 1.8557^2 v^{-1/3} - \frac{\varepsilon^{3/2}}{3\sqrt[3]{2}(\varepsilon-1)^{3/2}} \right],$$

$$\times 1.8557v^{-2/3} + O(v^{-1})], \quad (47a)$$

$$\Delta\omega_n^H = \frac{c}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}} \left[\frac{3}{10\sqrt[3]{4}} 1.8557^2 v^{-1/3} - \frac{3\varepsilon-2}{3\sqrt[3]{2}\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-1)^{3/2}}} \times 1.8557v^{-2/3} + O(v^{-1}) \right]. \quad (47b)$$

Экспериментально спектроскопия МШГ-резонансов изучалась в работе [13], в которой отмечено блестящее согласие наблюдаемых спектров с предсказанными теорией Ми.

Как уже отмечалось, собственные частоты для мод с одним и тем же индексом n , но разными индексами m вырождены. Это вырождение снимается при отклонении формы диэлектрического тела от шаровой. Для сфероида с малым эксцентриситетом можно вычислить поправку к частоте методом возмущений. Для этого воспользуемся результатом вычисления уровней энергии в слегка несферичной потенциальной яме (см. [14], с.171). В итоге оказывается, что

$$\omega_{nm} \simeq \omega_n \left[1 - \frac{\Delta a}{a} \left(2 + 3 \frac{n^2 - m^2}{n^2} \right) \right], \quad (48)$$

где Δa – отклонение наименьшей оси сфероида от первоначального радиуса шара; ω_n определяется формулами (46). Формула (48) показывает, что отклонение формы диэлектрического тела от шаровой не только снимает вырождение по индексу m , но и сдвигает частоту МШГ. Это обстоятельство делает возможным изменение частоты МШГ путем небольшого сжатия диэлектрического шара.

Авторами [15, 16] была продемонстрирована возможность синхронизации частоты МШГ с частотой перестраиваемого лазера. В основе применяемого ими метода перестройки частоты МШГ лежит осевое сжатие микросферы. В литературе обсуждаются и другие возможности перестройки частоты МШГ. Например, в работе [17] изучалась теоретически и экспериментально перестройка частоты МШГ путем сближения двух диэлектрических шаров. При сближении шаров между ними возникает связь за счет приповерхностного поля, что приводит к сдвигу собственных частот МШГ. Этот сдвиг тем больше, чем меньше расстояние между шарами.

Расщепление резонансных частот шаровых мод, соответствующих различным индексам m , экспериментально наблюдалось авторами работы [18]. Они объясняют наблюдаемое расщепление как результат сильного взаимодействия МШГ с подложкой, на которой укреплялись микросферы. Следует отметить работу [19], в которой определялось изменение частоты и добротности МШГ, связанное с изменением формы шара. Авторы задавали конфигурацию возмущения формы шара и вычисляли вызванные этими возмущениями поправки к частоте и добротности МШГ.

Отклонение диэлектрического тела от шаровой формы не снимает вырождения по знаку m : волны, бегущие во взаимно противоположных направлениях, обладают одинаковыми частотами. Этот тип вырождения снимается связью, возникающей между вырожденными по частоте волнами за счет их рассеяния. Рассеяние может быть вызвано как шероховатостью поверхности шара, так и неоднородностями плотности вещества. Этот тип рассеяния обычно называют рэлеевским.

6. Влияние неоднородностей диэлектрической проницаемости на частоту МШГ

В работе [20] наблюдалось и изучалось расщепление частоты двух МШГ, бегущих навстречу друг другу. При изучении МШГ-резонансов авторами работы [20] были обнаружены два пика интенсивности, частотное расстояние между которыми варьировалось от 270 кГц до нескольких мегагерц в зависимости от конкретного экземпляра микрошара (рис.6). К сожалению, авторы [20] не указывают, относятся ли эти вариации к разным экземплярам шаров одинакового диаметра или различные расщепления соответствуют шарам разного диаметра. Однако они утверждают, что расщепление нельзя объяснить объемным (рэлеевским) рассеянием, т. к. последнее может привести к расщеплению, лишь в 10 раз меньшему наблюдаемого. Это обстоятельство позволяет считать, что расщепление частоты возникает из-за взаимной связи вырожденных мод за счет поверхностного рассеяния. Нам не удалось обнаружить в литературе последовательного теоретического анализа расщепления частоты МШГ из-за рассеяния. Попытка такого расчета изложена ниже.

Шероховатости поверхности, как и объемные неоднородности, можно описать введением флуктуаций диэлектрической проницаемости материала шара. С этой целью уравнение для электрического вектора монохроматического поля запишем в виде

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k_0^2 \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (49)$$

выделив флуктуирующую часть диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$. Определим величину $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ так, что ее среднее значение по объему шара равно нулю. Правую часть этого уравнения при условии $\delta\varepsilon(\mathbf{r}) \ll \varepsilon$, можно рассматривать как возмущение и использовать хорошо известную методику решения такого рода задач [14]. Будем считать, что вырождение по модулю индекса m снято наличием малого эксцентриситета, и рассмотрим двукратно вырожденные моды по знаку m . Это волны с одинаковыми n и модулями m , но бегущие по окружности большого круга во взаимно противоположных направлениях.

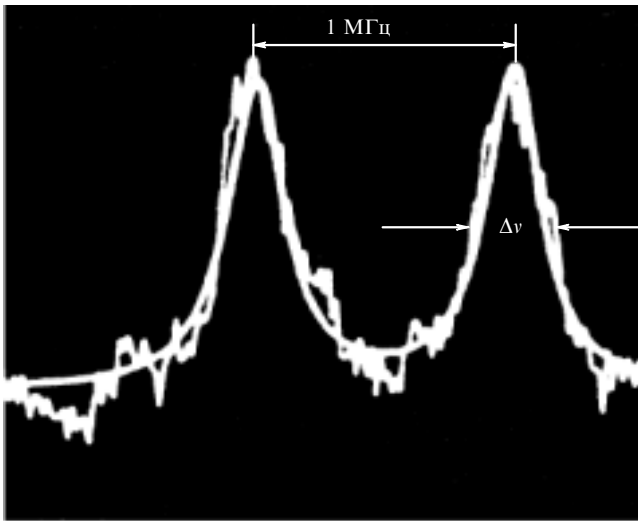


Рис.6. Расщепление частот МШГ из-за обратного рассеяния (эксперимент [20]); ширина пика $\Delta\nu = 270$ кГц.

Поправка первого приближения к собственным частотам двукратно вырожденных мод, согласно [14] (с.175, задача 1), дается формулой, которая в наших обозначениях имеет вид

$$\left(\frac{\delta\omega_n^{(1)}}{\omega_n}\right)^{E,H} = \frac{1}{4\varepsilon} \left\{ \delta\varepsilon_{mn}^{++} + \delta\varepsilon_{mn}^{--} \pm \left[(\delta\varepsilon_{mn}^{++} - \delta\varepsilon_{mn}^{--})^2 + 4|\delta\varepsilon_{mn}^{+-}|^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (50)$$

где

$$\delta\varepsilon_{mn}^{ij} = \frac{1}{N_{E,H}} \iiint \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{n}_{mn}^i \mathbf{n}_{mn}^{j*} \\ \mathbf{m}_{mn}^i \mathbf{m}_{mn}^{j*} \end{matrix} \right\} d^3r. \quad (51)$$

В формуле (51) каждый из индексов i и j может обозначать «+» или «-», произведение векторов $\mathbf{n}_{mn}^i \mathbf{n}_{mn}^{j*}$ соответствует модам Е-типа, а векторов $\mathbf{m}_{mn}^i \mathbf{m}_{mn}^{j*}$ – модам Н-типа. Параметр $N_{E,H}$ определяется нормировочным интегралом. Согласно формулам (П1.6), (П1.7) и (П2.6),

$$N_{E,H} = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{n}_{mn}^\pm \mathbf{n}_{mn}^{\pm*} \\ \mathbf{m}_{mn}^\pm \mathbf{m}_{mn}^{\pm*} \end{matrix} \right\} d\varphi = \frac{a^3}{2} \left\{ \begin{matrix} \frac{n+1}{2n+1} G_{v-1}(ka) + \frac{n}{2n+1} G_{v+1}(ka), \\ G_v(ka), \end{matrix} \right. \quad (52)$$

где

$$G_v(ka) = \frac{1}{ka} [J_v^2(ka) - J_{v-1}(ka)J_{v+1}(ka)]. \quad (53)$$

Флуктуации $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ являются, как правило, мелкомасштабными, быстро меняющимися по сравнению с изменением собственных функций диэлектрического шара. Поэтому $\delta\varepsilon_{mn}^{++} = \delta\varepsilon_{mn}^{--} = 0$, т. к. эти величины линейно зависят от $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$. Квадратичная по $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ величина

$$|\delta\varepsilon_{mn}^{+-}|^2 = \frac{1}{N_{E,H}^2} \iiint \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{n}_{mn}^{+*} \mathbf{n}_{mn}^- \\ \mathbf{m}_{mn}^{+*} \mathbf{m}_{mn}^- \end{matrix} \right\} d^3r \times \iiint \delta\varepsilon(\mathbf{r}') \left\{ \begin{matrix} \mathbf{n}_{mn}^{+*} \mathbf{n}_{mn}^- \\ \mathbf{m}_{mn}^{+*} \mathbf{m}_{mn}^- \end{matrix} \right\} d^3r' \quad (54)$$

отлична от нуля. Техника вычисления интегралов со случайной и быстро меняющейся величиной под знаком интеграла изложена, например, в книге [21]. Применяя эту технику, для случая объемного рассеяния получаем

$$|\delta\varepsilon_{mn}^{+-}|_V^2 = \frac{\langle \delta\varepsilon^2 \rangle_V}{N_{E,H}^2} \frac{4\pi}{3} a^3 \iiint \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{n}_{mn}^{+*} \mathbf{n}_{mn}^-|^2 \\ |\mathbf{m}_{mn}^{+*} \mathbf{m}_{mn}^-|^2 \end{matrix} \right\} d^3r. \quad (55)$$

Угловые скобки означают усреднение по объему шара V . Как правило, в достаточно совершенном материале объемные флуктуации уступают по величине поверхностным. Толщина рассеивающего поверхностного слоя обычно составляет несколько нанометров, что много меньше толщины слоя МШГ, поэтому

$$|\delta\varepsilon_{mn}^{+-}|_S^2 = 2\pi \frac{\langle \delta\varepsilon^2 \rangle_S}{N_{E,H}^2} a^4 d^2 \int_0^\pi \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{n}_{mn}^{+*} \mathbf{n}_{mn}^-|^2 \\ |\mathbf{m}_{mn}^{+*} \mathbf{m}_{mn}^-|^2 \end{matrix} \right\} \sin \theta d\theta, \quad (56)$$

где усреднение проводится по поверхности шара S , а под знаком интеграла стоят значения собственных векторов на поверхности.

Таким образом, частота моды, вырожденной по знаку m , расщепится на две частоты, одинаково сдвинутые от невозмущенной частоты в «красную» и «синюю» сторону:

$$\left(\frac{\delta\omega_n^{(1)}}{\omega_n}\right)^{E,H} = \pm \frac{d}{a} \left(\frac{\langle\delta\varepsilon^2\rangle_S}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} D_{mn}^{E,H}(ka), \quad (57)$$

где $\langle\delta\varepsilon^2\rangle_S$ – величина, определяемая параметрами шероховатой поверхности. Расчет $D_{mn}^{E,H}(ka)$ в общем случае является громоздким, но он сравнительно прост для МШГ ($m = n \gg 1$) и приводит к выражениям

$$D_{mn}^E \approx 4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{1}{ka} \frac{(n+1)J_{v-1}^2(ka) + nJ_{v+1}^2(ka)}{(n+1)G_{v-1}(ka) + nG_{v+1}(ka)}, \quad (58a)$$

$$D_{mn}^H \approx 4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{1}{ka} \frac{J_v^2(ka)}{G_v(ka)}. \quad (58б)$$

Исследование формул (58) показывает, что при изменении ka функция $D_{mn}^E(ka)$ осциллирует, но нигде не обращается в нуль, функция же $D_{mn}^H(ka)$ в нулях бesselевых функций обращается в нуль. Оказывается, что для мод Н-типа при больших индексах n собственные частоты близки к нулям бesselевых функций, поэтому в области резонанса расщепление частот для мод Н-типа очень мало. Подстройкой резонансной частоты Н-моды расщепление можно с большой степенью точности приблизить к нулю. Подстройкой частоты можно сделать весьма малым и расщепление частоты мод Е-типа. Дело в том, что минимумы функции $D_{mn}^E(ka)$ оказываются малыми при больших индексах n .

При возбуждениях электромагнитных колебаний в диэлектрическом шаре к нему приходится приближать возбуждающее устройство (см. последующие разделы обзора). Оно вносит возмущение в систему и может приводить, наряду с рассеянием, к расщеплению частоты МДШ. Это явление нуждается как в экспериментальном, так и теоретическом изучении.

