

О генерации гармоник поля излучения, ионизирующего водородоподобные атомы в режиме сильного и быстронарастающего поля

В.П.Силин, П.В.Силин

В условиях кулоновского l -вырождения установлены приближенные скейлинговые зависимости эффективности генерации первых пяти гармоник возбуждающего поля от их номера. Получены аналитические зависимости эффективности гармоник данного номера от главного квантового числа атомного уровня, с которого происходит ионизация электрона. Получены приближенные скейлинговые зависимости эффективности генерации гармоник от номера генерируемой гармоники и от главного квантового числа атомного уровня ионизируемого атома.

Ключевые слова: генерация гармоник, водородоподобный атом.

1. Ставя перед собой задачу определения эффективности генерации гармоник в сильном поле, напряженность которого удовлетворяет условию Бете [1]

$$E \geq \frac{I_Z^2}{4Z|e|^3}, \quad (1.1)$$

где

$$I_Z = \frac{Z^2 m_e e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (1.2)$$

– ионизационный потенциал атома; Z – заряд атомного ядра водородоподобного атома; m_e – масса электрона; e – заряд электрона; n – главное атомное число.

Для того чтобы ионизация атома происходила в условиях Бете, необходимо, чтобы ионизационное перераспределение атомных уровней происходило за атомное время. Иными словами, для ионизации с n -го атомного уровня в условиях (1.1) необходимо воздействие лазерного импульса очень малой длительности нарастания

$$t = \frac{n^2 \hbar^3}{m_e e^4} \approx n^2 2.5 \times 10^{-17} \text{ с}, \quad (1.3)$$

т. е. t должно быть сравнимо с временем, которое условно называют временем обращения электрона по орбите, соответствующей квантовому состоянию n .

Будучи практически мгновенно вырванными из атома, ионизированные электроны сохраняют память о своем внутриатомном распределении, поэтому электронная функция распределения плазмы в системе координат, осциллирующей в возбуждающем электрическом поле, может быть представлена в виде

$$f_{nlm} = N_e |a_{nlm}(\mathbf{p})|^2 \quad (1.4)$$

где N_e – плотность электронов; $\mathbf{V} = \mathbf{p}/m_e$ – скорость электрона; \mathbf{p} – импульс; n, l, m – квантовые числа сфериче-

ского квантования электронных уровней до воздействия на атом мощного и быстронарастающего лазерного импульса.

2. С учетом того, что распределение электронов по скоростям в сильном поле после ионизации сопровождается, во-первых, их осцилляциями в возбуждающем поле, а во-вторых, разброс относительно таких осцилляций определяется внутриатомным распределением электронов до их ионизации, представляется естественным воспользоваться работой [2], в которой получены выражения для собственных функций электронов водородоподобного атома с зарядом ядра $Z|e|$ в импульсном представлении:

$$a_{nlm}[\mathbf{p}, \theta_p, \phi_p] = \Phi_m[\phi_p] \Theta_{lm}[\theta_p] a_{nl}[\mathbf{p}], \quad (2.1)$$

где n – главное квантовое число; l – орбитальное квантовое число; m – проекция момента в пространстве импульсов. Согласно [2]

$$\Phi_m[\phi_p, \mathbf{p}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\pm i m \phi_p), \quad (2.2)$$

$$\Theta_{lm}[\theta_p] = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} P_l^m(\cos \theta_p), \quad (2.3)$$

$$a_{nl}[\mathbf{p}] = - \frac{(-i)^l 2^{2l+4} (l!) [n(n-l-1)!]^{1/2} [np/(m_e V_Z)]^l}{(m_e V_Z/n)^{3/2} [(n+1)!]^{1/2} \{ [np/(m_e V_Z)]^2 + 1 \}^{l+2}} \times C_{n-l-1}^{l+1} \left\{ \frac{[np/(m_e V_Z)]^2 - 1}{[np/(m_e V_Z)]^2 + 1} \right\}, \quad (2.4)$$

где m_e – масса электрона; V_Z – кулоновская единица скорости [3]; $P_n^m(x)$ – полином Лежандра; $C_n^m(x)$ – полином Генбауэра.

