

ПРИГЛАШЕННАЯ СТАТЬЯ

PACS 03.50.De; 14.70.Bh

Остановленный свет. (К электродинамике без плоских волн)**Л.А.Ривлин**

Пространственно неограниченная плоская волна, как одно из возможных решений уравнений Максвелла, является математически корректным, но физически бессодержательным образом. Отмечено, что физически реализуемые решения вида неплоских волн характеризуются вне материальной среды отклонением от строгой поперечности волны тремя составляющими поляризации, сверхсветовой фазовой и субсветовой групповой скоростями, дисперсией, непрерывным присутствием фрагментов стоячей волны («остановленным светом»), а также существованием массоподобной величины, которая может быть определена как конечная наблюдаемая (но не имманентная) инертная и гравитационная масса покоя фотона. В ряде мысленных экспериментов не удастся отличить последнюю от массы покоя в стандартном понимании.

Ключевые слова: стоячая волна, масса покоя фотона.

Содержание

1. Введение	777
1.1. Плоская волна – тривиальное, но физически не существующее решение уравнений электродинамики	
1.2. Наблюдаемая масса покоя фотона как результат присутствия в поле фрагментов стоячей волны. Дефект импульса	
1.3. Постмаксвелловская электродинамика, допускающая существование конечной массы покоя фотона	
1.4. Итоговые замечания	
2. Детали структуры поля неплоских волн.	780
2.1. Поле гармонического электрического дипольного осциллятора	
2.2. Сверхсветовая фазовая скорость волны в поле гармонического дипольного осциллятора	
2.3. Потоки энергии в поле гармонического дипольного осциллятора	
2.4. Субсветовая групповая скорость волны в поле гармонического дипольного осциллятора	
2.5. Дисперсия волны в поле гармонического диполя	
2.6. Топологическое единство структуры полей гармонического диполя и волноводной моды	
2.7. Другие простые примеры неплоских волн, сводимых к трансформированным полям волноводных мод	
2.8. Итоговые замечания	
3. Базовая волноводная модель: потенциальная яма для фотонов	785
3.1. Поле мод полого металлического волновода	
3.2. Аналогия де-Бройля: волноводное дисперсионное уравнение versus функция Гамильтона свободной частицы	
3.3. Эволюция во времени поля моды при изменении поперечного сечения волновода	
3.4. Механизм трансформации энергии при перемещении стенок волновода	
3.5. Трансформация энергии при вариации поперечных размеров обобщенно-цилиндрического волновода произвольного сечения	
3.6. Итоговые замечания	
4. Наблюдаемая масса покоя фотона в сопутствующей ему системе координат	789
4.1. Релятивистская кинематика поля волноводной моды	
4.2. Релятивистские преобразования векторов поля и вектора Пойнтинга	
4.3. Итоговые замечания	
5. Динамические эксперименты над фотонами конечной наблюдаемой массы покоя	791
5.1. Продольное ускорение фотона в волноводе	
5.2. Поперечное ускорение фотона в волноводе	
5.3. Центростремительное ускорение фотона в криволинейном волноводе	
5.4. Гравитационное ускорение тяжелого фотона. Настоящая «черная дыра»	
5.5. Оптический резонатор с гравитационным зеркалом	
5.6. Взвешивание фотона	
5.7. Волновое уравнение versus уравнение Шредингера	
5.8. Итоговые замечания	
6. Заключение	797
Литература	797

Л.А.Ривлин. Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78;
e-mail: rivlin140322@mcnet.ru

Поступила в редакцию 25 сентября 2002 г.

1. Введение

Электромагнитные волны в вакууме являются строго поперечными и обладают только двумя возможными поляризациями, их фазовая и групповая скорости одинаковы и равны константе c , а дисперсия отсутствует. На

квантовом языке это означает, что масса покоя фотонов, представляемых такими волнами, равна нулю [1]. Эти совершенно бесспорные фундаментальные положения классической электродинамики очевидным образом демонстрируются, например, при рассмотрении плоской электромагнитной волны.

Наряду с этим оказывается, что существует ряд достаточно очевидных явлений в физически-реализуемых полях, которые, на первый взгляд, не соответствуют указанным положениям, хотя ниже эти явления рассмотрены строго в рамках максвелловской электродинамики без привнесения каких-либо дополнительных гипотез. К ним относятся такие явления, как сверх- и субсветовое распространение и дисперсия электромагнитных волн вне материальной среды, неперенное наличие в любых электромагнитных полях в свободном пространстве продольных компонент и третьей составляющей поляризации, нарушающих строгую поперечность волны, а также присутствие неподвижной составляющей в виде фрагментов стоячей волны («остановленный свет»). Последнее обуславливает существования конечной массоподобной величины, которую можно интерпретировать как массу покоя фотонов, заполняющих моды свободного пространства. Хотя эту массоподобную величину не удастся в каком-либо мысленном эксперименте отличить от ненулевой инертной и гравитационной массы покоя массивной частицы в обычном понимании, она, разумеется, не является столь же имманентной характеристикой фотона, как, например, масса покоя протона или электрона. Поэтому далее в отличие от истинной массы покоя эта величина будет называться *наблюдаемой массой покоя* фотона.

Отправной посылкой настоящего анализа служит зачастую игнорируемый факт физической бессодержательности понятия идеальной пространственно неограниченной плоской волны. Отказ от образа плоской волны как от физической реальности превращает все решения уравнений электродинамики в пространственно ограниченные и, следовательно, удовлетворяющие известным следствиям теоремы Фурье, которые трактуются как «классическое соотношение неопределенности». Перечисленные выше связанные друг с другом особенности физически реализуемых волновых полей в свободном пространстве по существу прямо вытекают из последнего утверждения.

Так, следствием пространственного ограничения полей по координатам, поперечным по отношению к генеральному направлению распространения волны, является неперенное наличие в ней фрагментов стоячей волны. Именно этот так называемый остановленный свет служит первопричиной порождения упомянутой выше ненулевой наблюдаемой инертной и гравитационной массы покоя фотона.

В настоящем анализе исключительно продуктивным оказывается совет Л.И.Мандельштама, касающийся подхода к изучению сложных электромагнитных явлений: «Я считаю правильным такой путь: взять какой-нибудь простой случай распространения электромагнитных волн ..., который действительно поддается настоящему, хорошему, строгому исследованию, – исследовать его и установить, что там делается» [2].