7. Эффективный объем МШГ

Важной характеристикой моды является ее эффективный объем

$$V_{k\eta} = \frac{\int E_{k\eta}^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{E_{k\eta}^2(\mathbf{r}_{\max})}. \quad (59)$$

где k – индекс проекции поля, пробегающий значения r, θ, φ ; η – совокупный индекс моды (n, m, q). Определенный таким образом эффективный объем связан с конкретной проекцией поля и значением этой проекции в заданной точке \mathbf{r}_{\max} . Возможно и другое определение эффективного объема:

$$V_\eta = \frac{\int \left[\sum_k E_{k\eta}^2(\mathbf{r}) + \sum_k H_{k\eta}^2(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}}{\sum_k (E_{k\eta}^2 + H_{k\eta}^2)_{\max}}. \quad (60)$$

В этом случае V_η является характеристикой всей моды в целом. В зависимости от решаемой задачи возможно использование как формулы (59), так и (60). Для определенности мы подробнее остановимся на анализе соотношения (59). Интеграл в (59) сводится к произведению трех интегралов по координатам r, θ, φ . Интегралы по углам φ и θ вычисляются аналитически. В результате эффективные объемы для φ -компоненты поля моды Е-типа и θ -компоненты поля моды Н-типа имеют вид

$$V_{\varphi n}^E = \pi a^3 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} \frac{1}{f_{\varphi n}^E}, \quad V_{\theta n}^H = \pi a^3 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} \frac{1}{f_{\theta n}^H}, \quad (61)$$

где

$$\frac{1}{f_{\varphi n}^E} = \frac{\int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\xi'} [(ka\xi')^{1/2} J_v(ka\xi')] \right\}^2 d\xi'}{\left\{ \frac{d}{d\xi} [(ka\xi')^{1/2} J_v(ka\xi')] \right\}^2 \Big|_{\xi'=\xi'_{\max}}} + \frac{\int_1^{\xi'_0} \left\{ \frac{d}{d\xi'} [(ka\xi')^{1/2} H_v^{(1)}(ka\xi')] \right\}^2 d\xi'}{\left\{ \frac{d}{d\xi} [(ka\xi')^{1/2} J_v(ka\xi')] \right\}^2 \Big|_{\xi'=\xi'_{\max}}} \quad (62)$$

– радиальная часть интеграла (59), в который подставлена φ -компонента электрического поля Е-типа из формул (23); $\xi' = r/a$. Для вычисления $1/f_{\theta n}^H$ в интеграл (62) следует подставить θ -компоненту электрического поля Н-типа из формул (24). Интегрирование во втором интеграле в (62) производится до $\xi'_0 = (\varepsilon\mu)^{1/2}$. Однако этим интегралом можно пренебречь, т. к. внешняя часть поля из-за экспоненциального спада вносит в эффективный объем сравнительно малый вклад. В итоге, аппроксимируя функцию Бесселя функцией Эйри, получаем

$$\frac{1}{f_{\varphi n}^E} \approx \left(\frac{kr_{\max}}{ka}\right)^2 \frac{\int_0^1 \left[\frac{d\text{Ai}(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 d\zeta}{\left[\frac{d\text{Ai}(\zeta_{\max})}{d\zeta_{\max}} \right]^2}, \quad (63)$$

$$\frac{1}{f_{\theta n}^H} \approx \left(\frac{kr_{\max}}{ka}\right)^2 \frac{\int_0^1 \text{Ai}^2(\zeta) d\zeta}{\text{Ai}^2(\zeta_{\max})}.$$

Эффективные объемы для θ - и φ -компонент поля связаны соотношениями

$$V_{\theta n}^E = (\varepsilon/2) V_{\varphi n}^E, \quad V_{\varphi n}^H = (\varepsilon/2) V_{\theta n}^H, \quad (64)$$

где ε – основание натуральных логарифмов. Здесь мы используем в качестве индекса моды только индекс n , т. к. для МШГ $n = m$ и $q = 1$.

Можно ввести понятие не только эффективного объема, но и эффективной площади $S_{n\varphi, n\theta}^{E,H}$ и эффективной толщины $h_{n\varphi, n\theta}^{E,H}$ МШГ:

$$S_{n\varphi, n\theta}^{E,H} = 4\pi a^2 \left(\frac{\pi}{16n}\right)^{1/2}, \quad h_{n\varphi, n\theta}^{E,H} = \frac{a}{f_{n\varphi, n\theta}^{E,H}}. \quad (65)$$

Интегралы в формуле (63) удобно брать численно, подставляя в качестве волнового числа моды значение,

Табл.1. Моды Е-типа.

n	ka (39)	ka (46a)	$(kr)_{\max}$	$f_{\varphi n}^E$	$2.113n^{0.642}$
6000	6033.66	6033.67	6034.21	563	563
5000	5031.67	5031.68	5032.22	500	501
4000	4029.40	4029.40	4029.94	431	434
3000	3026.70	3026.71	3027.25	359	360
2000	2023.32	2023.33	2023.86	278	278

определяемое формулами (46), либо вычисляя это значение путем численного решения уравнений (39) или (40) в пренебрежении мнимым слагаемым в правой части уравнений. Эффективный объем мы вычислим, подставляя в знаменатель (63) значение φ -компоненты поля на поверхности шара. Радиальную координату r_{\max} , соответствующую максимуму φ -компоненты, определим численно. В табл.1 представлены результаты вычислений параметров МШГ для мод Е-типа.

В расчетах предполагалось, что диэлектрический шар сделан из кварца ($\varepsilon = 2.37$, $\mu = 1$). Во второй и третьей колонках представлены собственные частоты, полученные путем как численного решения уравнения (39), так и вычисления по формуле (46a). Радиальное положение $(kr)_{\max}$ максимума квадрата модуля соответствующей проекции приведено в четвертой колонке. Параметр $f_{\varphi n}^E$ и аппроксимирующее его выражение $2.113n^{0.642}$ даны в пятой и шестой колонках. Аппроксимирующее выражение подобрано эмпирически и, как видно из табл.1, достаточно хорошо описывает $f_{\varphi n}^E$ в зависимости от индекса моды n .

Из табл.1 следует, что формально максимум поля, определяемый функцией Бесселя, лежит вне шара: $(kr)_{\max} > ka$. Но поле вне шара описывается уже не функцией Бесселя, а функцией Ганкеля и сразу экспоненциально затухает при удалении от поверхности шара, поэтому максимум поля для мод Е-типа лежит на поверхности шара.

Проведенные вычисления позволяют предложить следующую простую формулу для эффективного объема:

$$V_{\varphi n}^E = \frac{0.63}{n^{1.142}} \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right). \quad (66)$$

Видно, что эффективный объем МШГ занимает малую долю общего объема шара и уменьшается примерно обратно пропорционально индексу моды. В табл.2 представлены параметры МШГ Н-типа.

Вычисления показывают, что квадрат модуля поля на поверхности шара практически не зависит от индекса моды и в несколько десятков раз меньше квадрата модуля поля в максимуме, который находится внутри шара. Параметр $(f_{\theta n}^H)_{\text{sur}}$, соответствующий полю на поверхности шара, мал и практически не зависит от индекса моды, по крайней мере в исследованном диапазоне индексов. Формула для эффективного объема моды Н-типа выглядит следующим образом:

Табл.2. Моды Н-типа.

n	ka (40)	ka (46b)	$(kr)_{\max}$	$f_{\theta n}^H$	$0.795n^{0.659}$	$(f_{\theta n}^H)_{\text{sur}}$
6000	6032.90	6032.91	6015.13	246	246	3.44
5000	5030.91	5030.92	5014.26	218	218	3.45
4000	4028.64	4028.64	4013.26	188	188	3.48
3000	3025.95	3025.95	3012.08	156	156	3.46
2000	2022.56	2022.57	2010.59	120	119	3.44

$$V_{\theta n}^H = \frac{0.24}{n^{1.159}} \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right). \quad (67)$$

Формулы (66) и (67) показывают, что при больших индексах мод эффективный объем МШГ составляет малую долю от полного объема шара.

8. Добротность МШГ

Мнимая часть собственного волнового числа (45) определяет коэффициент затухания поля данной моды, так что моды диэлектрического шара всегда являются затухающими. Это вызвано излучением волны из диэлектрического шара, и поэтому такое затухание может быть названо радиационным. Оно связано с тем, что, в отличие от плоской поверхности, не существует полного внутреннего отражения (ПВО) от искривленной поверхности. Но в какой степени можно все-таки считать, что МШГ формируется за счет ПВО? Ответ на этот вопрос может дать вычисление добротности моды, обусловленной радиационными потерями. По определению добротность Q_{nq} есть отношение действительной и мнимой частей собственного волнового числа. Из (45) следует, что

$$Q_{nq} = \frac{\text{Re } k_{0nq}}{\text{Im } k_{0nq}} = \frac{v}{2} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon\mu - 1)}{\mu} \right]^{1/2} \exp(2T_{nq}). \quad (68)$$

Корни ζ_q функции Эйри отрицательны, так что T_{nq} убывает с ростом номера корня q . По этой причине добротность моды достаточно резко уменьшается с увеличением q . Приведем конкретный пример: $\zeta_1 = -2.33811$, $\zeta_2 = -4.08795$ и из формул (44) и (68) следует, что для моды с индексом $n = 2000$ и $\varepsilon = 2.37$ (кварц) добротность Q_{n1} превышает добротность Q_{n2} более чем на 11 порядков.

Нетрудно подсчитать, чему равна добротность моды Q_{n1} кварцевого шара ($\varepsilon = 2.37$, $\mu = 1$) при $n = 2000$. Она оказывается астрономически огромной – порядка 10^{400} . С уменьшением индекса n добротность резко падает. Так, для кварцевого шара при $n = 66$ радиационная добротность оказывается равной $\sim 3 \times 10^{10}$, а при $n = 60$ она еще на порядок меньше.

Из формулы (45) следует, что при больших индексах мод для приближенных оценок можно пользоваться соотношением

$$k_0 \approx \frac{v}{a(\varepsilon\mu)^{1/2}}. \quad (69)$$

Индексу $n \approx 2000$ при радиусе кварцевого шара 100 мкм соответствует резонансная частота порядка 3×10^{15} Гц, а вычисленной выше добротности – фантастически огромное радиационное время жизни. Это означает, что хотя внутреннее отражение и неполное, но для достаточно больших n оно близко к полному. Поэтому МШГ приближенно, но с очень большой степенью точности можно считать волной ПВО. Такая трактовка тем ближе к истине, чем больше индекс n .

При больших n нерезонансные потери фактически определяют добротность МДШ. Существуют другие механизмы, которые обуславливают потери в МШГ. Это прежде всего рассеяние электромагнитной волны на шероховатостях поверхности шара и объемное рассеяние на

неоднородностях плотности вещества. Возможно также существование поглощающих примесей как в объеме шара, так и на его поверхности. В связи с этим удобно ввести парциальные добротности моды Q_j , связанные с каждым типом потерь. Полная добротность Q моды определяется хорошо известным соотношением

$$\frac{1}{Q} = \sum_j \frac{1}{Q_j}. \quad (70)$$

Лучшие современные оптические волноводы, изготовленные из кварца, имеют рэлеевский коэффициент рассеяния около 0.2 дБ/км при длине волны излучения около 1.5 мкм. Такому коэффициенту рассеяния соответствует добротность $Q_{sc} \approx 10^{11}$, что является верхним пределом добротности МШГ. Как показывает опыт, реально достижимая добротность заметно меньше.

Экспериментально добротность мод МШГ изучалась в работах [20, 22, 23], где измерялись добротности кварцевых микросфер, изготовленных в вакууме. Максимальные добротности МШГ для микросфер, находящихся в вакууме, оказались равными 1.4×10^9 [20], 4.9×10^9 [23] и $(8 \pm 1) \times 10^9$ [22].

В работах [22, 23] было обнаружено изменение добротности МШГ при контакте кварцевых микросфер, изготовленных в вакууме, с атмосферным воздухом. Согласно результатам работы [22], добротность кварцевой микросферы, вынесенной из вакуума в атмосферу, уменьшалась в 4–5 раз за время порядка четырех минут, а затем сохраняла свое значение в течение многих часов. Этот эффект объясняется поглощением излучения нанослоем молекул (прежде всего воды), адсорбируемых поверхностью микросфера. Авторы [23] экспериментально подтверждают данный эффект. Как известно, добротность моды резонатора связана с коэффициентом поглощения волны по интенсивности κ в среде резонатора соотношением

$$Q = \frac{2\pi}{\kappa\lambda} (\varepsilon\mu)^{1/2}. \quad (71)$$

Парциальная добротность МШГ микросфера, обусловленная поглощением излучения в слое адсорбированных молекул, может быть вычислена путем умножения добротности (71) на отношение толщины поглощающего слоя δ_{ab} к эффективной толщине слоя МШГ. В результате получим следующую формулу:

$$Q_{ab}^{E,H} \approx \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda\kappa_{ab}(\lambda)} \frac{1}{\delta_{ab}f_n^{E,H}} a, \quad (72)$$

где $\kappa_{ab}(\lambda)$ – коэффициент поглощения адсорбированными молекулами воды.

В работе [23] экспериментально изучалась зависимость добротности МШГ от диаметра микросфера, помещенного в вакуум, и длины волны излучения. Диаметр шара варьировался от 100 до 800 мкм. На рис.7 приведены экспериментальные данные, полученные в [23]. Сплошной кривой показана зависимость добротности от диаметра шара, вычисленная по формуле

$$Q_{sc} = \frac{3\varepsilon(\varepsilon + 2)^2}{(4\pi)^3(\varepsilon - 1)^{5/2}} \frac{\lambda^{7/2}(2a)^{1/2}}{d^2 B_{rg}^2}. \quad (73)$$

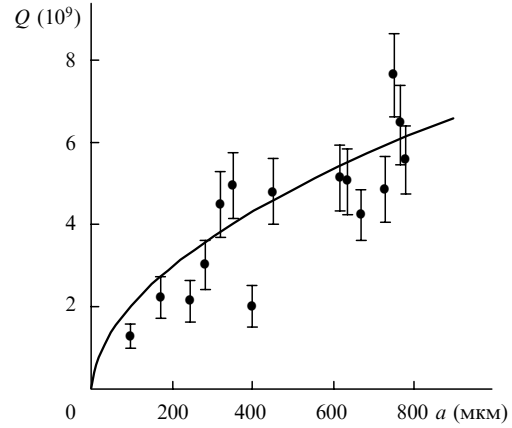


Рис.7. Экспериментальная [23] (точки) и рассчитанная по формуле (73) зависимости добротности Q МШГ от радиуса шара a .

Здесь d – средняя высота поверхностных неоднородностей (толщина рассеивающего слоя); B_{rg} – средний размер неоднородностей вдоль координаты на поверхности. Формула (73) приведена в [23] без вывода и ссылок на другие работы. Попробуем обосновать ее.