Рассматривая ситуацию, когда электроны плазмы являются неполяризованными, будем использовать усредненную по углам электронную функцию

$$f_{nl}[V] = N_e a_{nl}^2[\mathbf{p}]. \quad (2.5)$$

Сравнительно простым является рассматриваемый ниже случай, когда благодаря кулоновскому l -вырождению энергетических уровней электронов водородоподобного

атома можно считать, что состояния с разными значениями орбитального квантового числа представлены с равными вероятностями. Тогда можно использовать отвечающую главному квантовому числу n функцию распределения

$$f_n[V] = N_e \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{n-1} a_{nl}^2 [2l + 1]. \tag{2.6}$$

Для ее вычисления воспользуемся следующим важным соотношением:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) 2^l (l!)^2 \frac{n(n-l-1)!}{(n+l)!} (1-x^2)^l [C_{n-l-1}^{l+1}(x)]^2 = n^2. \tag{2.7}$$

С его помощью покажем, что

$$f_n[V] = \frac{8}{\pi^2 (V_Z/n)^3 [1 + (nV/V_Z)^2]^4}. \tag{2.8}$$

При $n = 1$ формула (2.8) совпадает с функцией распределения по скоростям электронов основного состояния водородоподобного атома. Существенное отличие (2.8) от функции основного состояния заключается в зависимости (2.8) от главного квантового числа. Именно это отличие является причиной зависимости интенсивности генерации гармоник от квантовых чисел возбужденных энергетических состояний.

3. Следуя работам [4, 5], для описания когерентной тормозной генерации гармоник поля

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \cos \omega t \tag{3.1}$$

воспользуемся кинетическим уравнением Больцмана с интегралом столкновений Ландау. Тогда, подобно изложенному в [5], для столкновительного вклада в плотность электрического тока имеем следующее разложение по нечетным гармоникам возбуждающего поля:

$$\delta \mathbf{j} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2} v^{2N+1} \mathbf{E} \cos[(2N+1)\omega t], \tag{3.2}$$

где N принадлежит множеству натуральных чисел. Здесь эффективные парциальные нелинейные частоты столкновений

$$v^{2N+1}[n, E] = v_Z H \left[2N + 1, n \frac{V_E}{V_Z} \right] \tag{3.3}$$

определяются соотношениями

$$v_Z = \frac{16e^2 e_i^2 N_i A}{m_e^2 V_Z^3}, \tag{3.4}$$

$$H \left[2N + 1, n \frac{V_E}{V_Z} \right] = n^3 A \left[2N + 1, \frac{nV_E}{V_Z} \right], \tag{3.5}$$

$$A[2N + 1, nx] = \frac{1}{x^3} D\alpha[2N + 1, b, x]_{b=1}, \tag{3.6}$$

$$\alpha[2N + 1, b, x] = \frac{d}{db} \left[b \operatorname{arsinh} \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{[(x^2 + b^2)^{1/2} - b]^{2N}}{(2N+1)x^{2N-1}} - \sum_{k=1}^N \frac{2b}{2N - 2k + 1} \frac{[(x^2 + b^2)^{1/2} - b]^{2N-2k+1}}{x^{2N-2k+1}} \right], \tag{3.7}$$

$$D = 1 - \frac{d}{db} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{db^2},$$

где $V_E = |e|E/m_e\omega$ – амплитуда скорости осциллирующей электрона в поле E ; e_i – заряд ионов; N_i – плотность ионов; A – кулоновский логарифм. Формулы (3.3), (3.5), (3.6) и (3.7) не зависят от орбитального квантового числа и в этом смысле проще результатов работы [5].

Если использовать соотношение

$$A[2N + 1, x] = \frac{1}{x} (\operatorname{arsinh} x + a[2N + 1, x]), \tag{3.8}$$

то имея в виду, что в пределе $x \rightarrow \infty$ функции $a[2N + 1, x]$ оказываются порядка единицы, получаем асимптотическую зависимость

$$A[2N + 1, x] \approx \frac{1}{x} \ln \frac{2nV_E}{V_Z}, \tag{3.9}$$

что приводит к скейлингу (ср. с [5])

$$v^{2N+1}[n, E] = v_Z \frac{V_Z^3}{V_E^3} \ln \frac{2nV_E}{V_Z}, \tag{3.10}$$

отвечающему пределу сильного поля

$$\frac{nV_E}{V_Z} \gg 1. \tag{3.11}$$

4. При сравнительно несильных возбуждающих полях, когда нарушено условие (3.11), возникают сложные нелинейные зависимости нелинейных эффективных частот столкновений от поля накачки. Цель дальнейшего изложения состоит в том, чтобы, несмотря на такие сложности, установить факт приближительной (с достаточно большой точностью) скейлинговой зависимости эффективных частот столкновений не только от главного квантового числа (на что уже указывает соотношение (3.5)), но и от номера генерируемой гармоники.