Следуя этому совету, в дальнейшем основное внимание уделено наиболее выразительному и физически прозрачному примеру пространственного ограничения вол-

новых полей – полям, заключенным в бесконечно глубокую потенциальную яму для фотонов. Этому предельному случаю пространственно ограниченных волновых полей соответствуют поля мод идеального полого металлического волновода, которые далее принимаются в качестве базовой модели рассматриваемых явлений. Для подхода к этой базовой модели предварительно прослеживаются кардинальные отличия полей других физически реализуемых неплоских волн от идеализированного поля плоской волны. Подобное рассмотрение проводится на нескольких типичных примерах волн в свободном пространстве, таких как поле излучения гармонического электрического диполя – тест-объекта в смысле мандельштамовского совета, и др. Далее оказывается, что как эти, так и практически все другие поля, представимые в виде аналитических решений, могут быть топологически непрерывно трансформированы в поля мод полых металлических волноводов. Это является дополнительной мотивацией к тому, чтобы принять волноводные моды в качестве базовой модели для дальнейшего детального изучения рассматриваемого круга проблем.

В цикле мысленных кинематических и динамических экспериментов обнаруживается, что поведение наблюдаемой инертной и гравитационной массы покоя фотона в волноводе неотлично от поведения обычных массивных частиц, поставленных в аналогичные условия.

Изученные факты, более наглядно раскрывающие некоторые закономерности классической электродинамики, представляются также эвристически интересными, поскольку позволяют наблюдать непрерывную трансформацию фотонов безмассового волнового поля в кванты, обладающие ненулевой наблюдаемой инертной и гравитационной массой покоя. Оказывается, типичное безмассовое поле способно в определенных условиях породить поле массивных частиц.

1.1. Плоская волна – тривиальное, но физически не существующее решение уравнений электродинамики

«...и отделил Бог свет от тьмы...» (Бытие, I, 4.)

Как отмечено выше, все высказанные утверждения не предполагают ревизии основ максвелловской электродинамики, т. е. уравнений, связывающих векторы поля E , H , D , B с объемной плотностью заряда ρ и плотностью тока проводимости j :

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.4)$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E, \quad (1.5)$$

$$B = \mu_0 \mu H, \quad (1.6)$$

где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а ε и μ – соответствующие проницаемости вещества; t – время. В дальнейшем в большинстве случаев принимается, что $\varepsilon = \mu = 1$.

Образ пространственно неограниченной плоской волны, неизменной по поперечным пространственным координатам x и y и распространяющейся с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} ($|\mathbf{k}| = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}/c$) вдоль координаты z ,

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (1.8)$$

($\mathbf{E}_0 = \text{const}$ и $\mathbf{H}_0 = \text{const}$ – амплитудные множители), есть одно из возможных решений волновых уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.10)$$

которые являются прямыми следствиями уравнений Максвелла при отсутствии источников поля ($\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$).

Разумеется, плоская волна (1.7), (1.8) есть совершенный *математический* инструмент максвелловской электродинамики. Однако хорошо известно, что попытка наделять этот идеализированный образ *физическим* содержанием немедленно приводит к выводу о тривиальности подобного решения волнового уравнения и о невозможности существования реальной одиночной плоской волны. Достаточно сослаться на прямое следствие интегральной теоремы Пойнтинга, состоящее в том, что распространение плоской волны с конечными значениями векторов поля должно сопровождаться переносом бесконечно большого интегрального потока энергии и, vice versa, конечность потока энергии с неизбежностью требует нулевых амплитуд векторов поля. Оба случая представляются физически неприемлемыми.

Разумеется, речь здесь идет о физической нереализуемости единичной изолированной плоской волны. Очевидно, что суперпозиция множества плоских волн способна представить любое реальное волновое поле, и наоборот, последнее может быть всегда разложено на систему плоских волн с разными волновыми векторами. Однако подобные парциальные плоские волны не существуют самостоятельно вне рассматриваемой суперпозиции, представляющей собой физически действительно реализуемое волновое поле, которое, естественно, плоской волной не является.

Следствием всего сказанного является понимание того, что любые физически реализуемые волновые поля пространственно ограничены и в той или иной мере отклоняются от образа идеальной плоской волны.

Впрочем, эпиграф указывает на достаточно древнее понимание этого фундаментального факта конечности области пространства, занимаемого любым электромагнитным полем: одним из главных деяний первого дня творения была *пространственная локализация первоизданного электромагнитного поля*.

1.2. Наблюдаемая масса покоя фотона как результат присутствия в поле фрагментов стоячей волны. Дефект импульса

Особо следует остановиться на факте неперменного присутствия фрагментов стоячей волны (остановленного света) в любом реальном волновом поле. Словосочетание остановленный свет звучит как абсолютный оксю-

морон: электромагнитная волна существует только в движении. Тем не менее люди издавна умели «останавливать» свет. «Если ты поместишь светильник ночью между двух гладких зеркал, поставленных на расстоянии локтя, то в каждом увидишь бесчисленные отражения света, одно меньше другого, и так они от подобного к подобному уходят в бесконечность, будто в каждом зеркале бесконечное множество зеркал». Это описание устройства, известного ныне как открытый оптический резонатор, принадлежит Леонардо да Винчи и содержится в тетради, получившей позднее название «Атлантический кодекс».

Здесь уместно также вспомнить ответ Шредингера на вопрос, поставленный им же в [3]: являются ли утверждения о том, что плоская волна не может быть остановлена (cannot be «transformed to rest») и соответственно, что масса покоя фотона равна нулю, абсолютно строгими или лишь приближенными? Ответ состоит в том, что при попытке остановить плоскую волну ее поле убывает в пределе до нуля, т. е. плоская волна прекращает свое существование.

Пространственная локализация любого физически реализуемого волнового поля требует уточнения утверждения о равенстве нулю массы покоя фотона M [4]. В самом деле, подобное стандартное утверждение, строго говоря, зиждется на прямом следствии из вида функции Гамильтона для свободной частицы:

$$E^2 = (Mc^2)^2 + (c|\mathbf{p}|)^2, \quad (1.11)$$

где $E = \hbar\omega$ – полная энергия фотона, если, как обычно, принять, что импульс фотона \mathbf{p} равен $\hbar\omega/c$. Это безусловно справедливо лишь для фотонов, представляемых неограниченной плоской волной, которая, как уже отмечалось, не имеет реального физического содержания.