Коэффициент экстинкции κ_{sc} , обусловленной рассеянием на неоднородностях поверхности, можно вычислить, если рассматривать поверхность как совокупность независимых рассеивающих частиц, линейные размеры которых значительно меньше длины волны. В рамках такой модели $\kappa_{sc} = \sigma_{sc}N$, где σ_{sc} – сечение рассеяния электромагнитной волны одной частицей, N – плотность рассеивающих частиц. Сечение рассеяния вычислено в [21]:

$$\sigma_{sc} = 24\pi^3 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\Omega^2}{\lambda^4}, \quad (74)$$

где Ω – объем рассеивающей частицы. При плотной упаковке частиц объем Ω пропорционален N^{-1} . Коэффициент пропорциональности должен определяться экспериментально, но физически ясно, что он порядка единицы. Поскольку МШГ сосредоточена в слое, толщина которого больше длины волны, то эффективный коэффициент рассеяния МШГ

$$\kappa_{eff} = \kappa_{sc} \frac{d}{h}, \quad (75)$$

где h – эффективная толщина слоя МШГ (индексы моды у h опущены). Подставляя (75) и (65) в (71), получаем

$$Q_{sc}^{E,H} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{12\pi^2} \left(\frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} \right)^2 \frac{\lambda^3}{\Omega} \frac{a}{df_n^{E,H}}. \quad (76)$$

Это соотношение несколько отличается от формулы (73). В работе [23] толщина слоя МШГ полагалась равной $(2\lambda a)^{1/2}$, в то время как в формулу (76) подставлено более строгое ее значение. Тем не менее для волн Е-типа формулы (73) и (76) дают функционально близкие зависимости добротности от диаметра диэлектрического шара, т. к. $f_{n\varphi,n\theta}^E \propto n^{0.642}$, что почти эквивалентно корневой зависимости. В свою очередь, $n \propto a$, и можно считать, что добротности (73) и (76) практически одинаково зависят от радиуса микросферы.

Для волн Н-типа величины $f_{n\varphi,n\theta}^H$, соответствующие полю на поверхности шара, практически не зависят от

индекса моды, а значит и от радиуса шара. Поэтому добротность для МШГ Н-типа должна расти линейно с радиусом шара. Однако волны Н-типа возбуждаются менее эффективно из-за удаленности максимума электрического поля от поверхности шара.

В работе [24] со ссылкой на публикацию [25] для добротности МШГ приводится формула

$$Q_{sc} = \frac{3}{16\delta^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{\pi^2 \lambda^4} (2a)^{10} \right]^{1/3}, \quad (77)$$

которая дает очень резкую зависимость добротности от диаметра диэлектрического шара. Результаты эксперимента [23] не подтверждают эту формулу. Хотя экспериментальные данные (рис.7) имеют достаточно большой статистический разброс, они, бесспорно, находятся в противоречии с формулой (77), предлагающей зависимость добротности от радиуса шара в виде $(2a)^{10/3}$.

Авторы [23] измеряли также статистические параметры неоднородностей поверхности изготавливаемых ими шаров из плавленного кварца и получили $d = (1.7 \pm 0.5)$ нм и $B = (5 \pm 0.5)$ нм. Подстановка этих значений в формулу (73) при $\lambda = 800$ нм и $a = 400$ мкм дает $Q_{sc} = (7.5 \pm 5) \times 10^9$, что удовлетворительно согласуется с экспериментальным значением $\sim 8 \times 10^9$. Практически то же значение получается и из формулы (76).

Хотя формулы (73) и (76) неплохо описывают зависимость добротности от радиуса микросферы, они не дают правильного описания зависимости добротности от длины волны. Эксперимент [23] показал, что добротность практически не зависит от длины волны в диапазоне 679–850 нм, в то время как формулы (73) и (76) предсказывают более чем двукратное увеличение добротности при изменении длины волны от 679 до 850 нм. Таким образом, теория потерь в МШГ ждет своего дальнейшего развития. Некоторые соображения по этому поводу приведены ниже.

В разд.6 рассчитана обусловленная рассеянием поправка первого приближения к частоте моды. Для вычисления добротности, обусловленной рассеянием, необходима поправка к частоте во втором приближении. Согласно [14] она описывается формулой

$$\left(\frac{\delta\omega_n^{(2)}}{\omega_n} \right)^{E,H} = \frac{k_0^2}{2\varepsilon} \sum_{n'} \frac{\delta\varepsilon_{n,n'} \delta\varepsilon_{n',n}}{k_n^2 - k_{n'}^2}. \quad (78)$$

Видно, что эта поправка комплексна, т. к. собственные значения k_n комплексны. Поэтому $\text{Re}(\delta\omega_n^{(2)}/\omega_n)^{E,H}$ определяет поправку к частоте в следующем приближении, а

$$\text{Im} \left(\frac{\delta\omega_n^{(2)}}{\omega_n} \right)^{E,H} = \frac{1}{Q_{scn}} \quad (79)$$

определяет добротность МШГ, обусловленную рассеянием на шероховатостях поверхности или объемных неоднородностях плотности вещества.

Как уже отмечалось, мнимая часть k_n определяет радиационное затухание МШГ. Поскольку это затухание мало, то мнимая часть k_n или $k_{n'}$ очень мала при больших n и n' . Но если n' мало, то мнимые и действительные части собственных чисел сравнимы по величине. Значит, основной вклад в затухание дают члены с малыми n' .

Собственные значения с малыми индексами значительно меньше собственных значений с большими индек-

сами, поэтому можно написать приближенное соотношение

$$\left(\frac{1}{Q_{scn}} \right)_{E,H} \simeq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n'} \delta\varepsilon_{nn'} \delta\varepsilon_{n'n} \frac{k_{n'}' k_{n'}''}{k_{0n}^{\prime 2}}, \quad (80)$$

где $k_{n'}'$ и $k_{n'}''$ – действительные и мнимые части собственных чисел.

Формула (80) является более строгим выражением для добротности МШГ, обусловленной рассеянием, чем формула (73) или (76). Анализ ее как функции длины волны и радиуса микросферы требует специального и, скорее всего, численного исследования. Публикаций на эту тему нами не обнаружено. Наши оценки показывают, что добротность (80) растет с увеличением длины волны как $\sim \lambda^{1/3}$. Это значит, что при изменении длины волны в интервале 600–800 нм добротность меняется лишь в пределах 10%. Таким образом, изменение добротности с длиной волны, предсказываемое формулой (80), не противоречит экспериментальным результатам работы [23].

Авторы [26] экспериментально изучали время жизни фотонов в каплях этанола радиусом около 45 мкм. Ими отмечается сильное влияние вынужденного комбинационного рассеяния на добротность мод, возбуждавшихся в каплях.

Подведем итоги сказанному. МШГ выделяются среди других МДШ прежде всего высокой добротностью и малым эффективным объемом. С уменьшением индекса m эффективный объем моды возрастает, и при $m = 0$ он в \sqrt{n} раз превышает объем МШГ, у которой $m = n$. Как мы видели, радиационные потери не зависят от индекса m . Но потери из-за поверхностного рассеяния увеличиваются с уменьшением m , т. к. эффективная площадь моды на поверхности шара с уменьшением m возрастает. Предельная добротность МШГ ограничена объемным рэлеевским рассеянием и приближается к значению порядка 10^{11} . Однако практически достижимой следует считать добротность порядка $(1 - 5) \times 10^9$: она оказывается ограниченной рассеянием излучения на неоднородностях поверхности диэлектрического шара. В связи с этим интересны были бы эксперименты с жидкими кварцевыми каплями, у которых, быть может, поверхностное рассеяние меньше, чем у затвердевших микрошаров.

9. Возбуждение МДШ плоской волной

Использование МШГ для решения различных научных и прикладных задач тесно связано с проблемой их возбуждения. На практике применяется возбуждение МШГ приповерхностными полями. Это могут быть поля приповерхностных волн ПВО, планарного и нитевидного волноводов. Возбуждение МШГ плоской волной не применяется. Опыт показывает, что плоская волна практически не возбуждает МШГ. Чтобы понять, почему так происходит, необходимо последовательно рассмотреть проблему возбуждения МШГ внешним источником излучения.

Возбуждение МШГ есть частный случай проблемы возбуждения любых МДШ. Вопрос о возбуждении МДШ плоской волной может быть решен на основе теории дифракции этой волны на диэлектрической сфере, развитой Г.Ми [2]. Метод решения проблемы, примененный Ми, стал типичным для такого рода задач и состоит вот в чем. Внешняя волна представляется как суперпози-

ция МДШ. В книге [4] со ссылкой на работу Ми [2] приводятся следующие формулы разложения плоской волны, распространяющейся вдоль оси z и поляризованной по оси x :

$$E_x = E_0 \exp(-i\omega t) \sum_1^\infty i^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[m_{1n}^\pm(1;k) - i n_{1n}^\pm(1;k) \right]. \quad (81)$$

Здесь мы ограничились записью лишь электрической компоненты электромагнитного поля, т.к. магнитная компонента может быть выписана без особого труда с использованием уравнения

$$\mathbf{H} = i \frac{c}{\omega} \text{rot} \mathbf{E} \quad (82)$$

и соотношений

$$\text{rot} [m_{mn}^\pm(\sigma;k)] = k n_{mn}^\pm(\sigma;k), \quad \text{rot} [n_{mn}^\pm(\sigma;k)] = k m_{mn}^\pm(\sigma;k). \quad (83)$$

Волна, отраженная диэлектрическим шаром (индекс r), и волна, наведенная внутри шара (индекс t), также представляются в виде суперпозиции МДШ:

$$E_r = E_0 \exp(-i\omega t) \sum_1^\infty i^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n^r m_{1n}^\pm(2;k) - i b_n^r n_{1n}^\pm(2;k) \right], \quad (84)$$

$$E_t = E_0 \exp(-i\omega t) \sum_1^\infty i^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n^t m_{1n}^\pm(1;k) - i b_n^t n_{1n}^\pm(1;k) \right]. \quad (85)$$

Коэффициенты $a_n^{r,t}$ и $b_n^{r,t}$ подлежат определению. Для этого используется то обстоятельство, что суммарное поле падающей и отраженной от шара волн и поле, наведенное в диэлектрическом шаре, должны удовлетворять условиям непрерывности тангенциальных компонент электрических и магнитных полей на границе шара ($r = a$). Эти граничные условия приводят к двум парам неоднородных уравнений:

$$a_n^t \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} (ka)^{1/2} J_\nu(ka) - a_n^r (k_0a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0a) = (k_0a)^{1/2} J_\nu(k_0a), \quad (86a)$$

$$a_n^t \frac{1}{\mu} [(ka)^{1/2} J_\nu(ka)]' - a_n^r [(k_0a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0a)]' = [(k_0a)^{1/2} J_\nu(k_0a)]', \quad (86b)$$

$$b_n^t \frac{1}{\mu} (ka)^{1/2} J_\nu(ka) - b_n^r (k_0a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0a) = (k_0a)^{1/2} J_\nu(k_0a), \quad (87a)$$

$$b_n^t \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} [(ka)^{1/2} J_\nu(ka)]' - b_n^r [(k_0a)^{1/2} H_\nu^{(1)}(k_0a)]' = [(k_0a)^{1/2} J_\nu(k_0a)]'. \quad (87b)$$

Уравнения (86) и (87) позволяют определить искомые коэффициенты:

$$a_n^t = \frac{\alpha_{n0} \beta'_{n0} - \alpha'_{n0} \beta_{n0}}{\alpha_n \beta'_{n0} - \alpha'_n \beta_{n0}}, \quad b_n^t = \frac{\alpha'_{n0} \beta_{n0} - \alpha_{n0} \beta'_{n0}}{\alpha'_n \beta_{n0} - \alpha_n \beta'_{n0}}, \quad (88)$$

$$a_n^r = -\frac{\alpha_n \alpha'_{n0} - \alpha'_n \alpha_{n0}}{\alpha_n \beta'_{n0} - \alpha'_n \beta_{n0}}, \quad b_n^r = -\frac{\alpha'_n \alpha_{n0} - \alpha_n \alpha'_{n0}}{\alpha'_n \beta_{n0} - \alpha_n \beta'_{n0}}, \quad (89)$$

где для упрощения записи введены обозначения

$$\alpha_n = (ka)^{1/2} J_{n+1/2}(ka), \quad \alpha_{n0} = (k_0a)^{1/2} J_{n+1/2}(k_0a), \quad (90)$$

$$\beta_n = (ka)^{1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(ka), \quad \beta_{n0} = (k_0a)^{1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(k_0a);$$

штрих означает полную производную по аргументу, от которого зависит функция, т.е. по ka или k_0a . Выражения (88) и (89) называют коэффициентами Ми.

Как следует из соотношений (84) и (85), плоская волна возбуждает МДШ с различными индексами n . Однако подбором частоты возбуждающей волны, близкой к собственной частоте МДШ с определенным индексом n , можно возбудить преимущественно данную моду. Это хорошо видно из формул (88) и (89). Если знаменатели указанных формул приравнять нулю, то получатся характеристические уравнения (26) и (27). Это значит, что действительная часть знаменателей в формулах (88), (89) обращается в нуль при подстановке в них частоты, равной действительной части собственного значения волнового числа (46а) или (46б). Остается в знаменателях (88), (89) лишь мнимая часть, которая, как мы видели, по модулю намного меньше действительной. Эта мнимая часть соответствует радиационным потерям, которые в МШГ малы и не определяют реальную добротность МШГ. Поэтому коэффициенты Ми для МШГ окажутся сильно завышенными, если в знаменателях (88), (89) оставить мнимую часть, соответствующую только радиационным потерям. Для оценки реальных коэффициентов Ми в области резонанса можно использовать следующую процедуру.

Обозначим знаменатели в формулах (88) и (89) символом $D_n^{(a,b)}(\omega)$. Разложим их в ряд Тейлора вблизи резонанса и учтем, что в резонансной точке $D_n^{(a,b)}(\omega'_n) = 0$. Тогда

$$D_n^{(a,b)}(\omega) = \left(\omega'_n - \omega + i \frac{\omega'_n}{Q_n} \right) \frac{dD_n^{(a,b)}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega'_n}, \quad (91)$$

где ω'_n – действительная часть собственной частоты моды с индексом n . Если под Q_n подразумевать полную добротность МШГ, обусловленную всеми видами потерь, то для знаменателей коэффициентов Ми получаются приближения, хорошо описывающие реальную амплитуду возбуждения.