Начнем с того, что рассмотрим генерацию третьей и пятой гармоник. В этом случае согласно формуле (3.7) имеем

$$\alpha[3, b, x] = \operatorname{arsinh} \left(\frac{x}{b} \right) + \frac{8b}{3x} - \frac{8b^2 + 7x^2}{3x(b^2 + x^2)^{1/2}}, \tag{4.1}$$

$$\alpha[5, b, x] = \operatorname{arsinh} \left(\frac{x}{b} \right) + \frac{24b}{5x} + \frac{64b^3}{15x^3}$$

$$- \frac{64b^4 + 104b^2x^2 + 43x^4}{15x^3(b^2 + x^2)^{1/2}}. \tag{4.2}$$

Объединяющим для этих гармоник является то, что согласно (3.6), (3.8), (4.1) и (4.2)

$$a[2N + 1, x] = \frac{x}{(1 + x^2)^{2N+1/2}} P_4[2N + 1, x], \tag{4.3}$$

а различие заключается лишь в полиномах $P_4[2N + 1, x]$, имеющих следующий вид:

$$P_4[3, x] = -\frac{1}{3} (3 + 7x^2 + 3x^4), \tag{4.4}$$

$$P_4[5, x] = -\frac{1}{15}(15 + 35x^2 + 23x^4). \quad (4.5)$$

Формулы (3.5), (3.8), (4.3)–(4.5) дают нам полное описание генерации третьей и пятой гармоник.

5. Несколько сложнее описать более высокие гармоники. Так, в случае седьмой гармоники из формулы (3.7) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha[7, b, x] = & \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{b}{105x^5}(720x^4 + 1600x^2b^2 \\ & + 1152b^4) - \frac{1}{105x^5(b^2 + x^2)^{1/2}}(337x^6 + 1376x^4b^2 \\ & + 2176x^2b^4 + 1152b^6). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Формула (3.8) приводит к следующему соотношению:

$$a[7, x] = \frac{1}{x(1+x^2)^{5/2}}R_{10}[7, x] + \frac{1}{x^5}Q_0[7], \quad (5.2)$$

$$Q_0[7] = \frac{1024}{35}, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} R_{10}[7, x] = & -\frac{1}{105}(3072 + 7680x^2 + 5760x^4 + 1065x^6 \\ & + 125x^8 + 197x^{10}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Можно видеть определенное сходство генерации седьмой гармоники и генерации девятой и одиннадцатой гармоник. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \alpha[9, b, x] = & \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{b}{315x^7}(2800x^6 + 11200x^4b^2 \\ & + 18816x^2b^4 + 10240b^6) - \frac{1}{315x^7(b^2 + x^2)^{1/2}}(1091x^8 \\ & + 6688x^6b^2 + 19328x^4b^4 + 23936x^2b^6 + 10240b^8), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha[11, b, x] = & \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{b}{3465x^9}(37800x^8 + 235200x^6b^2 \\ & + 677376x^4b^4 + 829440x^2b^6 + 358400b^8) \\ & - \frac{1}{3465x^9(b^2 + x^2)^{1/2}}(12701x^{10} + 108568x^8b^2 \\ & + 492608x^6b^4 + 1047296x^4b^6 + 1008640x^2b^8 \\ & + 358400b^{10}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

при этом согласно (3.8)

$$a[9, x] = \frac{1}{x^7(1+x^2)^{5/2}}R_{12}[9, x] + \frac{1}{x^7}Q_2[9, x], \quad (5.7)$$

$$a[11, x] = \frac{1}{x^9(1+x^2)^{5/2}}R_{14}[11, x] + \frac{1}{x^9}Q_4[11, x], \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} R_{12}[9, x] = & -\frac{1}{315}(81920 + 254976x^2 + 279040x^4 \\ & + 119680x^6 + 12795x^8 - 265x^{10} + 671x^{12}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$Q_2[9, x] = \frac{1024(80 + 49x^2)}{315}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} R_{14}[11, x] = & -\frac{1}{3465}(5734400 + 20971520x^2 + 29147136x^4 \\ & + 18749440x^6 + 5236480x^8 + 375945x^{10} - 12715x^{12} \\ & + 8081x^{14}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$Q_4[11, x] = \frac{4096(1400 + 1620x^2 + 441x^4)}{3465}. \quad (5.12)$$

Эти формулы дают аналитическое описание нелинейных эффективных парциальных диэлектрических проницаемостей, которые возникают при генерации гармоник в случае образования плазмы при ионизации ионов водородоподобного атома электронами, находящимися в состоянии l -вырождения.