Наличие фрагментов стоячей волны в реальных волновых полях радикально изменяет ситуацию. Образующие такой фрагмент парциальные волны обладают равными по модулю и противоположно направленными компонентами волновых векторов $\Delta\mathbf{k}_1$ и $\Delta\mathbf{k}_2 = -\Delta\mathbf{k}_1$, векторная сумма которых $\Delta\mathbf{k}_1 + \Delta\mathbf{k}_2 = 0$. Таким образом, из модуля полного импульса фотона, представленного реальной электромагнитной волной, вычитается величина

$$\delta|\mathbf{p}| = 2\hbar|\Delta\mathbf{k}_1|, \quad (1.12)$$

которую можно назвать *дефектом импульса*, так что выражение (1.11) для фотона, принадлежащего полю с фрагментами стоячей волны, следует теперь записать так:

$$E^2 = (Mc^2)^2 + \left(c\hbar\frac{\omega}{c}\right)^2 - (c\delta|\mathbf{p}|)^2. \quad (1.13)$$

Из этой модифицированной записи с очевидностью следует существование не равной нулю массоподобной величины

$$M = \frac{\delta|\mathbf{p}|}{c}, \quad (1.14)$$

которой, как будет видно из дальнейшего, могут быть приписаны свойства ненулевой наблюдаемой инертной и гравитационной массы покоя фотона в стандартном понимании.

Если дефект импульса становится равным $\delta|p| = \hbar\omega/c$ (идеальная стоячая волна), то весь импульс фотона оказывается исчерпанным ($|p| = 0$) и происходит полная *остановка* света, а наблюдаемая масса покоя фотона M становится равной $\hbar\omega/c^2$.

Все сказанное близко следующим двум утверждениям: «Любой реальный световой поток имеет отличную от нуля собственную массу. Только бесконечная плоская световая волна, т.е. поток строго коллинеарных фотонов, имеет равную нулю собственную массу. Но такой случай светового потока практически никогда не осуществим, так как любой реальный световой поток пространственно ограничен, т.е. не является бесконечной плоской волной» [5] и «Система двух фотонов будет иметь нулевую массу только в том случае, когда они летят в одном направлении» [6]. Оба эти утверждения сделаны применительно только к световым потокам, но не к единичному фотону. Возникает вопрос: нельзя ли распространить их на случай стоячей волны с *единственным* фотоном в моде, которому и должна быть приписана масса? Представляется, что ответ, несомненно, должен быть положительным, как и ответ на вопрос об исключительной возможности наблюдения интерференции одного и того же единичного фотона.

Важно отметить, что не удается предложить экспериментальный способ отличить физически содержательную величину M от соответствующего параметра обычных массивных частиц. В то же время, как отмечено ранее, эта ненулевая наблюдаемая масса покоя фотона (в противоположность, например, массам электрона или протона) не является имманентной характеристикой фотона, а, оставаясь всегда конечной величиной, варьируется в зависимости от структуры представляющей фотон волны.

Уместна оговорка, касающаяся сегодняшнего взгляда на само понятие фотона: не без оснований утверждается [7], что «фотон как элементарная частица оптического поля не имеет разумного четкого определения... Тем не менее он помогает... предсказывать на качественном уровне результаты новых экспериментальных ситуаций. Вообще отказ на некотором этапе от аксиоматичности способствует продвижению вперед». Не вдаваясь в дальнейшее обсуждение этой проблемы, в настоящем рассмотрении следует придерживаться именно такого подхода.

Другая оговорка касается терминологических вариантов понятия массы. Разумеется, следуя исчерпывающему анализу [6, 8, 9], надлежало бы избегать употребления термина «масса покоя», а говорить о наблюдаемой массе остановленного света, отвечающей его энергии покоя. Однако это может вызвать лишь излишнее затруднение текста статьи, имеющей главным образом методическую направленность. Дополнительным оправданием пусть послужат слова Эйнштейна: «Лучше не вводить никакой другой массы, кроме "массы покоя"» [10].

1.3. Постмаксвелловская электродинамика, допускающая существование конечной массы покоя фотона

Как отмечено выше, наше рассмотрение ограничено рамками максвелловской электродинамики. Тем не менее следует упомянуть о попытках модернизации уравнений Максвелла (1.1)–(1.6), направленных на учет конечности массы покоя фотона, которые неоднократно

делались такими физиками, как Прока [11], Шредингер [12], де Бройль [13], Фейнман [14] и др.

Так, уравнения Максвелла – Прока [11], предполагающие наличие ненулевой массы покоя фотона, содержат в (1.2) и (1.3) наряду с источниками поля ρ и \mathbf{j} дополнительные члены

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{A}}{A^2}, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho - \varepsilon_0 \frac{\varphi}{A^2}, \quad (1.16)$$

где

$$A = \frac{2\pi\hbar}{Mc} \quad (1.17)$$

– комптоновская длина волны фотона с массой покоя M ; \mathbf{A} и φ – векторный и скалярный потенциалы соответственно. Все эти постмаксвелловские версии не являются предметом настоящего анализа.

Представляют также интерес различные теоретические, наблюдательные и экспериментальные оценки верхнего предела массы покоя фотона, в той или иной мере основанные на постмаксвелловских представлениях (сведены в табл.1).

1.4. Итоговые замечания

Таким образом, отказ от физически бессодержательного образа идеальной плоской волны с неизбежностью приводит к присутствию в любых полях фрагментов стоячей волны (остановленного света) и, как следствие, к компенсации встречных компонент импульса фотона, представляемого подобной неплоской волной. Эта компенсация создает в выражении для функции Гамильтона член дефекта импульса, порождающий массоподобную величину, которой могут быть приписаны свойства конечной наблюдаемой массы покоя фотона.

2. Детали структуры поля неплоских волн

2.1. Поле гармонического электрического дипольного осциллятора

В любом учебнике электродинамики можно найти точное решение для векторов поля излучения гармонического электрического диполя в виде ненулевых значений трех его компонент в сферической системе координат (R, θ, φ) с полярной осью, совпадающей с направлением вектора дипольного момента:

для меридиональной составляющей электрического вектора \mathbf{E}

$$E_\theta = E_0 \sin \theta [1 + ikR - (kR)^2] \exp(i\Phi), \quad (2.1)$$

для радиальной составляющей \mathbf{E}

$$E_R = 2E_0 \cos \theta (1 + ikR) \exp(i\Phi) \quad (2.2)$$

и для азимутальной составляющей магнитной индукции \mathbf{B} , касательной к параллелям координатной системы,

$$B_\varphi = iE_0 \frac{n}{c} kR \sin \theta [1 + ikR] \exp(i\Phi), \quad (2.3)$$

где $E_0 = p_0/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3$; p_0 – модуль дипольного момента; $\Phi = \omega t - kR$ – фаза; $k = \omega n/c$ – волновое число; $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$