Обратим внимание на то, что формулы (84) и (85) содержат слагаемые только с индексом $m = 1$. Возникает впечатление, что плоская волна не может возбудить МДШ с индексом $m > 1$, а значит, и МШГ. Но это ошибочное впечатление. Формулы (84) и (85) говорят

только о том, что волны с азимутальным индексом $m > 1$ не могут возбудиться в азимутальной плоскости, перпендикулярной направлению распространения плоской волны. Выберем теперь азимутальную плоскость параллельной направлению распространения плоской волны. Угол θ старой системы координат связан с координатными углами θ' , φ' новой системы соотношением $\cos \theta = \sin \theta' \cos \varphi'$.

Согласно так называемой теореме сложения [26], полиномы Лежандра в старой системе координат выражаются в новой системе через сумму присоединенных полиномов Лежандра с различными (в том числе и большими) азимутальными индексами. В результате среди этой суммы содержатся слагаемые и с $m = n$, т. е. МШГ.

Однако для расчета коэффициентов возбуждения МШГ плоской волной мы не будем проделывать громоздкого преобразования формул от одной системы координат к другой, а рассмотрим возбуждение МШГ волнами планарного диэлектрического волновода и призмы ПВО. Возбуждение же МШГ плоской волной будет следовать из полученных формул как частный случай.

10. Возбуждение МШГ волноводной волной

На практике МШГ возбуждаются приповерхностными волнами скользящего падения на поверхность шара. Такие волны можно создать, используя, например, призму ПВО, а также диэлектрический волновод круглого или прямоугольного сечения (рис. 8). Приповерхностные поля в призме ПВО и волноводах экспоненциально уменьшаются при удалении от поверхности призмы (волновода). Изменяя расстояние от призмы (волновода) до поверхности шара, можно управлять степенью возбуждения МШГ.

Проблеме возбуждения МШГ посвящены десятки работ, многие из которых появились в самое последнее время [27–41]. Задачу возбуждения МШГ с помощью волновода или призмы можно было бы решать, разлагая возбуждающую волну по собственным модам составной системы шар–волновод или шар–призма. Но задача о вычислении мод составной системы математически очень сложна и до сих пор не решена. Поэтому следует идти приближенным путем, пренебрегая влиянием волн, отраженных шаром, на исходные волны волновода или призмы.

В рамках этого приближения рассмотрим возбуждение МШГ волной плоского диэлектрического волновода. Выберем начало системы координат в центре диэлектрического шара (рис. 8). В соответствии с выбранной ориен-

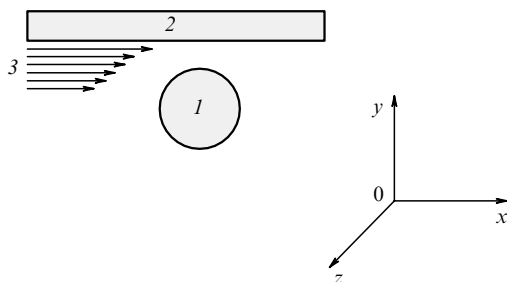


Рис. 8. Схема возбуждения МШГ приповерхностной волной планарного волновода: 1 – микрошар; 2 – планарный диэлектрический волновод; 3 – приповерхностная волна волновода.

тацией осей правовинтовая МШГ имеет азимутальную зависимость в виде $\exp(-in\varphi)$, а левовинтовая – в виде $\exp(in\varphi)$.

Волноводное поле ТМ-типа, примыкающее к поверхности волновода, обращенной к шару, описывается формулами [6]

$$E_x^{\text{wg}} = -A\gamma \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx), \quad H_x^{\text{wg}} = 0, \quad (92a)$$

$$E_y^{\text{wg}} = iAh \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx), \quad H_y^{\text{wg}} = 0, \quad (92б)$$

$$E_z^{\text{wg}} = 0, \quad H_z^{\text{wg}} = iA \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx), \quad (92в)$$

где A – максимальное значение x -компоненты поля внутри волновода; l – кратчайшее расстояние от центра шара до ближайшей стенки волновода. Волновые параметры γ, g, h связаны соотношениями

$$\gamma^2 + g^2 = k_0^2(\epsilon\mu - 1), \quad h^2 - \gamma^2 = k_0^2, \quad (93)$$

$$\gamma a_p = \frac{1}{\epsilon_{\text{wg}}} g a_p \begin{cases} \tan g a_p, \\ -\cot g a_p, \end{cases}$$

где ϵ_{wg} – диэлектрическая проницаемость материала волновода; a_p – толщина волноводной пластины. Смысл параметров γ и h ясен из формул (92). Параметр g определяет поперечную структуру поля внутри волновода. Соответствующие формулы для поля внутри волновода не выписаны, т. к. они не потребуются в дальнейшем. Более подробные сведения о структуре поля планарного диэлектрического волновода можно найти в книге [6].

Как было показано ранее (см. разд. 4), амплитуда волны диэлектрического шара убывает в e раз на расстоянии $r = r_b = \lambda/[2\pi(\epsilon\mu - 1)^{1/2}]$ от его поверхности. Поле волновода затухает в e раз на расстоянии $r_{\text{wg}} = \gamma^{-1} = \{[2\pi(\epsilon\mu - 1)^{1/2}/\lambda]^2 - g^2\}^{-1}$ от границы волновода. Нетрудно видеть, что если волновод и диэлектрический шар сделаны из одинакового материала, то всегда $r_{\text{wg}} > r_b$. Поэтому принятое выше приближение, связанное с пренебрежением влияния отраженной от шара волны на поле волновода имеет под собой вполне реальную почву.

Первым шагом в разложении волноводного поля по собственным сферическим векторам является преобразование проекций поля из декартовой системы координат в систему координат, привязанную к поверхности сферы. Орты декартовой системы координат выражаются через орты системы координат на сфере следующим образом:

$$e_x = e_r \sin \theta \cos \varphi + e_\theta \cos \theta \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi,$$

$$e_y = e_r \sin \theta \sin \varphi + e_\theta \cos \theta \sin \varphi + e_\varphi \cos \varphi, \quad (94)$$

$$e_z = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta.$$

В силу этих соотношений поле волновода E^{wg} (92) в системе координат, привязанной к поверхности сферы, имеет следующие проекции:

$$E_r^{\text{wg}} = B \sin \theta \exp(ihx + \gamma y)(-\gamma \cos \varphi + ih \sin \varphi),$$

$$H_r^{\text{wg}} = iB \frac{\gamma^2}{k_0} \cos \theta \exp(ihx - \gamma y), \quad (95a)$$

$$E_\theta^{\text{wg}} = B \cos \theta \exp(ihx + \gamma y)(-\gamma \cos \varphi + ih \sin \varphi), \quad (95б)$$

$$H_\theta^{\text{wg}} = -iB \sin \theta \exp(ihx - \gamma y),$$

$$E_\varphi^{\text{wg}} = B \exp(ihx + \gamma y)(\gamma \sin \varphi + ih \cos \varphi), \quad (95в)$$

$$H_\varphi^{\text{wg}} = 0,$$

причем $B = A \exp(-\gamma l)$.

Теперь представим поле (95) в виде разложения по шаровым векторам:

$$\mathbf{E}^{\text{wg}} = B \exp(-i\omega t) \sum_{m,n} \left[\alpha_{mn}^\pm \mathbf{m}_{mn}^\pm(1; k) + \beta_{mn}^\pm \mathbf{n}_{mn}^\pm(1; k_0) \right], \quad (96)$$

$$\mathbf{H}^{\text{wg}} = -iB \exp(-i\omega t) \sum_{m,n} \left[\alpha_{mn}^\pm \mathbf{n}_{mn}^\pm(1; k) + \beta_{mn}^\pm \mathbf{m}_{mn}^\pm(1; k_0) \right],$$

где α_{mn}^\pm и β_{mn}^\pm – коэффициенты разложения волноводного поля. Присутствие в разложении (96) шаровых векторов только с индексом $\sigma = 1$ (т. е. функций Бесселя, см. Приложение 1) обусловлено тем, что амплитуда волноводного поля конечна во всем пространстве, так что в сумме (96) не могут присутствовать функции Ганкеля, имеющие особенность в нуле.

Коэффициенты α_{mn}^\pm и β_{mn}^\pm определяются либо парой скалярных произведений $\mathbf{E}^{\text{wg}} \mathbf{m}_{mn}^{\pm*}(1; k)$ и $\mathbf{E}^{\text{wg}} \mathbf{n}_{mn}^{\pm*}(1; k)$, либо парой $\mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{m}_{mn}^{\pm*}(1; k)$ и $\mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{n}_{mn}^{\pm*}(1; k)$, проинтегрированных по углу θ с весовым множителем $\sin \theta$ в пределах $0 - \pi$ и по углу φ в пределах $0 - 2\pi$. В дальнейших расчетах мы предпочтем иметь дело с магнитной парой, т. к. магнитное поле, согласно (95), имеет более простую структуру.

В дальнейших вычислениях мы ограничимся МШГ ($m = n$). Это оправдано следующими обстоятельствами. Применение МДШ чаще всего ориентировано на высокочастотные МШГ. Для тела идеальной шаровой формы наряду с МШГ должны возбуждаться все моды с индексами $m \leq n$. Но поскольку реальное тело никогда не является идеальным шаром, вырождение по m снимается (см. (48)). Относительная ширина МШГ резонанса $\Delta\omega_n/\omega_n = Q^{-1}$, в то время как относительный частотный интервал между ближайшими модами с $m = n$ и $m = n - 1$ есть $\Delta\omega_{n,n-1}/\omega_n = 6(\Delta a/an)$. Если добротность МШГ порядка $10^9 - 10^8$, то даже для $\Delta a/a \approx 10^3 - 10^4$ разность соседних частот оказывается далеко за пределами резонанса.

Составим скалярные произведения, необходимые для вычисления коэффициентов ряда (96), используя соотношения (95) и табл. П1.2 Приложения 1. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{n}_{mn}^{\pm*} &= (-1)^{n+1} n(2n-1)!! \exp(ihx + \gamma y \mp in\varphi) \\ &\times \sin^n \theta \cos \theta \frac{J_{v+1}(k_0 r)}{(k_0 r)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{m}_{mn}^{\pm*} &= i(-1)^n n(2n-1)!! \exp(ihx + \gamma y \mp in\varphi) \\ &\times \sin^n \theta \frac{J_v(k_0 r)}{(k_0 r)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (98)$$

Чтобы выразить приповерхностную волну $\exp(ihx + \gamma y)$ через функции Бесселя, используем разложение [26]

$$\exp(iz \sin \theta \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z \sin \theta) \exp(im\varphi). \quad (99)$$

Преобразуем выражение $i hx + \gamma y$ так, чтобы оно стало подобным показателю экспоненты в левой части равенства (99):

$$i hx + \gamma y = i(h^2 - \gamma^2)^{1/2} r \sin \theta \cos(\varphi + i\psi), \quad (100)$$

$$\sinh \psi = \frac{\gamma}{(h^2 - \gamma^2)^{1/2}}.$$

Если в левую часть формулы (99) подставить выражение

$$\exp[i(h^2 - \gamma^2)^{1/2} r \sin \theta \cos(\varphi + i\psi)],$$

то получим

$$\exp(ihx + \gamma y) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i^m \left(\frac{h + \gamma}{h - \gamma} \right)^m J_m(k_0 r \sin \theta) \exp(im\varphi). \quad (101)$$

Формула (101) является ключевой для дальнейших вычислений. Скалярные произведения (97) и (98) нужно проинтегрировать по углу φ и углу θ с весом $\sin \theta$. Назовем МШГ попутной, если она распространяется в том же направлении, что и возбуждающая волна. МШГ противоположного направления назовем встречной. Интегрирование по азимутальному углу оставляет в сумме (101) только слагаемые с индексом $m = n$ для попутной МШГ и с индексом $m = -n$ для встречной МШГ, поскольку

$$\int_0^{2\pi} \exp(im\varphi) \exp(\mp in\varphi) d\varphi = 2\pi \delta_{m,\pm n}. \quad (102)$$

В связи с этим дальнейший расчет связан с вычислением интегралов

$$\int_0^\pi \sin^n \theta \cos \theta J_{\pm n}(k_0 r \sin \theta) d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \sin^n \theta J_{\pm n}(k_0 r \sin \theta) d\theta.$$

Используя формулы (П2.7) Приложения 2, находим

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{n}_{mn}^{\pm*} \sin \theta d\theta = 0, \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{H}^{\text{wg}} \mathbf{m}_{mn}^{\pm*} \sin \theta d\theta \\ = i(-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} n(2n-1)!! \frac{J_v^2(k_0 r)}{k_0 r}. \end{aligned} \quad (104)$$

Теперь, используя (104) и формулы (П1.4) и (П1.7) Приложения 1, вычисляем коэффициенты разложения

$$\beta_{mn}^\pm = i^n (-1)^{n+1} 2\pi k_0 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{2n(2n-1)!!}{2n+1} \left(\frac{h + \gamma}{h - \gamma} \right)^{\pm n/2}. \quad (105)$$

Для расчета полей, возбуждаемых волноводным полем внутри шара и вне его, представим их в виде

$$\mathbf{E}_t = E_0 \exp(-i\omega t) \sum_{m,n} \left[A_{mn}^{\pm} \mathbf{m}_{mn}^\pm(1; k) + B_{mn}^{\pm} \mathbf{n}_{mn}^\pm(1; k) \right], \quad (106)$$

$$E_r = E_0 \exp(-i\omega t) \sum_{m,n} \left[A_{mn}^{r\pm} m_{mn}^{\pm}(2; k) + B_{mn}^{r\pm} n_{mn}^{\pm}(2; k) \right]. \quad (107)$$

Коэффициенты разложения $A_{mn}^{r\pm, t\pm}$ и $B_{mn}^{r\pm, t\pm}$ определяются граничными условиями на поверхности шара, которые приводят к уравнениям

$$B_{mn}^{t\pm} \frac{1}{\mu} (ka)^{1/2} J_v(ka) - B_{mn}^{r\pm} (k_0 a)^{1/2} H_v^{(1)}(k_0 a) = \beta_{mn}^{\pm} (k_0 a)^{1/2} J_v(k_0 a), \quad (108a)$$

$$B_{mn}^{t\pm} \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} [(ka)^{1/2} J_v(ka)]' - B_{mn}^{r\pm} [(k_0 a)^{1/2} H_v^{(1)}(k_0 a)]' = \beta_{mn}^{\pm} [(k_0 a)^{1/2} J_v(k_0 a)]' \quad (108b)$$

для мод Е-типа и к уравнениям

$$A_{mn}^{t\pm} \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} (ka)^{1/2} J_v(ka) - A_{mn}^{r\pm} (k_0 a)^{1/2} H_v^{(1)}(k_0 a) = 0, \quad (109a)$$

$$A_{mn}^{t\pm} \frac{1}{\mu} [(ka)^{1/2} J_v(ka)]' - A_{mn}^{r\pm} [(k_0 a)^{1/2} H_v^{(1)}(k_0 a)]' = 0 \quad (109b)$$

для мод Н-типа. Решая эти уравнения, находим

$$A_{mn}^{r\pm, t\pm} = A_{mn}^{r\pm, t\pm} = 0, \quad (110a)$$

$$B_{mn}^{r\pm} = \beta_{mn}^{\pm} b_n^r = i^n (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \left(\frac{h+\gamma}{h-\gamma} \right)^{\pm n/2} \exp(-\gamma l) b_n^r, \quad (110b)$$

$$B_{mn}^{t\pm} = \beta_{mn}^{\pm} b_n^t = i^n (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \left(\frac{h+\gamma}{h-\gamma} \right)^{\pm n/2} \exp(-\gamma l) b_n^t. \quad (110b)$$

Из формулы (110) следует важное утверждение: для вычисления коэффициентов возбуждения МШГ (и вообще МДШ) нужно коэффициент разложения возбуждающей волны по шаровым векторам умножить на соответствующий коэффициент Ми [27].