6. Полученный выше набор формул, как об этом уже говорилось в разд.5, сводится в пределе сильных полей к единой сравнительно простой зависимости от интенсивности возбуждающего поля для интенсивности любой гармоники. Покажем, что помимо этого данный набор формул обладает еще одним сравнительно простым приближенно общим скейлинговым свойством, которое проявляется, если воспользоваться формулой

$$G[2N + 1, x] = (2N + 1)^3 A[2N + 1, x(2N + 1)]. \quad (6.1)$$

Действительно, формула (6.1) описывает приближенный скейлинг, который является единым, отвечающим как зависимости от главного квантового числа и от напряженности возбуждающего поля благодаря аргументу $x = nV_E/V_Z$, так и зависимости от номера гармоники благодаря аргументу $(2N + 1)nV_E/V_Z$, а также зависимости от номера гармоники $(2N + 1)^3$. Это утверждение следует из приблизительного подобия кривых, представленных на рис.1. Такое подобие позволяет найти приближенную зависимость для эффективной частоты столкновений, описывающей генерацию $(2N + 1)$ -й гармоники

$$\nu^{2n+1}[n, E] = \frac{\nu_Z n^3}{(2N + 1)^3} A \left[2N + 1, \frac{nV_E}{V_Z} (2N + 1) \right].$$

Полученные формулы позволяют для линейно поляризованного возбуждающего излучения определить эффек-

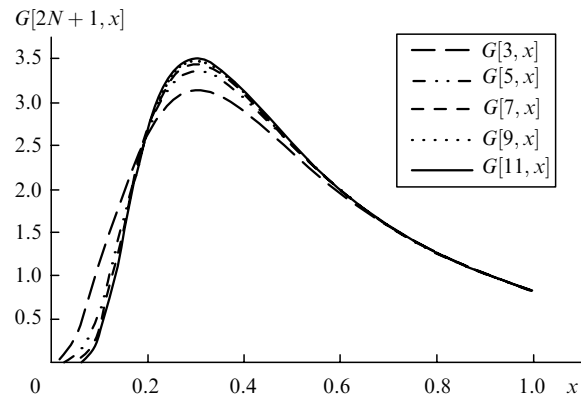


Рис.1. Зависимость скейлинговой функции $G[2N + 1, x]$ от номера гармоники $(2N + 1)$, от квантового состояния n возбужденного иона и от скорости осцилляций электронов поля накачки V_E .

тивность генерации линейно поляризованных волн гармоник как отношение плотности потоков их энергии

$$\eta^{2N+1}[n, E] = \left[\frac{(2N+1)v^{2N+1}[n, E]}{4N(N+1)\omega} \right]^2$$

$$= \left(\frac{v_Z}{\omega} \right)^2 \left[\frac{n^3 G[2N+1, (nV_E/V_Z)(2N+1)]}{4N(N+1)(2N+1)^2} \right]^2.$$

Поскольку $G_{\max} \approx 3.5$, то максимальные значения эффективности генерации различных гармоник соотносятся приблизительно как $v_Z^2 n^6 / (16\omega^2 N^4)$.

Таким образом, зависимость эффективности генерации гармоник от главного квантового числа прямо пропорциональна его шестой степени. Это утверждение имеет силу, если электроны ионизованы с одного и того же энергетического уровня в условиях кулоновского l -вырождения.

Подводя итог, отметим, что главный результат нашего рассмотрения состоит в демонстрации сильной за-

висимости эффективности генерации гармоник при увеличении главного квантового числа энергетического уровня, с которого электроны ионизируются в условиях быстрой надбарьерной ионизации Бете. Полученный результат является точным для модели водородоподобного атома. Другим результатом нашей работы является нахождение приближенного скейлинга зависимости максимума эффективности генерации от номера генерируемой гармоники.

Работа частично поддержана РФФИ (проект № 02-02-16078) и Федеральной программой поддержки ведущих научных школ.

1. Бете Х. *Квантовая механика простейших систем* (Л.–М.: ОНТИ, 1935).
2. Podolsky V., Pauling L. *Phys. Rev.*, **34**, 109 (1929).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М.: Физматгиз, 1963).
4. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **47**, 2254 (1964).
5. Силин В.П., Силин П.В. *Физика плазмы*, **29** (2), 137 (2003).