Табл.1. Оценки верхнего предела массы покоя фотона

M (г)	Mc^2 (эВ)	λ (м)	Год, литература	Метод оценки
10^{-44}	6×10^{-12}	2×10^5	1940, [15]	По отсутствию цветового эффекта при затмении удаленных двойных звезд
10^{-47}	6×10^{-15}	2×10^8	1943, [16]	По возможному отклонению магнитного поля Земли от закона Гаусса
10^{-47}	6×10^{-15}	2×10^8	1971, [17]	Проверка закона Кулона (геометрия концентрических сфер)
2×10^{-43}	10^{-10}	10^4	1971, [14]	По лабораторным измерениям дисперсии света
8×10^{-49}	5×10^{-16}	2×10^9	1975, [18]	По измерениям магнитного поля Юпитера
10^{-48}	6×10^{-16}	2×10^9	1980, [19]	Сводная база данных
2×10^{-66}	10^{-33}	10^{27}	1984, [20]	По наименьшей измеряемой из соотношения неопределенностей массе при возрасте Вселенной 5×10^{17} с
10^{-45}	5×10^{-13}	2.5×10^6	1992, [21]	По низкотемпературному нуль-тесту закона Ампера
2×10^{-48}	10^{-15}	2×10^9	1994, [22]	По измерениям магнитного поля Земли
$2 \times 10^{-50} - 4 \times 10^{-49}$	$10^{-17} - 2 \times 10^{-16}$	$10^{11} - 6 \times 10^9$	1998, [23]	По влиянию космического векторного потенциала (эксперимент с крутильными весами)
10^{-44}	6×10^{-12}	2×10^5	1999, [24]	По дисперсии излучения космических гамма-вспышек
10^{-51}	7×10^{-19}	2×10^{12}	2003, [25]	По влиянию космического векторного потенциала (эксперимент с крутильным маятником)

– показатель преломления среды. На рис.1 представлена общеизвестная структура электрических силовых линий поля гармонического осциллятора в меридиональной плоскости сферической системы координат.

Важно отметить, что компоненты поля (2.1)–(2.3) при фиксированном значении $R = \text{const}$ имеют типичный характер стоячей волны вдоль меридиональной линии ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$) координатной системы ($\sim \cos \theta \exp i\omega t$ или $\sim \sin \theta \exp i\omega t$). В сущности эти зависимости эквивалентны меридиональным собственным функциям (вида функций Лежандра) волнового уравнения в сферических координатах [26], играющим в структуре поля ту же роль, что и, например, синусоидально-косинусоидальные поперечные собственные функции задачи о волноводе прямоугольного сечения.

Выражения (2.1)–(2.3) в тригонометрической форме имеют следующий вид:

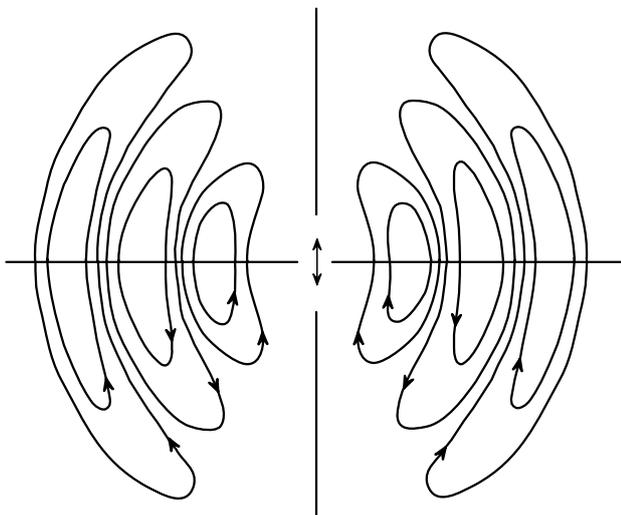


Рис.1.

$$E_\theta = E_0 \sin \theta [(1 - k^2 R^2) \cos \Phi - kR \sin \Phi], \quad (2.4)$$

$$E_R = 2E_0 \cos \theta [\cos \Phi - kR \sin \Phi], \quad (2.5)$$

$$B_\varphi = -E_0 \frac{n}{c} kR \sin \theta [\sin \Phi + kR \cos \Phi]. \quad (2.6)$$

Если, как обычно, в дальней (волновой) зоне, где $kR \gg 1$, сохранить лишь члены с высшими степенями (kR), то

$$E_\theta \approx -E_0 (kR)^2 \sin \theta \cos \Phi, \quad (2.7)$$

$$E_R \approx 2E_0 (kR) \cos \theta \sin \Phi, \quad (2.8)$$

$$B_\varphi \approx -E_0 \frac{n}{c} (kR)^2 \sin \theta \cos \Phi = E_\theta \frac{n}{c}. \quad (2.9)$$

В силу неравенства $|E_R|/|E_\theta| \ll 1$ можно пренебречь радиальной компонентой E_R , что приводит к часто используемому приближению чисто поперечной сферической волны с взаимно ортогональными E_θ , B_φ и k .

2.2. Сверхсветовая фазовая скорость волны в поле гармонического дипольного осциллятора

Асимптотика, выраженная формулами (2.7)–(2.9) и неравенством $|E_R|/|E_\theta| \ll 1$, удобная во множестве практических задач, по существу маскирует детальную структуру поля гармонического диполя, поскольку, строго говоря, $(kR)^{-1} \neq 0$ и $E_R \neq 0$ даже в дальней волновой зоне, где $kR \gg 1$. Присутствие малой, но конечной радиальной компоненты электрического вектора E_R прямо указывает на отклонение от чисто поперечного характера волны (так что в стандартных символах она должна быть обозначена как волна типа ТМ, но отнюдь не ТЕМ), и на наличие меридиональной составляющей k_θ у волнового вектора k , который утрачивает строго радиальную направленность, присущую сферической волне.

Таким образом, поскольку $E_R \neq 0$, квадрат волнового вектора $k^2 = k_R^2 + k_\theta^2 + k_\phi^2$ включает в себя наряду с радиальной компонентой $k_R \neq 0$ еще и $k_\theta \neq 0$ (при $k_\phi = 0$). В результате радиальная фазовая скорость волны

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_R} = \frac{c/n}{[1 - (k_\theta/k)^2]^{1/2}} > \frac{c}{n} \quad (2.10)$$

оказывается сверхсветовой в свободном пространстве (при показателе преломления среды $n = 1$). Поскольку же E_R , а следовательно, и k_θ зависят от меридионального угла θ , точно так же оказывается зависимой от θ и v_{ph} , что еще раз указывает на отклонение фазового фронта волны от идеальной сферичности.