Как следует из формул (110), ТМ-волна планарного диэлектрического волновода не возбуждает МШГ Н-типа. Попутная МШГ Е-типа возбуждается эффективнее, чем встречная, в $[(h+\gamma)/(h-\gamma)]^n$ раз. При больших индексах n это различие может быть огромным. Например, при возбуждении в кварцевой волноводной пластине волны с параметром $k_0 a \approx 3$ величина $[(h+\gamma)/h(h-\gamma)]^n \approx (1.9)^n$.

Наряду с волной ТМ-типа в планарном волноводе могут возбуждаться волны ТЕ-типа. Волноводное поле ТЕ-типа, примыкающее к поверхности волновода, обращенной к шару, описывается формулами [6]

$$H_x = -A\gamma \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx), \quad E_x = 0, \quad (111a)$$

$$H_y = iAh \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx), \quad E_y = 0, \quad (111b)$$

$$H_z = 0, \quad E_z = -iA \exp[-\gamma(l-y)] \exp(ihx). \quad (111b)$$

Волновые параметры γ, g, h связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma^2 + g^2 &= k_0^2(\varepsilon - 1), \\ h^2 - \gamma^2 &= k_0^2, \quad \gamma a_p = g a_p \begin{cases} \tan g a_p, \\ -\cot g a_p. \end{cases} \end{aligned} \quad (112)$$

Вычисления, полностью аналогичные предыдущему расчету для ТМ-волны, приводят к следующим результатам:

$$B_{mn}^{r\pm, t\pm} = B_{mn}^{r\pm, t\pm} = 0, \quad (113a)$$

$$A_{mn}^{r\pm} = \beta_{mn}^{\pm} b_n^r = i^n (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \left(\frac{h+\gamma}{h-\gamma} \right)^{\pm n/2} \exp(-\gamma l) b_n^r, \quad (113b)$$

$$A_{mn}^{t\pm} = \beta_{mn}^{\pm} b_n^t = i^n (-1)^{n+1} \times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \left(\frac{h+\gamma}{h-\gamma} \right)^{\pm n/2} \exp(-\gamma l) b_n^t. \quad (113b)$$

Таким образом, волноводная волна ТЕ-типа возбуждает МШГ только Н-типа. Все остальные выводы, относящиеся к возбуждению МШГ волноводной волной ТМ-типа, справедливы и для возбуждения волной ТЕ-типа.

Вышеприведенные расчеты относятся к возбуждению МШГ в азимутальной плоскости шара, перпендикулярной плоскости планарного волновода. Для расчета возбуждения МШГ в азимутальной плоскости шара, параллельной плоскости планарного волновода, нужно поменять местами y - и z -компоненты поля в соотношениях (92) и (111). В итоге вычислений, аналогичных проведенным выше, получим, что МШГ в азимутальной плоскости не возбуждается. Из геометрических соображений это представляется естественным.

Обратим внимание на зависимость величины $[(h+\gamma) \times (h-\gamma)^{-1}]^{1/2} \equiv (h+\gamma)/k_0$ от диэлектрической проницаемости материала волновода ε_{wg} . Из соотношений (112) следует, что $[(h+\gamma)/k_0]_{\max} \approx \varepsilon_{wg}^{1/2} + (\varepsilon_{wg} - 1)^{1/2}$. С другой стороны, функция $J_v(k_0 a)$ зависит от диэлектрической проницаемости материала шара. При больших индексах v , больших аргументах $k_0 a$ и условии $v > k_0 a$

$$J_v(k_0 a) \approx \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{k_0 a}{v} \right)^n \approx \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right)^n, \quad (114)$$

поэтому

$$\left(\frac{h+\gamma}{k_0} \right)^n J_v(k_0 a) < \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{\varepsilon_{wg}^{1/2} + (\varepsilon_{wg} - 1)^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} \right]^n. \quad (115)$$

Из формулы (115) следует, что для эффективного возбуждения МШГ волновод нужно делать из материала, оптически не менее плотного, чем материал шара. При этом надо иметь в виду, что при больших индексах МШГ правая часть неравенства (115) очень чувствительна даже к небольшим изменениям диэлектрической проницаемости волновода и шара.

11. Возбуждение МШГ плоской волной через призму ПВО и волнами других конфигураций

Возбуждение МШГ волной ПВО изучалось в работах [30, 31]. Волна ПВО может быть сформирована путем введения плоской волны в призму ПВО (рис.9). Приповерхностное поле волны ПВО, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, имеет вид [21]

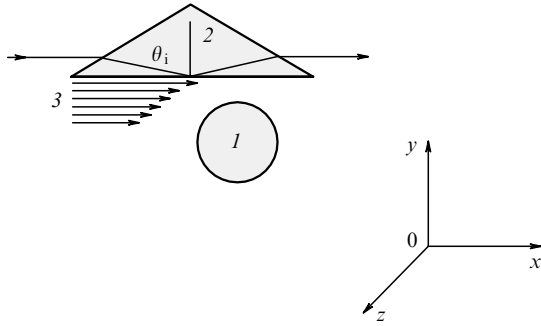


Рис.9. Схема возбуждения МШГ приповерхностной волной призмы ПВО: 1 – микрошар; 2 – призма ПВО; 3 – приповерхностная волна призмы; θ_i – угол падения.

$$E_{pz} = E_0 \frac{2\varepsilon_p^{1/2} \cos \theta_i}{\varepsilon_p^{1/2} \cos \theta_i + i(\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}} \exp(ihx - \gamma y), \quad (116)$$

где E_0 – амплитуда плоской волны; θ_i – угол падения плоской волны на поверхность раздела сред; ε_p – диэлектрическая проницаемость материала призмы;

$$h = k_0 \varepsilon_p^{1/2} \sin \theta_i; \quad \gamma = k_0 (\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}. \quad (117)$$

Такая волна аналогична волне ТЕ-типа для планарного волновода. Из формул (92) и (116) видно, что волна ПВО по форме координатной зависимости весьма схожа с волноводной модой диэлектрического волновода. Проекция волны ПВО в системе координат, привязанной к поверхности сферы, имеют вид

$$E_{pr} = B \cos \theta \exp(ihx + \gamma y), \quad (118a)$$

$$E_{p\theta} = -B \sin \theta \exp(ihx + \gamma y), \quad (118б)$$

$$E_{p\varphi} = 0, \quad (118в)$$

где

$$B = E_0 \frac{2\varepsilon_p^{1/2} \cos \theta_i}{\varepsilon_p^{1/2} \cos \theta_i + i(\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}} \exp(-i\omega t). \quad (119)$$

Процируя это поле на собственные шаровые векторы, получаем

$$E_p n_{mn}^{\pm*}(1; k_0) = B(-1)^n n(2n-1)!! \times \sin^{n-1} \theta \cos \theta \exp(ihx - \gamma y \pm in\varphi) \frac{J_{v+1}(k_0 r)}{(k_0 r)^{1/2}}, \quad (120)$$

$$E_p m_{mn}^{\pm*}(1; k_0) = -B(-1)^n n(2n-1)!! \times \sin^{n-1} \theta \exp(ihx - \gamma y \pm in\varphi) \frac{J_v(k_0 r)}{(k_0 r)^{1/2}}. \quad (121)$$

Интегрирование по φ оставляет только одно слагаемое с $m = n$, так что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_p n_{mn}^{\pm*}(1; k) d\varphi \sin \theta d\theta = 2\pi B n \frac{J_{v+1}(kr)}{(kr)^{1/2}} (2n-1)!!$$

$$\times \int_0^\pi J_n(kr \sin \theta) \sin^n \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad (122)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_p m_{mn}^{\pm*}(1; k) d\varphi \sin \theta d\theta = 2\pi B n \frac{J_v(kr)}{(kr)^{1/2}} (2n-1)!! \times \int_0^\pi J_n(kr \sin \theta) \sin^n \theta \cos \theta d\theta = 4\pi B n (2n-1)!! \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{J_v^2(kr)}{(kr)^{1/2}}. \quad (123)$$

В итоге при возбуждении МШГ волной ПВО, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, получим

$$A_{mn}^{r\pm, t\pm} = i^n (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \times \left[\varepsilon_p^{1/2} \sin \theta_i + (\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}\right]^{\pm n} \exp(-\gamma l) a_n^{r,t}, \quad (124a)$$

$$B_{mn}^{r\pm, t\pm} = 0. \quad (124б)$$

Такая волна, как мы видим, возбуждает только волны Н-типа. Магнитное поле волны, поляризованной в плоскости падения имеет только одну составляющую, перпендикулярную плоскости падения (в наших обозначениях – z-компоненту). Эта волна подобна ТМ-волне диэлектрического волновода. Все предыдущие рассуждения и расчеты, но в отношении магнитного поля МШГ приводят к формулам

$$A_{mn}^{r\pm, t\pm} = 0, \quad (125a)$$

$$B_{mn}^{r\pm, t\pm} = i^n (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!} \times \left[\varepsilon_p^{1/2} \sin \theta_i + (\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}\right]^{\pm n} \exp(-\gamma l) b_n^{r,t}. \quad (125б)$$

Из формул (123) или (124) можно получить коэффициенты возбуждения МШГ плоской волной, если положить $\gamma = 0$ и $\varepsilon_p^{1/2} \sin \theta_i = 1$. Для плоской волны, поляризованной вдоль оси z, имеем

$$A_{mn}^{r,t} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{2n(2n+1)}{n(n+1)(2n)!!}, \quad B_{mn}^{r,t} = 0, \quad (126)$$

при поляризации вдоль оси y –

$$A_{mn}^{r,t} = 0, \quad B_{mn}^{r,t} = 2\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{2n(2n+1)}{n(n+1)(2n)!!}. \quad (127)$$

Сопоставление формул (123) и (124) с формулами (126) и (127) показывает, что воздействие плоской волны через призму ПВО усиливает эффект возбуждения в

$$\left[\varepsilon_p^{1/2} \sin \theta_i + (\varepsilon_p \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2}\right]^{\pm n} \exp(-\gamma l) \quad (128)$$

раз. Если расстояние от поверхности призмы до пластины не слишком велико, то при большом индексе МШГ (порядка 1000 и более) выигрыш в эффективности возбуждения может быть огромен.

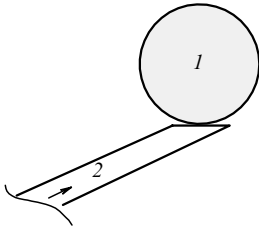


Рис. 10. Схема возбуждения МШГ волной волоконного волновода со скосом:

1 – микрошар; 2 – волоконный волновод.

Особенности возбуждения МШГ с помощью призмы экспериментально изучались в работе [7]. Изначальный световой пучок, входящий в призму, имел в поперечном сечении гауссову форму. Как отмечалось ранее, волна МШГ ($m = n$) подобна гауссову пучку основной моды. МДШ ($m \neq n$), которые подобны гауссовым пучкам высших мод, имеют структуру, практически ортогональную структуре пучка, выходящего из призмы, и возбуждаются очень слабо. Если же диэлектрическое тело имеет форму эллипсоида вращения, то падение гауссова пучка, выходящего из призмы строго перпендикулярно оси вращения эллипсоида, не нарушает картину возбуждения мод в эллипсоиде. Однако если этот пучок падает в плоскости, наклоненной к оси эллипсоида на угол, меньший $\pi/2$, то он оказывается неортогональным модам с $n \neq m$ и они возбуждаются наряду с МШГ.

При падении возбуждающей волны под углом $\vartheta = \pm \arccos(m/n)$ МШГ практически не возбуждается; возбуждается только мода с $m \neq n$. В свою очередь, эта мода в призме возбуждает выходную волну типа высшей моды гауссова пучка, имеющую круговую поперечную структуру и поперечный индекс $n - m$. Такая волна имеет вид кольца [7] и проецируется на приемник в виде двух пятен, положение которых определяется углами $\vartheta = \pm \arccos(m/n)$. При четном m наряду с высшей модой гауссова пучка возбуждается и пучок основной моды.

Для возбуждения МШГ, наряду с призмой и планарным волноводом, используются нитевидные диэлектрические волноводы, подобные тем, которые применяются в линиях волоконной связи. В таких волноводах несущая поле сердцевина окружена защитной оболочкой, что затрудняет контакт волновода с возбуждаемым шаром. Поэтому волновод либо полируется с образованием плоской площадки (half-block) в области его контакта с шаром (рис.10), либо вытягивается так, чтобы в нем образовалась конусообразная перетяжка, обнажающая сердцевину в области контакта (tapered fiber) [37].