2.3. Потоки энергии в поле гармонического дипольного осциллятора

Наряду со стандартным выражением для радиальной компоненты вектора Пойнтинга в приближении дальней зоны ($(kR)^{-1} \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} P_R &= E_\theta \frac{B_\phi}{\mu_0 \mu} = E_\theta^2 \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} \\ &= E_0^2 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} (kR)^4 \sin^2 \theta \cos^2 \Phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

наличествует хотя и малая, но не нулевая меридиональная компонента с мгновенным значением

$$P_\theta = -E_R \frac{B_\phi}{\mu_0 \mu} = -\frac{E_0^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} (kR)^3 \sin 2\theta \sin 2\Phi. \quad (2.12)$$

Эта меридиональная компонента вектора Пойнтинга (в отличие от радиальной) четырежды за период меняет знак, поэтому ее среднее за период значение равно нулю, т. е. постоянный перенос энергии вдоль меридиана, как и следовало ожидать, отсутствует. Однако знакопеременные пульсации P_θ , являющиеся следствием фазового сдвига на $\pi/2$ между электрической (E_R) и магнитной (B_ϕ) составляющими, еще раз свидетельствуют о наличии отмеченной выше стоячей волны вдоль меридиана сферической системы координат.

Наличие пульсирующей меридиональной составляющей вектора Пойнтинга приводит к отклонению траектории потока электромагнитной энергии от строго радиального направления. Годограф вектора Пойнтинга на меридиональной плоскости имеет вид извилистой кривой, амплитуда поперечного отклонения которой от строго радиального направления пропорциональна $\sin 2\theta$. Подобное отклонение от прямолинейного распространения энергии с неизбежностью приводит к тому, что радиальная скорость ее транспортировки оказывается меньше скорости света.

2.4. Субсветовая групповая скорость волны в поле гармонического дипольного осциллятора

Локальное значение радиальной групповой скорости в точке (t, R, θ, ϕ)

$$v_{\text{gr}}(R, \theta) = \frac{P_R}{w(R, \theta)} \quad (2.13)$$

можно определить как отношение радиальной компоненты вектора Пойнтинга P_R к полной плотности энергии поля

$$\begin{aligned} w(R, \theta) &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} (E_\theta^2 + E_R^2) + \frac{\mu_0 \mu}{2} H_\phi^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} (E_\theta^2 + E_R^2) + \frac{B_\phi^2}{2\mu_0 \mu} = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 (kR)^4 \\ &\times \left[\sin^2 \theta \cos^2 \Phi + \frac{2}{(kR)^2} \cos^2 \theta \sin^2 \Phi \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

т. е.

$$v_{\text{gr}}(R, \theta) = \frac{c/n}{1 + \frac{2}{(kR)^2} \frac{\tan^2 \Phi}{\tan^2 \theta}} \leq \frac{c}{n}. \quad (2.15)$$

Локальная групповая скорость (2.15) непостоянна: при вариации фазы Φ она пульсирует от $v_{\text{gr}} = c/n$ при $\Phi = 0, \pi$ до полной остановки ($v_{\text{gr}} = 0$) при $\Phi = \pi/2, 3\pi/2$. Кроме того, она изменяется от $v_{\text{gr}} = 0$ в направлении полярной оси при $\theta = 0$ до совпадения со скоростью света $v_{\text{gr}} = c/n$ в экваториальной плоскости при $\theta = \pi/2$. Все это имеет место даже в дальней волновой зоне, где $kR \gg 1$, однако из-за малости параметра $(kR)^{-2}$ становится существенным лишь вблизи $\Phi = \pi/2, 3\pi/2$ и (или) $\theta = 0$.

Дополнительную информацию о поведении локальной групповой скорости дает ее среднее за период значение

$$\bar{v}_{\text{gr}}(R, \theta) = \frac{\bar{P}_R}{\bar{w}(R, \theta)} = \frac{c/n}{1 + \frac{2}{(kR)^2} \tan^2 \theta} \leq \frac{c}{n}, \quad (2.16)$$

равное отношению среднего за период значения радиальной компоненты вектора Пойнтинга

$$\bar{P}_R = \frac{E_0^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} (kR)^4 \sin^2 \theta \quad (2.17)$$

к среднему за период значению плотности электромагнитной энергии

$$\bar{w}(R, \theta) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{E_0^2}{2} (kR)^4 \left[\sin^2 \theta + \frac{2}{(kR)^2} \cos^2 \theta \right]. \quad (2.18)$$

Интегральная групповая скорость как полная скорость транспортировки всей энергии излучения диполя может быть определена отношением

$$v_{\text{gr}}^* = \frac{P_R^*}{w^*} \quad (2.19)$$

полного потока радиальной компоненты вектора Пойнтинга

$$P_R^* = 2\pi \int_0^\pi P_R R^2 \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} E_0^2 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} (kR)^4 R^2 \cos^2 \Phi \quad (2.20)$$

к полной электромагнитной энергии в шаровом слое радиусом R

$$w^* = 2\pi \int_0^\pi w R^2 \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} E_0^2 \varepsilon_0 \varepsilon (kR)^4 R^2 \times \left[\cos^2 \Phi + \frac{\sin^2 \Phi}{(kR)^2} \right], \quad (2.21)$$

т. е.

$$v_{gr}^* = \frac{c/n}{1 + \frac{\tan^2 \Phi}{(kR)^2}} \leq \frac{c}{n}. \quad (2.22)$$

Введем среднюю за период интегральную групповую скорость

$$\bar{v}_{gr}^* = \frac{\bar{P}_R^*}{\bar{w}^*} \quad (2.23)$$

в виде отношения среднего за период полного потока радиальной компоненты вектора Пойнтинга

$$\bar{P}_R^* = \frac{4\pi}{3} E_0^2 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} \right)^{1/2} (kR)^4 R^2 \quad (2.24)$$

к средней за период полной электромагнитной энергии в шаровом слое

$$\bar{w}^* = \frac{4\pi}{3} E_0^2 \varepsilon_0 \varepsilon (kR)^4 R^2 [1 + (kR)^{-2}], \quad (2.25)$$

а именно

$$\bar{v}_{gr}^* = \frac{c/n}{1 + (kR)^{-2}} \leq \frac{c}{n}. \quad (2.26)$$

Групповая скорость по любому из приведенных определений оказывается субсветовой. Зависимости $\bar{v}_{gr}(R\theta)$ от угла θ (2.16) и v_{gr}^* от фазы Φ (2.22) имеют узкие провалы кривых, в которых групповые скорости обращаются в нуль и радиальное движение волны останавливается. Ширины этих провалов есть соответственно

$$\Delta\theta \approx \frac{2}{kR} \ll 1, \quad (2.27)$$

$$\Delta\Phi \approx \frac{2}{kR} \ll 1, \quad (2.28)$$

и они убывают обратно пропорционально расстоянию R . Таким образом, на значительном расстоянии от излучающего диполя значения групповых скоростей по их различным определениям, оставаясь субсветовыми, практически мало отличаются от c/n (за исключением узких интервалов $\Delta\theta$ (2.27) и $\Delta\Phi$ (2.28)).

2.5. Дисперсия волны в поле гармонического диполя

Рассмотренное выше поведение фазовой и групповой скоростей определяется параметром $kR = \omega n R/c$, т. е. при заданном значении R – непосредственно частотой волны ω . Иными словами, имеет место нормальная частотная дисперсия фазовой и групповой скоростей волны вне материальной среды.

Резюмируя, можно утверждать, что перечисленные во Введении особенности неплоских электромагнитных волн обнаруживаются в структуре поля излучения гармонического электродипольного осциллятора, рассматриваемого как типичный пример волнового поля в свободном пространстве.

2.6. Топологическое единство структуры полей гармонического диполя и волноводной моды

Как отмечалось во Введении, основные свойства реальных неплоских волн, отличающиеся от представлений, игнорирующих физическую бессодержательность образа плоской волны, проявляют себя наиболее четко и физически прозрачно при изучении полей мод идеального металлического волновода, принятых далее в качестве базовой модели. Все эти свойства обнаружены и у поля излучения гармонического дипольного осциллятора, однако их математическое выражение менее наглядно, чем в базовой модели, рассмотренной ниже. В первую очередь это относится к отсутствию точного математического выражения для ненулевой наблюдаемой массы покоя фотонов, заполняющих моду излучения осцилля-

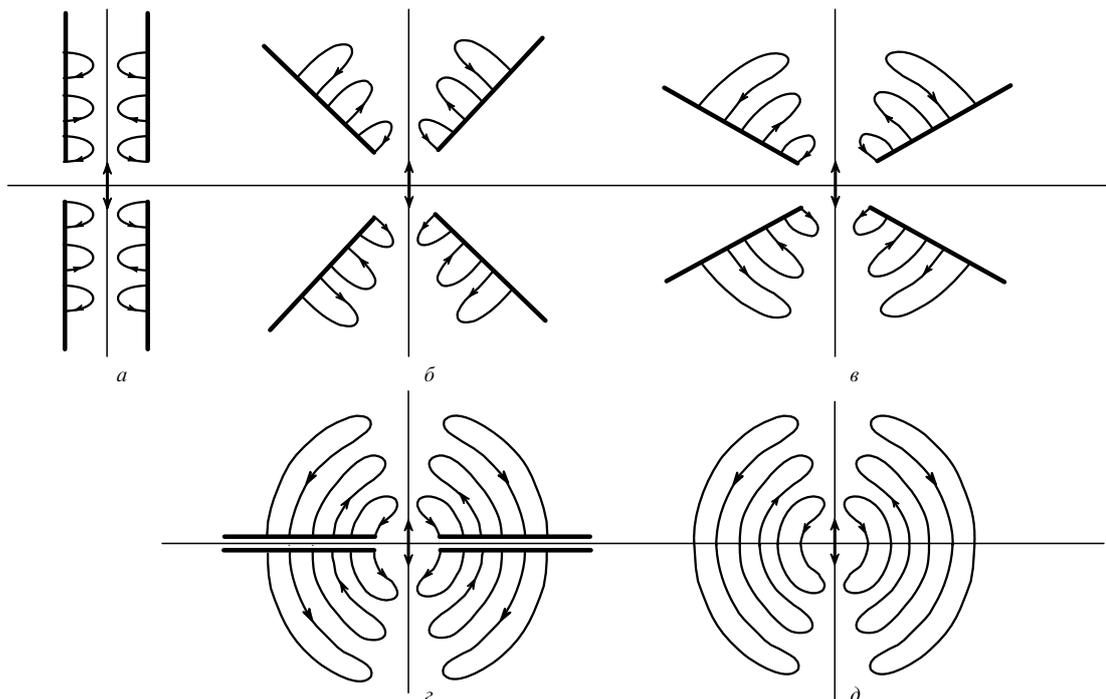


Рис.2.

тора. Эта масса порождается обнаруженным присутствием в поле излучения остановленного света в виде стоячей волны вдоль меридиональной координаты ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$).

Чтобы наметить путь перехода от поля излучения гармонического диполя к изучаемой ниже базовой модели полей волноводных мод и вскрыть структурно-топологическое единство этих полей, полезно показать, как происходит их трансформация друг в друга при топологически непрерывном перемещении граничных условий.

Оказывается, поле излучения гармонического электрического диполя в свободном пространстве можно представить как результат непрерывной трансформации моды TM_{01} круглого цилиндрического волновода (рис.2,а) при его плавном преобразовании в два круглых конических волновода (на рис.2,б, в показаны последовательные стадии этого преобразования, но для упрощения – без точного воспроизведения формы силовых линий рис.1; металлические границы показаны сплошными жирными прямыми). Общая ось волноводов направлена по вектору возбуждающего дипольного момента, а вершины конусов совпадают с точкой расположения последнего. Преобразование граничных условий состоит в постепенном увеличении углов при вершине конусов и завершается полным воспроизведением поля диполя, когда эти углы достигают 180° и образующие обоих конусов оказываются совмещенными (рис.2,г). При этом волновое поле охватывает все бесконечное пространство, рассеянное металлической границей по экваториальной плоскости сферической системы координат, в которой записано поле диполя. Ясно, что такое рассеяние не нарушает структуру поля диполя, поскольку в экваториальной плоскости тангенциальная компонента электрического вектора равна нулю и после завершения преобразования экваториальные металлические плоскости (бывшие стенки волноводов) могут быть удалены вовсе (рис.2,д). Очевидно, возможна и обратная последовательность стадий преобразования.

Таким образом, оставаясь в рамках нарисованной картины, можно сказать, что поле гармонического диполя есть ничто иное, как поле двух соосных круглых конических волноводов с углами при вершине конусов 180° , и наоборот.

2.7. Другие простые примеры неплоских волн, сводимых к трансформированным полям волноводных мод

Простейший и наглядный способ избавиться от идеализированного образа пространственно беспредельной плоской волны состоит в ограничении ее распространения, например посредством отражения от плоского зеркала под углом падения ϑ . В этом случае волновое поле приобретает все обсуждавшиеся выше особенности: оно становится ограниченным, заполняя лишь полупространство по одну сторону зеркала; оно перестает быть представленным единичной плоской волной, а становится результатом интерференции двух волн – падающей и отраженной; в нем возникают неподвижная составляющая (остановленный свет) в виде стоячей волны, направленной нормально к поверхности зеркала с шагом $\pi c/\omega \sin \vartheta$, а также составляющая, бегущая параллельно зеркалу с фазовой скоростью

$$v_{\text{ph}} = c/\sin \vartheta > c \quad (2.29)$$

и со скоростью транспортировки электромагнитной энергии

$$v_{\text{gr}} = c \sin \vartheta < c. \quad (2.30)$$

Говоря о связи с базовой моделью, рассматриваемой ниже, достаточно отметить, что интерференционное поле в этом случае очевидным образом совпадает с полем моды планарного металлического волновода при удалении одной из стенок на бесконечность.