Строгая теория возбуждения МШГ волнами такого рода устройств математически более громоздка, чем теория возбуждения полем планарного диэлектрического волновода, хотя алгоритм расчета тот же: надо представить волну волоконного волновода в виде ряда по собственным функциям МДШ. Для описания поля в волноводе в месте контакта конусообразной перетяжки с диэлектрическим шаром обычно используется приближение, в рамках которого возбуждающая волна отождествляется с основной волной круглого диэлектрического волновода [37]. Последняя вне волновода описывается цилиндрической функцией Ганкеля [5], которую можно аппроксимировать экспонентой (см. разд.4). В результате возбуждающее поле в случае перетяжки может быть представлено в виде

$$E_f = E_{f0} \exp[-\gamma_f(\rho - b)], \quad (129)$$

где E_{f0} – поле у поверхности перетяжки; ρ – радиальная координата с центром на оси нитевидного волновода; b – радиус волновода;

$$\gamma_f = i\alpha_f \frac{H_1^{(1)}(i\alpha_f b)}{H_0^{(1)}(i\alpha_f b)}. \quad (130)$$

В свою очередь, α_f является корнем характеристического уравнения [5, 37]

$$k_f \frac{J_0(k_f b)}{J_1(k_f b)} = i\alpha_f \frac{H_1^{(1)}(i\alpha_f b)}{H_0^{(1)}(i\alpha_f b)}, \quad (131)$$

в котором

$$k_f^2 = k_0^2(\varepsilon_f - 1) - \alpha_f^2; \quad (132)$$

ε_f – диэлектрическая проницаемость материала нитевидного волновода. В случае «полублока» поле волновода имеет более сложный вид [37], чем поле (129), и здесь не приводится.

При наличии формулы для поля волновода задача сводится к записи полей микрошара и волновода (129) в единой системе координат и вычислению коэффициентов разложения поля волновода по сферическим векторам. Задача выглядит довольно громоздкой, и нам неизвестны работы, где она была бы доведена до логического конца.

В связи с тем, что плоская волна практически не возбуждает МШГ, в литературе имеются работы, посвященные анализу возбуждения МДШ ацентрично сфокусированной плоской волной или гауссовым пучком, ось которого не проходит через центр шара. Поскольку эти методы возбуждения пока не находят применения в эксперименте, мы не будем подробно излагать их теоретические основы, отсылая читателя к оригинальным публикациям на эту тему [28, 29, 33].

12. Добротность связи

Связь полей шара и волновода обуславливает не только возбуждение волн диэлектрического шара, но и отток энергии из шара: возникают потери, обусловленные этой связью. О соответствующей добротности говорят как о «добротности связи». Для вычисления добротности связи нужно решить обратную задачу возбуждения волны в волноводе за счет энергии, запасенной в МШГ. В физическом смысле эта задача эквивалентна классической проблеме вычисления затухания колеблющегося диполя: колеблющийся диполь излучает поле, которое в результате обратного воздействия на диполь приводит к затуханию его колебаний [42].

Строгий подход к проблеме возбуждения волн в волноводе или призме ПВО связан с решением граничной задачи на поверхности волновода или призмы с вовлечением полей МШГ. Нам неизвестны работы, основанные на таком подходе. Вместо этого решается задача взаимного влияния волновода (призмы) и МШГ следующим приближенным методом [35].

Исходным пунктом этого метода является уравнение Максвелла

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -4\pi\chi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (133)$$

решение которого представляется в виде суперпозиции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = C_b(t)\mathbf{E}_b(\mathbf{r}) + \sum_k C_k(t)\mathbf{E}_{pk}(\mathbf{r}), \quad (134)$$

причем в качестве $\mathbf{E}_b(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_{pk}(\mathbf{r})$ выбираются нормированные поля мод изолированного шара и возбуждающего устройства. Эти поля удовлетворяют уравнениям

$$\left[\omega_b^2 + \frac{c^2}{\varepsilon_b(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times\right] \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varepsilon_b(\mathbf{r}) = 1 + 4\pi\chi_b(\mathbf{r}), \quad (135)$$

$$\left[\omega_p^2 + \frac{c^2}{\varepsilon_p(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times\right] \mathbf{E}_{pk}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varepsilon_p(\mathbf{r}) = 1 + 4\pi\chi_p(\mathbf{r}), \quad (136)$$

где $\chi_b(\mathbf{r})$ (или $\chi_p(\mathbf{r})$) постоянно в пределах шара (или возбуждающего устройства) и равно нулю вне его. Ясно, что представление полей в такой форме является приближенным, т. к. строгое решение задачи требует вычисления собственных функций системы шар – возбуждающее устройство. В качестве возбуждающего устройства используется волновод или призма, их собственные функции $\mathbf{E}_{pk}(\mathbf{r})$ имеют непрерывный спектр, так что сумма в (134) фактически является интегралом.

Подставив (134) в уравнение (133) и умножив обе части (133) на $\mathbf{E}_b^*(\mathbf{r})$, проинтегрируем полученное выражение по эффективному объему шаровой моды. В результате получим

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_n^2\right) C_\eta(t) = - \sum_k I_k \omega^2 C_k(t), \quad (137)$$

$$I_k = 4\pi \left[\chi_b \int \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\eta^*(\mathbf{r}) d^3r + \chi_p \int \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\eta^*(\mathbf{r}) d^3r \right]. \quad (138)$$

В выражение для частоты ω_n включена поправка, вносимая возбуждающим устройством, так что

$$\omega_n^2 = \omega_{n0}^2 - 4\pi\chi_p \int E_\eta(\mathbf{r}) d^3r, \quad (139)$$

где ω_{n0} – частота невозмущенной шаровой моды. Интеграл перекрытия (138), как правило, мал и его можно рассматривать как возмущение. Это обстоятельство служит оправданием выбора поля в форме (134).

Умножим теперь обе части уравнения (133) на $\mathbf{E}_{pk}^*(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по эффективному объему возбуждающего устройства. Получающееся уравнение для амплитуды C_k имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) C_k(t) = -I_k^* \omega_n^2 C_\eta(t). \quad (140)$$

Система уравнений (137) и (140) позволяет вычислить коэффициент затухания МШГ за счет связи мод шара с возбуждающим устройством. Будем решать эту систему методом преобразования Лапласа. Введем образы Лапласа $C_\eta(p) \doteq C_\eta(t)$ и $C_k(p) \doteq C_k(t)$, тогда уравнения (137) и (140) принимают вид

$$(p^2 + \omega_n^2) C_\eta(p) = - \sum_k I_k \omega^2 C_k(p) + 1, \quad (141a)$$

$$(p^2 + \omega^2) C_k(p) = -I_k^* \omega_n^2 C_\eta(p), \quad (141b)$$

где p – параметр Лапласа. Единица в правой части первого уравнения соответствует ступенчатому возбуждению МШГ в момент $t = 0$. Решая систему (141), получаем

$$C_\eta(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_n^2 - \Gamma(p)}, \quad \Gamma(p) = \sum_k \frac{\omega^2 \omega_n^2}{p^2 + \omega^2} |I_k|^2. \quad (142)$$

Коэффициент затухания МШГ ω_n/Q_n определяется действительной частью полюса функции $C_\eta(p)$. Заметим, что расчет $\Gamma(p)$ и полюсов функции $C_\eta(p)$ технически подобен таковому в проблеме спонтанного излучения атома [43]. В случае волновода, когда в резонансе с МШГ оказывается лишь одна поперечная мода волноводной волны, сумма в (142) сводится к одномерному интегралу и

$$\Gamma(p) = i\pi p \omega_n^2 |I_{kn}|^2. \quad (143)$$

Вычисление полюса функции $C_\eta(p)$ в приближении $\Gamma(p) \ll \omega_n^2$ приводит к формуле для добротности связи

$$\frac{\omega_n}{Q_n} = \frac{\pi}{2} \omega_n^2 |I_{kn}|^2. \quad (144)$$

Теперь проблема сводится к вычислению интегралов перекрытия, входящих в (138). Соответствующие расчеты проведены в работах [35, 37]. Мы приведем формулу для добротности связи в случае возбуждения МШГ волной планарного волновода [35]:

$$Q_n = \frac{4\pi^2 \varepsilon_b^2 e^{1/2}}{(\varepsilon_p - 1)^2} (\varepsilon_b - 1)^{3/2} \frac{a_p^3}{\lambda^4} \times \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda} l (\varepsilon_b - 1)^{1/2} + \frac{(n - ha)^2}{\gamma a} \right], \quad (145)$$

где a_p – толщина пластины волновода; l – расстояние между шаром радиусом a и пластиной волновода; h и γ – параметры волноводной волны, введенные в разд. 10.

13. Динамические уравнения для амплитуд МШГ

В связи с применением МШГ возникает необходимость анализа нестационарных динамических процессов возбуждения МШГ внешними источниками.

При решении этой задачи можно использовать формулы (110), (113), (124), (125), считая, что они получены для фурье-образов соответствующих величин или лапласовских образов, если ω или k_0 – комплексные величины. Другими словами, если представить возбуждаемое поле диэлектрического шара в виде разложения по собственным функциям МДШ, но с коэффициентами, зависящими от времени,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_\eta [C_\eta^m(t) \mathbf{m}_\eta + C_\eta^n(t) \mathbf{n}_\eta], \quad (146)$$

то

$$C_\eta^{m,n}(t) = q_n \int_{-\omega}^{\infty} K_\eta^{m,n}(\omega) E_{\text{ext}}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (147)$$

где $E_{\text{ext}}(\omega) = \int E_{\text{ext}}(t) \exp(-i\omega t) dt$; $E_{\text{ext}}(t)$ – поле возбуждающего устройства; индексы при шаровых векторах \mathbf{m}_{mn}^\pm и \mathbf{n}_{mn}^\pm для упрощения записи опущены. При этом в случае ТМ-волны планарного волновода (см. (110))

$$q_n \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2n}{(2n)!!}, \quad (148)$$

$$K_\eta^{m,n}(\omega) \equiv \left(\frac{h+\gamma}{k_0}\right)^{\pm n} \exp(-\gamma t) \begin{cases} a_n^t(\omega), \\ b_n^t(\omega). \end{cases}$$

Для решения ряда задач интегральное представление решения (147) удобно заменить соответствующим дифференциальным уравнением. Из (147) следует, что

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_n^2\right) C_\eta^{m,n} = q_n \int_{-\omega}^{\infty} (\omega_n^2 - \omega^2) \times K_\eta^{m,n}(\omega) E_{\text{ext}}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (149)$$

Хотя коэффициенты a_n^t и b_n^t имеют резонансные особенности при $\omega = \omega_n'$, разность $\omega_n^2 - \omega^2$ делает произведение $(\omega_n^2 - \omega^2) K_\eta^{m,n}(\omega) \equiv \bar{K}_\eta^{m,n}(\omega)$ плавной функцией частоты. Если сигнал внешнего источника достаточно монохроматичен, то

$$\int_{-\omega}^{\infty} K_\eta^{m,n}(\omega) E_{\text{ext}}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \approx \bar{K}_\eta^{m,n}(\omega_{\text{max}}) E_{\text{ext}}(t), \quad (150)$$

где ω_{max} – частота, соответствующая максимуму $E_{\text{ext}}(\omega)$. Кроме того, $\omega_n^2 = \omega_n'^2 - \gamma_n^2 - 2i\omega_n'\gamma_n = \Omega_n^2 - 2i\omega_n'\gamma_n$ и с точностью до членов высшего порядка малости по γ_n/ω_n

$$-2i\omega_n'\gamma_n C_\eta^{m,n} \approx 2\gamma_n \frac{dC_\eta^{m,n}}{dt}. \quad (151)$$

В результате мы можем записать для $C_\eta^{m,n}$ дифференциальное уравнение (149) в стандартной форме:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma_n \frac{d}{dt} + \Omega_n^2\right) C_\eta^{m,n} = q_n \bar{K}_\eta^{m,n}(\omega_{\text{max}}) E_{\text{ext}}(t). \quad (152)$$

Чтобы учесть сдвиг частоты и межмодовую связь за счет рассеяния, используется модель двух связанных мод. Например, в работе [44], посвященной стабилизации полупроводникового лазера с помощью МШГ, применялась модель, описываемая следующими уравнениями:

$$\frac{dE_L}{dt} + \frac{1}{2\tau}(1+i\Delta)E_L - \frac{1}{2\tau}(1+i\alpha)g(n_e)E_L = \frac{1}{2}K_1 C_-(t-\tau_1)\exp(i\omega\tau_1), \quad (153a)$$

$$\frac{dn_e}{dt} + \frac{1}{\tau_s}n_e = J - g_a(n_e) \frac{|E_L|^2}{8\pi\hbar\omega}, \quad (153б)$$

$$\frac{dC_-}{dt} + \frac{1}{2\tau_0}(1+i\delta)C_- = \frac{i}{2}k_c C_+, \quad (153в)$$

$$\frac{dC_+}{dt} + \frac{1}{2\tau_0}(1+i\delta)C_+ = \frac{i}{2}k_c C_- + \frac{1}{2}K_2 E_L(t-\tau_1)\exp(i\omega\tau_1), \quad (153г)$$

где E_L – комплексная амплитуда поля внутри лазера; n_e – концентрация электронов в зоне проводимости; J – плотность тока накачки; ω – частота, генерируемая системой лазер – внешний микрорезонатор; C_+ и C_- – комплексные амплитуды полей прямой и обратной волн МШГ; τ –

время затухания поля в лазере; τ_1 – время прохода сигнала от лазера до микрошара; τ_0 – время затухания МШГ, определяемое суммарными потерями; τ_s – время релаксации инверсной населенности в лазере; $g_a(n_e)$ – коэффициент усиления активной среды лазера; $(1+i\alpha)g_a(n_e)$ – комплексный коэффициент усиления активной среды лазера; ω_c – собственная частота резонатора лазера при $g=0$; $\Delta \equiv (\omega_c - \omega)\tau$ и $\delta \equiv (\omega_0 - \omega)\tau_0$ – нормированные отстройки; ω_0 – собственная частота МШГ; K_1, K_2 – коэффициенты связи поля лазера с МШГ, аналогичные коэффициентам, определяемым, например, формулами (110), (113), (124) и (125); k_c – коэффициент связи прямой и обратной волн МШГ за счет рассеяния. Хорошо известно, что в модели (153) возникает расщепление одинаковых резонансных частот мод на две частоты: $\omega_n^\pm = \omega_n \pm k_c$, поэтому $k_c/\omega_n = \delta\omega_n^{(1)}/\omega_n$ и определяется формулой (57).