Этот пример позволяет легко обнаружить дефект импульса фотона, введенный в п.1.2. В энергию фотона, представляемого рассматриваемым интерференционным полем, вносит равный вклад каждая из интерферирующих волн (падающая и отраженная), а его вектор импульса складывается из четырех компонент, принадлежащих нормальному и тангенциальному составляющим. Для падающей волны

$$p_{1n} = \frac{\hbar\omega}{2c} \cos \vartheta, \quad p_{1t} = \frac{\hbar\omega}{2c} \sin \vartheta; \quad (2.31)$$

для отраженной волны

$$p_{2n} = -\frac{\hbar\omega}{2c} \cos \vartheta, \quad p_{2t} = \frac{\hbar\omega}{2c} \sin \vartheta. \quad (2.32)$$

Соответственно полные нормальная и тангенциальная составляющие есть

$$p_n = p_{1n} + p_{2n} = 0, \quad (2.33)$$

$$p_t = p_{1t} + p_{2t} = \frac{\hbar\omega}{c} \sin \vartheta. \quad (2.34)$$

Обращение, как и в п.1.2, к следствию из функции Гамильтона

$$(Mc^2)^2 = (\hbar\omega)^2 - (\hbar\omega \sin \vartheta)^2 = (\hbar\omega \cos \vartheta)^2 \quad (2.35)$$

приводит к конечному значению наблюдаемой массы покоя фотона, представляемого рассматриваемым интерференционным волновым полем,

$$M_\vartheta = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cos \vartheta > 0. \quad (2.36)$$

Наблюдаемая масса покоя порождается взаимной компенсацией нормальных компонент вектора импульса и численно равна возникающей при этом (поделенной на скорость света c) величине, которую можно отождествить с введенным выше дефектом импульса δp :

$$M_\vartheta = \frac{\delta p}{c} = \frac{1}{c}(p_{1n} - p_{2n}) = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cos \vartheta > 0. \quad (2.37)$$

Видно, что в зависимости от угла падения ϑ волны на зеркало энергия фотона может трансформироваться в его наблюдаемую массу покоя в пределах от нуля до $\hbar\omega$.

При $\vartheta = \pi/2$ (как и во всех других случаях реализации стоячей волны) происходит полная *остановка* света и модуль импульса фотона оказывается равным нулю.

Другой пример: фраунгоферова дифракция на щели формирует за ней поле со стоячей волной в направлении, перпендикулярном оси распространения дифрагированной волны и с нулями электрического вектора на поверх-

ностях, которые расходятся от щели под углами, зависящими от отношения длины волны к ширине щели. Структура этого поля останется без изменений, если с указанными поверхностями совместить идеальные металлические границы. Такие металлические границы образуют волновод с одномерным ограничением по поперечной координате и с поперечным размером, возрастающим по мере удаления от щели. Поле характеризуется сверхсветовой фазовой и субсветовой групповой скоростями, частотной дисперсией и стоячей волной (остановленным светом) в поперечном направлении. Остановленный свет способен породить ненулевую наблюдаемую массу покоя фотона, принадлежащего моде дифракционного поля.

2.8. Итоговые замечания

Изложенное позволяет заключить, что физически реализуемым электромагнитным полем в свободном пространстве, которое является решением волнового уравнения, присущи свойства пространственно ограниченной неплоской волны, перечисленные во Введении. В этих полях можно обнаружить поверхности, где электрический вектор обращается в нуль. Размещение по этим поверхностям идеально металлических границ не возмущает характер решения внутри последних и превращает исходно произвольную электродинамическую задачу во внутреннюю задачу с металлическими граничными условиями. Ее решение можно рассматривать как поле моды идеального волновода со сложным пространственно-переменным сечением. Это обстоятельство служит методической мотивацией и обоснованием принятой возможности использования базовой волноводной модели для исследования наиболее общих свойств неплоских электромагнитных волн.

3. Базовая волноводная модель: потенциальная яма для фотонов

Предлагаемая базовая модель [27, 28] является предельным случаем поперечного пространственного ограничения электромагнитной волны, когда поле оказывается заключенным в потенциальную яму для фотонов с двумерным ограничением бесконечной глубины по поперечным координатам и неограниченным распространением по третьей продольной координате. Эта предельно простая модель, не обремененная излишними вычислительными сложностями, позволяет наглядно провести дальнейшее исследование перечисленных выше свойств реальной электромагнитной волны, тем более что решения для этой модели хорошо известны и совпадают с решениями для полей моды идеального полого металлического волновода. Из-за его лишь модельного предназначения под термином волновод далее следует понимать указанную потенциальную яму, не рассматривая вопрос о том, насколько реализуемы в различных частотных диапазонах идеально-металлические граничные условия.

Полый металлический волновод, привычный инструмент современной экспериментальной физики и прикладной радиотехники, еще около ста лет назад не был столь тривиальным предметом. В 1893 г. такой проницательный физик, как Хевисайд, еще отрицал возможность распространения электромагнитных волн по трубам [29]. Но всего четыре года спустя Рэлей публикует исследование под названием «О распространении электрических волн

по трубам или о колебаниях диэлектрических цилиндров» [30].

Кстати, другими моделирующими объектами могли бы успешно послужить всевозможные пространственные периодические структуры (см., напр., [31]): от монокристаллов до искусственных металлических и диэлектрических решеток микроволнового диапазона, технологическим развитием которых являются так называемые современные фотонные кристаллы.

3.1. Поля мод полого металлического волновода

Как известно [32], поле моды металлического волновода произвольного сечения состоит из бегущих волн для электрического (\mathbf{E}) и магнитного (\mathbf{H}) векторов

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}(x, y) \exp[i(\omega t - kz)], \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{h}(x, y) \exp[i(\omega t - kz)] \quad (3.2)$$

с поперечными собственными функциями $\mathbf{e}(x, y)$ и $\mathbf{h}(x, y)$ и собственными значениями ω_{nm} (критическими частотами) с целочисленными индексами n и m , где

$$k = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

– постоянная распространения; x, y – поперечные координаты. Существование собственных функций \mathbf{e} и \mathbf{h} свидетельствует о наличии стоячей волны в поперечном сечении волновода.

Фазовая скорость волны вдоль продольной оси z превышает скорость света,

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} > c, \quad (3.4)$$

а групповая скорость транспортировки электромагнитной энергии, равная скорости продольного перемещения фотонов по волноводу, уступает c :

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} < c. \quad (3.5)$$

И v_{ph} и v_{gr} явно зависят от частоты ω , что свидетельствует о нормальной дисперсии.