14. Применение МШГ

Интересны парадоксы истории: при создании первых лазеров опасались, что МШГ в диэлектрических стержнях будут препятствовать выводу лазерного излучения в виде высоконаправленного пучка. Эти опасения не были напрасными. Для устранения МШГ в лазерных стержнях боковой поверхностью последних специально делалась шероховатой (маатовой). Такая технология сохранилась и до наших дней. Но в настоящее время возник интерес к МШГ как к резонансам высокой добротности. В оптическом диапазоне длин волн даже в шарах малых размеров можно возбудить МШГ с большим индексом n и, значит, малым радиационным затуханием. Как было показано, в шарах радиусом порядка 100 мкм и более другие типы потерь также достаточно малы, так что достижима добротность 10^9 и более. Возможность получения высокой добротности МШГ даже в малых диэлектрических шарах обусловила большой интерес к ним как к резонаторам оптического диапазона для создания лазеров новой конфигурации.

МШГ-лазеры. В работе [45] описан, по-видимому, первый лазер непрерывного действия на основе МШГ. В качестве резонатора и одновременно активной среды лазера использовался микрошар, изготовленный из Nd:YAG. Накачкой служило излучение лазера на красителе. Автору [45] удалось добиться одночастотной генерации на длине волны 1064 нм.

О создании лазера аналогичного типа сообщалось в работе [46]. Накачка шарового лазера, изготовленного из Er:Yb-фосфатного стекла, осуществлялась с помощью волоконного волновода. Генерируемое лазером излучение с длиной волны 1500 нм выводилось с помощью того же волновода. Авторы [46] отмечают, что волоконный волновод не только осуществлял эффективный ввод накачки и вывод генерируемого излучения, но и способствовал установлению одномодового режима генерации.

Продолжением этих работ являются эксперименты с шаровым лазером, изготовленным из кварца, активированного атомами неодима [47]. Авторам удалось создать низкопороговый лазер, потребляющий вблизи порога генерации мощность накачки лишь 200 нВт. При температуре жидкого гелия активная среда такого лазера может состоять всего лишь из нескольких атомов неодима.

Логическим развитием этих исследований явились работы, обосновавшие возможность создания МШГ-ла-

зера, рабочим телом которого служит одна квантовая точка [48 – 50]. Такие лазеры представляют собой объекты с предельно выраженными квантовыми свойствами, что делает их интересными для изучения фундаментальных свойств излучения. Именно поэтому одноатомные лазеры привлекают внимание теоретиков [51 – 53].

В настоящее время большим вниманием исследователей пользуются бозе-конденсаты атомов, захваченных в ловушки (см., напр., [54] и цитируемую там литературу). Изучению излучательных свойств бозе-конденсатов могут помочь различные схемы с применением МШГ. Пример такой схемы приведен на рис.11.

В литературе описаны полупроводниковые лазеры, резонаторами которых служат микродиски [55]. Использование микродиска не является неожиданным, т. к. МШГ с большим индексом занимает малую угловую апертуру и части шара вне этой апертуры могут быть безболезненно удалены с образованием диска или, лучше сказать, шайбы. При этом основное внимание при анализе микродисковых лазеров уделялось возможности их применения в оптоэлектронных системах, связанных с обработкой информации [56 – 58].

Не обошли своим вниманием проблему МШГ-лазеров и теоретики: изучению динамики лазеров на основе МШГ посвящены публикации [59 – 61].

Представляют интерес экспериментальные [62, 63] и теоретические [64, 65] работы, в которых исследуются лазеры с активной средой в виде капель жидкости. Хорошая подборка литературы на эту тему содержится в [61]. Обратим особое внимание на работу [63], в которой описан трехцветный лазер на основе МШГ в жидких каплях, активированных красителями.

Нелинейно-оптические явления. На перспективность использования МШГ для наблюдения нелинейных оптических явлений обращалось внимание в работах [24, 65]. Эксперименты по наблюдению вынужденного комбинационного рассеяния в каплях описаны в работах [66, 67], причем авторы [67] наблюдали подавление прямой лазерной генерации за счет вынужденного комбинационного рассеяния. В работе [68] исследуется вопрос о двухфотонном поглощении в микросферах. Думается, что интерес к нелинейной оптике в микросферах со временем будет возрастать.

Бистабильный элемент. Возможность использования МШГ для оптических бистабильных элементов обсуждалась в работе [24]. Малый эффективный объем МШГ позволяет снизить мощность, необходимую для работы

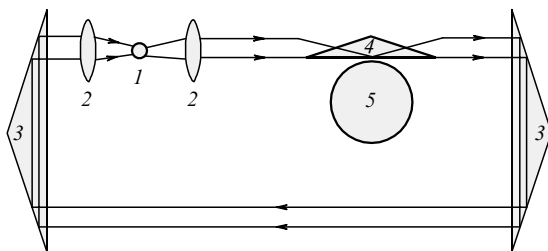


Рис.11. Возможная схема лазера на основе МШГ с активной средой в виде атомов, захваченных в ловушку: 1 – ячейка с захваченными в нее холодными атомами; 2 – фокусирующие линзы; 3 – призмы ПВО; 4 – призма для возбуждения МШГ; 5 – микросфера из плавящего кварца; световая волна может распространяться как по часовой стрелке, так и против нее; при необходимости можно ввести невзаимный элемент.

бистабильного элемента. В [69] рассматривается бистабильный оптический элемент на основе МШГ в полупроводниковом микрошаре и анализируются свойства такого элемента.

Стабилизация диодных лазеров. Как известно, полупроводниковые диодные лазеры обладают многими привлекательными свойствами, обусловившими их широкое применение. Тем не менее у них есть и недостаток: спектр генерации даже одномодового полупроводникового лазера сравнительно широк, а частота генерации недостаточно стабильна для проведения высокоточных частотных измерений. Стабилизация частоты и сужение спектра излучения диодных лазеров с помощью обычного линейного резонатора хотя и достигали поставленной цели [70, 71], но превращали миниатюрный полупроводниковый лазер в довольно громоздкое устройство. Применение для этой цели МШГ дает возможность создать на основе диодного лазера миниатюрный излучатель с высокой монохроматичностью и стабильностью частоты излучения [72].

Чувствительный миниатюрный спектрометр. Большая добротность МШГ позволяет создать на основе диэлектрического микрошара, связанного с лазером, прибор высокой чувствительности для обнаружения следов различных газов в атмосфере [73].

Квантовая электродинамика. МШГ с их высокой добротностью и малым эффективным объемом находят применение в схемах квантовых неразрушающих измерений и дают возможность наблюдать тонкие квантовые эффекты взаимодействия одиночных атомов с полем, плотность энергии которого эквивалентна нескольким фотонам [74 – 78].

Волны полного внешнего отражения. При падении излучения на изогнутую металлическую поверхность под достаточно большим углом (скользящее падение) может возникать волна, которая практически во всем подобна МШГ, но которую следует назвать волной полного внешнего отражения (рис.12). Такие волны оказываются весьма полезными для поворота на большой угол мягких рентгеновских лучей. Дело в том, что рентгеновский луч почти невозможно повернуть путем отражения от плоской поверхности однородного материала из-за малой диэлектрической проницаемости практически всех материалов в рентгеновской области. Эта проблема достаточно полно освещена в работах [79, 80].

Другие типы шаровых мод. Как следует из разд.2, теория шаровых мод едина и не существует резкой границы между МШГ и другими типами шаровых мод. Однако основное внимание в данном обзоре уделено

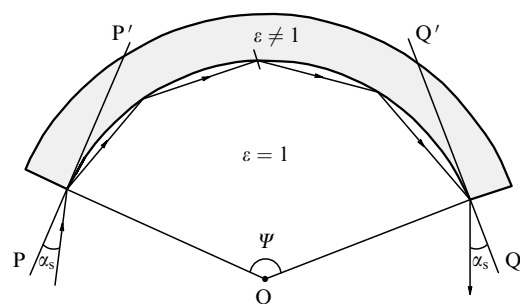


Рис.12. МШГ у поверхности вогнутого зеркала. Стрелками указано направление входа и выхода волны; O – центр кривизны зеркала; α_s – угол скольжения; PP' и QQ' – касательные к поверхности зеркала.

модам с большим индексом и, значит, малыми радиационными потерями. Тем не менее моды с малым индексом играют большую роль в теории рассеяния излучения малыми частицами [81]. Атомы или молекулы вблизи малых частиц могут резко менять свои излучательные свойства. Эта и ряд других интересных проблем, тесно соприкасающихся с теорией шаровых мод, рассмотрены в статьях [82, 83].

Перечисленные выше примеры не исчерпывают всех возможностей применения МШГ. Думается, что нас еще ждут новые и остроумные предложения, связанные с использованием МШГ.

Приложение 1. Векторные шаровые функции

Как известно, уравнения Максвелла в произвольной системе координат могут быть сведены к решению уравнения для векторной функции F

$$\text{rot rot } F - k^2 F = 0, \tag{П1.1}$$

причем под F может пониматься как электрическое, так и магнитное поле. В случае полей сферической конфигурации любая векторная функция, являющаяся решением уравнения (П1.1), может быть представлена в виде ряда по фундаментальным векторным функциям трех типов [4], приведенным в нижеследующих таблицах.

В этих таблицах e_r, e_θ, e_φ – орты по осям системы координат, связанной с поверхностью сферы (см. рис. П1.1); $Z_\nu(kr)$ – решения уравнения Бесселя. Это может быть функция Бесселя $J_\nu(kr)$ либо функции Ганкеля $H_\nu^{(1,2)}(kr)$ первого или второго рода. Индекс σ введен для указания того, какая именно функция подразумевается под $Z_\nu(kr)$. Если $\sigma = 1$, то имеется в виду функция

Табл. П1.1.

Орт	$m_{mn}^\pm(\sigma; k)$
e_r	0
e_θ	$\frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{(kr)^{1/2} Z_\nu(kr)}{kr} \exp(\pm im\varphi)$
e_φ	$\pm i \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{(kr)^{1/2} Z_\nu(kr)}{kr} \exp(\pm im\varphi)$

Табл. П1.2.

Орт	$n_{mn}^\pm(\sigma; k)$
e_r	$n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \frac{(kr)^{1/2} Z_\nu(kr)}{(kr)^2} \exp(\pm im\varphi)$
e_θ	$\frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [(kr)^{1/2} Z_\nu(kr)] \exp(\pm im\varphi)$
e_φ	$\pm i \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [(kr)^{1/2} Z_\nu(kr)] \exp(\pm im\varphi)$

Табл. П1.3.

Орт	$l_{mn}^\pm(\sigma; k)$
e_r	$P_n^m(\cos \theta) \frac{d}{d(kr)} \left[\frac{Z_\nu(kr)}{(kr)^{1/2}} \right] \exp(\pm im\varphi)$
e_θ	$\frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \frac{Z_\nu(kr)}{(kr)^{3/2}} \exp(\pm im\varphi)$
e_φ	$\pm i \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{Z_\nu(kr)}{(kr)^{3/2}} \exp(\pm im\varphi)$

Бесселя $J_\nu(kr)$, если $\sigma = 2$, – функция Ганкеля первого рода $H_\nu^{(1)}(kr)$, если $\sigma = 3$, – функция Ганкеля второго рода $H_\nu^{(2)}(kr)$. Индексы m, n понятны без дополнительных пояснений. Индексы « \pm » соответствуют знакам « \pm » в азимутальном множителе $e^{\pm im\varphi}$ в потенциале (21). Этот потенциал является базовой функцией для построения шаровых векторов $m_{mn}^\pm(\sigma; k), n_{mn}^\pm(\sigma; k)$ и $l_{mn}^\pm(\sigma; k)$ [4].

Небольшой комментарий по поводу используемых обозначений. В книге Дж.А.Стрэттона [4] шаровые векторы записаны с помощью функций

$$z_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} Z_\nu(z),$$

Л.А.Вайнштейн [10] использует иное обозначение, а именно

$$z_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2} \right)^{1/2} Z_\nu(z).$$

У каждого из этих авторов есть свои аргументы в пользу удобства введенных ими обозначений. Однако при сопоставлении формул, взятых из цитируемых книг и других источников, возникают большие неудобства. Поэтому в настоящем обзоре не вводится никаких новых обозначений для радиальных функций, и векторные шаровые функции записаны с помощью стандартных обозначений функций, являющихся решениями уравнения Бесселя.

Шаровые векторы $m_{mn}^\pm, n_{mn}^\pm, l_{mn}^\pm$ обладают следующими свойствами: $\text{rot } l_{mn}^\pm = 0$, т. е. l описывает потенциальные поля; векторы m_{mn}^\pm и n_{mn}^\pm являются соленоидальными ($\text{div } m_{mn}^\pm = \text{div } n_{mn}^\pm = 0$), кроме того, они связаны соотношениями $\nabla \times m_{mn}^\pm = kn_{mn}^\pm$ и $\nabla \times n_{mn}^\pm = km_{mn}^\pm$.

Общий вид разложения произвольного векторного поля F по векторным шаровым функциям дается формулой

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{\eta} (\alpha_{\eta} m_{\eta} + \beta_{\eta} n_{\eta} + \delta_{\eta} l_{\eta}), \tag{П1.2}$$

где η – совокупный индекс векторных шаровых мод. Поскольку шаровые векторные функции взаимно ортогональны, то коэффициенты разложения определяются соотношениями

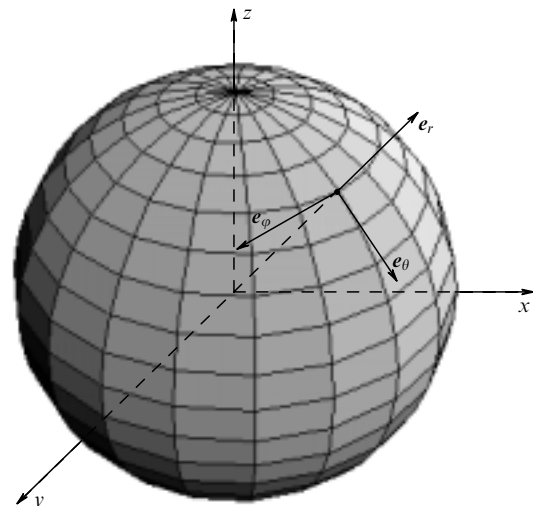


Рис. П1.1. Система координат с ортами e_r, e_θ, e_φ , связанная с поверхностью шара.

$$1_{\alpha_\eta} = \frac{\int r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (F_r m_{\eta r} + F_\theta m_{\eta \theta} + F_\varphi m_{\eta \varphi})}{\int m_\eta m_\eta^* r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}, \quad (\text{П1.3})$$

$$\beta_\eta = \frac{\int r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (F_r n_{\eta r} + F_\theta n_{\eta \theta} + F_\varphi n_{\eta \varphi})}{\int n_\eta n_\eta^* r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}, \quad (\text{П1.4})$$

$$\delta_\eta = \frac{\int r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (F_r l_{\eta r} + F_\theta l_{\eta \theta} + F_\varphi l_{\eta \varphi})}{\int l_\eta l_\eta^* r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}. \quad (\text{П1.5})$$

Интегрирование по радиальной координате должно производиться в пределах интервала ортогональности радиальных функций. Угловые интегралы, входящие в знаменатели выражений (П1.3), (П1.4) и (П1.5) имеют вид (см., напр., [4])

$$\int_0^\pi m_\eta m_\eta^* \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 + \delta_{0m}) \frac{n(n+1)(n+m)! Z_v^2(kr)}{(2n+1)(n-m)! kr}, \quad (\text{П1.6})$$

$$\int_0^\pi n_\eta n_\eta^* \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 + \delta_{0m}) \frac{n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \times \left[\frac{n+1}{2n+1} \frac{Z_{v-1}^2(kr)}{kr} + \frac{n}{2n+1} \frac{Z_{v+1}^2(kr)}{kr} \right], \quad (\text{П1.7})$$

$$\int_0^\pi l_\eta l_\eta^* \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 + \delta_{0m}) \frac{k^2}{(2n+1)(n-m)!} \times \left[\frac{n}{2n+1} \frac{Z_{v-1}^2(kr)}{kr} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{Z_{v+1}^2(kr)}{kr} \right], \quad (\text{П1.8})$$

где δ_{0m} – символ Кронекера.

Приложение 2. Полезные формулы

В этой части приложения собраны формулы, которые оказываются полезными при работе с МШГ. Все они взяты из справочника [26].

При расчете коэффициентов разложения приповерхностной волны по шаровым модам использовалось соотношение

$$\exp(ix \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) \exp(im\varphi). \quad (\text{П2.1})$$

При проведении преобразований полезны формулы

$$\frac{d}{dx} Z_\nu(x) = \frac{1}{2} [Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x)], \quad (\text{П2.2})$$

$$Z_\nu(x) = \frac{x}{2\nu} [Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x)]. \quad (\text{П2.3})$$

Соотношение (П2.3) является рекуррентным и позволяет

вычислить функции с последующим индексом, зная две функции с предыдущими индексами. Поэтому для определения функций Бесселя с полуцелым индексом важны формулы

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x. \quad (\text{П2.4})$$

Для расчетов с участием бесселевых функций используются интегралы

$$\int x Z_\nu^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} [Z_\nu^2(\alpha x) - Z_{\nu-1}(\alpha x) Z_{\nu+1}(\alpha x)], \quad (\text{П2.5})$$

$$\int_0^1 x^{\nu+1} (1-x^2)^\mu J_\nu(zx) dx = \frac{2^\mu}{z^{\mu+1}} \Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(z), \quad (\text{П2.6})$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Из (П2.6) следует, что

$$\int_0^\pi \sin^{\nu+1} \theta \cos^\mu \theta J_\nu(z \sin \theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu = 2n + 1, \\ 2 \frac{2^\mu}{z^{\mu+1}} \Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(z) & \text{при } \mu = 2n, \end{cases} \quad (\text{П2.7})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!, \quad (\text{П2.8})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad (\text{П2.9})$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1. \quad (\text{П2.10})$$

Для вычисления факториалов больших чисел приведем знаменитую формулу Стирлинга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n (2\pi n)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right). \quad (\text{П2.11})$$

Присоединенные полиномы Лежандра при $m = n$ описываются простой формулой

$$P_n^n(\cos \theta) = (-1)^n (2n-1)!! \sin^n \theta. \quad (\text{П2.12})$$

Другие присоединенные полиномы Лежандра с большим индексом n и малой разностью $n - m$ могут быть рассчитаны с использованием соотношения

$$\frac{P_n^m(\theta)}{P_n^m(0)} \approx \frac{H_{n-m}(\sqrt{m} \theta)}{H_{n-m}(0)} \exp(-m\theta^2/2). \quad (\text{П2.13})$$

1. Стрэтт Дж. (лорд Рэлей). *Теория звука* (М.: Гостехиздат, 1955, т. 2).
2. Mie G. *Ann. Physik*, **25**, 377 (1908).
3. Debye P. *Ann. Physik*, **30**, 57 (1909).
4. Стрэттон Дж. *Теория электромагнетизма* (М.: ОГИЗ–Гостехиздат, 1948).
5. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
6. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Сов. радио, 1957).
7. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Opt. Commun.*, **113**, 133 (1994).

8. Knight J.C., Dubreuil N., Sandoghdar V., Hare J., Lefevre-Seguin V., Raimond J.M., Haroche S. *Opt. Lett.*, **20**, 1515 (1995).
9. Фок В.А. *Таблицы функций Эйри* (М.: изд-е НИИ-108, 1946).
10. Вайнштейн Л.А. *Открытие резонаторы и открытые волноводы* (М.: Сов. радио, 1966).
11. Lam C.C., Leung P.T., Young K. *J. Opt. Soc. Am. B*, **9**, 1585 (1992).
12. Shiller S. *Appl. Opt.*, **32**, 2181 (1993).
13. Schiller S., Byer R.L. *Opt. Lett.*, **16**, 1138 (1991).
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1984).
15. Rezac J.P., Rosenberger A.T. *Opt. Express*, **8**, 605 (2001).
16. Rezac J.P., Rosenberger A.T. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4270**, 112 (2001).
17. Ilchenko V.S., Gorodetsky M.L., Vyatchanin S.P. *Opt. Commun.*, **107**, 41 (1994).
18. Ishikawa H., Tamaru H., Miyano K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 802 (2000).
19. Lai H.M., Leung P.T., Yong K., Barber P.W., Hill S.C. *Phys. Rev. A*, **41**, 5187 (1990).
20. Weiss D.S., Sandoghdar V., Hare J., Lefevre-Seguin V., Raimond J.-M., Haroshe S. *Opt. Lett.*, **20**, 1835 (1995).
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1957).
22. Gorodetsky M.L., Savchenkov A.A., Ilchenko V.S. *Opt. Lett.*, **21**, 453 (1996).
23. Vernoooy D.W., Ilchenko V.S., Mabuchi H., Streed E.W., Kimbl H.J. *Opt. Lett.*, **23**, 247 (1998).
24. Брагинский В.Б., Ильченко В.С. *ДАН СССР*, **32**, 307 (1987).
25. Tien P.K. *Appl. Opt.*, **10**, 2395 (1970).
26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, рядов и произведений* (М.: ГИФМЛ, 1963).
27. Zhang J.-Z., Leach D.H., Chang R.K. *Opt. Lett.*, **13**, 270 (1988).
28. Barton J.P., Alexander D.R., Schaub S.A. *J. Appl. Phys.*, **64**, 1632 (1988).
29. Gouesbet G., Grehan G. *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1427 (1988).
30. Lui C., Kaiser T., Lange S., Schweiger G. *Opt. Commun.*, **117**, 521 (1995).
31. Dubreuil N., Knight J.C., Leventhal D.K., Sandoghdar V., Hare J., Lefevre V. *Opt. Lett.*, **20**, 813 (1995).
32. Serpengüzel A., Arnold A., Griffel G., Lock J.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **14**, 790 (1997).
33. Lock J.A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 2986 (1998).
34. Zvyagin A.V., Goto K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 3003 (1998).
35. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 147 (1999).
36. Ilchenko V.S., Yao X.S., Maleki L. *Opt. Lett.*, **24**, 723 (1999).
37. Little B.E., Laine J.-P., Haus A. *J. Lightwave Technol.*, **17**, 704 (1999).
38. Ishikawa H., Tamaru H., Miyano K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 802 (2000).
39. Cai M., Painter O., Vahala K.J., Sercel P.C. *Opt. Lett.*, **25**, 1430 (2000).
40. Xudong Fan, Phedon Palinginis, Scott Lacey, Haillin Wang. *Opt. Lett.*, **25**, 1600 (2000).
41. Oraevsky A.N., Bandy D.K. *Opt. Commun.* (presented for publication).
42. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988).
43. Ораевский А.Н. *УФН*, **164**, 415 (1994).
44. Ораевский А.Н., Яровицкий А.В., Величанский В.Л. *Квантовая электроника*, **31**, 897 (2001).
45. Baer T. *Opt. Lett.*, **12**, 392 (1987).
46. Cai M., Painter O., Vahala K.J., Sercel P.C. *Opt. Lett.*, **25**, 1430 (2000).
47. Sandoghdar V., Treussart F., Hare J., Lefevre-Seguin V., Raimond J.-M., Haroche S. *Phys. Rev. A*, **54**, R1777 (1996).
48. Ораевский А.Н., Скалли М., Величанский В.Л. *Квантовая электроника*, **25**, 211 (1998).
49. Oraevsky A.N., Scully M.O., Sakisyan T.V., Bandy D.K. *Laser Phys.*, **9**, № 5, 1 (1999).
50. Yamamoto Y., Pelton M. *Phys. Rev. A*, **59**, 2418 (1999).
51. Mu Yu., Savage C.M. *Phys. Rev. A*, **46**, 5944 (1992).
52. Loffler M., Meyer G.M., Walther H. *Phys. Rev. A*, **55**, 3923 (1997).
53. Козловский А.В., Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **115**, 1210 (1999).
54. Ораевский А.Н. *УФН*, **171**, 681 (2001); *Квантовая электроника*, **31**, 1038 (2001).
55. McCall S.L., Levi A.F.J., Slusher R.E., Pearton S.J., Logan R.A. *Phys. Lett.*, **60**, 289 (1992).
56. Levi A.F.J., Slusher R.E., McCall S.L., Tanbun-Ek T., Coblenz D.L., Pearton S.J. *Electron. Lett.*, **28**, 101 (1992).
57. Levi A.F.J., Slusher R.E., McCall S.L., Glass J.L., Tanbun-Ek T., Pearton S.J. *Appl. Phys. Lett.*, **62**, 561 (1993).
58. Eschmann A., Gardiner C.W. *Phys. Rev. A*, **49**, 2907 (1994).
59. Kurizki G., Nitzan A. *Phys. Rev. A*, **38**, 267 (1988).
60. Леднева Г.П., Астафьева Л.Г. *Оптика и спектроскопия*, **80**, 858 (1996).
61. Kotomtseva L.A., Lednyeva G.P. In: *Diffraction Optics and Optical Microsystems* (N. Y.: Plenum Press, 1997, p. 83).
62. Tzeng H.M., Wall K.F., Chang R.K. *Opt. Lett.*, **9**, 499 (1984).
63. Taniguchi H., Tanosaki S. *Japan J. Appl. Phys.*, **32**, L1615 (1993).
64. Дащок В.В., Измайлов И.А., Кочелап В.А. В сб. *Квантовая электроника* (Киев: Наукова думка, 1990, т. 38, с. 56).
65. Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Phys. Lett.*, **137**, 393 (1989).
66. Lin H.-B., Huston A.L., Eversole J.D., Campillo A.J. *Opt. Lett.*, **11**, 614 (1986).
67. Kwok A.S., Chang R.K. *Opt. Lett.*, **18**, 1597 (1993).
68. Chowdhury D.Q., Hill S.C., Mazumder Md.M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **29**, 2553 (1993).
69. Ораевский А.Н., Бенди Д.К. *Квантовая электроника*, **22**, 211 (1995).
70. Величанский В.Л., Зибров А.С., Каргопольцев В.С., Молочев В.И., Никитин В.В., Саутенков В.А., Харисов Г.Г., Тюриков Д.А. *Письма в ЖТФ*, **4**, 1087 (1978).
71. Беленов Э.М., Величанский В.Л., Зибров А.С., Никитин В.В., Саутенков В.А., Усков А.В. *Квантовая электроника*, **10**, 1232 (1983).
72. Васильев В.В., Величанский В.Л., Городецкий М.Л., Ильченко В.С., Хольберг Л., Яровицкий А.В. *Квантовая электроника*, **23**, 675 (1996).
73. Rezac J.P., Rosenberger A.T. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4265**, 102 (2001).
74. Braginsky V.B., Vorontsov Y.L., Thorne K.S. *Science*, **209**, 547 (1980).
75. Brune M., Haroshe S., Lefevre V., Raimond J.M., Zagury N. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 976 (1990).
76. Mabuchi H., Kimble H.J. *Opt. Lett.*, **19**, 749 (1994).
77. Treussart F., Hare J., Collot V., Weiss D.S., Sandoghdar V., Raimond J.M., Haroche S. *Opt. Lett.*, **19**, 1651 (1994).
78. Vernoooy D.W., Furusawa A., Georgiades N.Ph., Ilchenko V.S., Kimble H.J. *Phys. Rev. A*, **57**, R2293 (1998).
79. Виноградов А.В., Зорев Н.Н., Кожевников И.Н., Якушкин И.Г. *ЖЭТФ*, **89**, 2124 (1985).
80. Кожевников И.Н. *Труды ФИАН*, **196**, 143 (1989).
81. Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М.: Мир, 1981).
82. Климов В.В., Дюкля М., Летохов В.С. *Квантовая электроника*, **31**, 569 (2001).
83. Frantsson A.V., Zuev V.S. *J. Russian Laser Research*, **22**, 437 (2001).