Собственные значения ω_{nm} и постоянные распространения k связаны с частотой волны ω дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \omega_{nm}^2 + (ck)^2, \quad (3.6)$$

а поперечные компоненты собственных функций e_x, e_y, h_x и h_y выражаются через пространственные производные продольных компонент e_z и h_z :

$$e_x = -i \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \left(k \frac{\partial e_z}{\partial x} + \mu_0 \omega \frac{\partial h_z}{\partial y} \right), \quad (3.7)$$

$$e_y = -i \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \left(k \frac{\partial e_z}{\partial y} - \mu_0 \omega \frac{\partial h_z}{\partial x} \right), \quad (3.8)$$

$$h_x = -i \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \left(k \frac{\partial h_z}{\partial x} - \epsilon_0 \omega \frac{\partial e_z}{\partial y} \right), \quad (3.9)$$

$$h_y = -i \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \left(k \frac{\partial h_z}{\partial y} + \varepsilon_0 \omega \frac{\partial e_z}{\partial x} \right). \quad (3.10)$$

В свою очередь продольные компоненты векторов e_z и h_z являются решениями уравнений

$$\nabla_{xy}^2 e_z + \left(\frac{\omega_{nm}}{c} \right)^2 e_z = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla_{xy}^2 h_z + \left(\frac{\omega_{nm}}{c} \right)^2 h_z = 0 \quad (3.12)$$

с металлическими граничными условиями (∇_{xy}^2 – оператор Лапласа по поперечным координатам).

В зависимости от направления вектора поляризации существуют два типа решений: ТМ-тип, когда $h_z = 0$, и ТЕ-тип, когда $e_z = 0$, чему отвечает система (3.7)–(3.10) с одночленными правыми частями.

Продольный вектор Пойнтинга вдоль оси z есть

$$P = \left(\frac{c\omega}{\omega_{nm}^2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{v_{gr}}{c} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial e_z}{\partial y} \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left(\frac{c\omega}{\omega_{nm}^2} \right)^2 \frac{v_{gr}}{c} \left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{c\omega}{\omega_{nm}^2} \right)^2 \frac{v_{gr}}{c} \left[\left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (3.13)$$

для ТМ- и ТЕ- поляризаций

$$P_{TM} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \frac{v_{gr}/c}{1 - (v_{gr}/c)^2} \times \left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3.14)$$

$$P_{TE} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \frac{v_{gr}/c}{1 - (v_{gr}/c)^2} \times \left[\left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Как и в предыдущих примерах реальных волновых полей (и даже более прозрачно) здесь хорошо прослеживается наличие стоячей волны, продольных компонент векторов поля, дисперсии, сверх- и субсветового распространения и др.

3.2. Аналогия де Бройля: волноводное дисперсионное уравнение versus функция Гамильтона свободной частицы

Неоднократно отмечавшееся структурное подобие выражений (1.11) и (3.6) выглядит особенно наглядно после почленного умножения дисперсионного соотношения на квадрат постоянной Планка \hbar

$$(\hbar\omega)^2 = (\hbar\omega_{nm})^2 + (c\hbar k)^2, \quad (3.16)$$

когда сопоставляются полные энергии E и $\hbar\omega$, отвечающая массе покоя частицы энергия Mc^2 и энергия кванта $\hbar\omega_{nm}$ критической частоты, а также, наконец, модуль импульса $|p|$ и постоянная распространения $\hbar k$.

Указывая на эту аналогию, де Бройль [32] замечает: «Все происходит так, как будто фотон имеет собственную массу, определенную формой волновода и рассматриваемым собственным значением...; в данном волноводе фотон может обладать целой серией собственных масс». И далее: «Оставим в стороне эти соображения, удаляющие нас от предмета...». Ему вторит Фейнман [33], который, делая те же сопоставления, ограничивается словами: «Интересно, не правда ли?».

Между тем, обращаясь к этой аналогии, следует полагать, что природа не столь расточительна, чтобы в ней достаточно часто находилось место истинно случайным совпадениям. Всякий раз, когда приходится столкнуться с кажущимися случайными аналогиями и совпадениями, стоит взглянуть, что за ними кроется. Здесь достаточно вспомнить, к чему, например, привело размышление над «беспричинным» совпадением величин инертной и тяжелой масс тела.

Допущение о физической содержательности рассматриваемой аналогии, состоящей в утверждении, что наблюдаемая масса покоя фотона в волноводе равна

$$M_{nm} = \frac{\hbar\omega_{nm}}{c^2}, \quad (3.17)$$

требует ответа на два вопроса: 1) является ли произведение $\hbar\omega_{nm}$ физически реальной энергией (например, аккумулируемой в каком-либо наглядном процессе и способной преобразовываться в другие виды энергии) и 2) что является источником этой энергии (т. е. установление ее происхождения).

Уместно заметить, что критическая длина волны λ_{nm} в волноводе имеет простой смысл комптоновской длины волны Λ (1.17),

$$\lambda_{nm} = \frac{2\pi c}{\omega_{nm}} = \frac{2\pi\hbar}{Mc} = \Lambda, \quad (3.18)$$

уже встречавшейся ранее в уравнениях Максвелла–Прока.

3.3. Эволюция поля моды во времени при изменении поперечного сечения волновода

Для ответа на поставленные выше вопросы следует рассмотреть эволюцию поля моды по мере изменения поперечного сечения волновода бесконечной длины, происходящего в результате одинакового по всей его длине перемещения стенок параллельно самим себе [34].

Если изменение сечения происходит плавно и достаточно медленно, так что сохраняется как подобие его контура, так и структура поля наблюдаемой моды, то поведение волны определяется неизменностью постоянной распространения $k = \text{const}$, т. е. инвариантностью фазового интервала. Это означает, что разность фаз волны на фиксированном конечном отрезке волновода остается неизменной при указанном варьировании его поперечной геометрии. Из инвариантности $k = \text{const}$ согласно (3.6) следует

$$(ck)^2 = \omega_0^2 - \omega_{nm0}^2 = \omega^2 - \omega_{nm}^2 = \text{const}, \quad (3.19)$$

где ω и ω_{nm} – текущие частота волны и критическая частота моды, а ω_0 и ω_{nm0} – соответствующие начальные значения.

Специальным случаем соотношения фазовой инвариантности (3.19) является начальный волновод с беско-

нечно удаленными друг от друга стенками, т. е. свободное пространство с $\omega_{nm0} = 0$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_{nm}^2. \quad (3.20)$$

Подобную ситуацию можно рассматривать как стартовую при построении волновода с конечным сечением из свободного пространства посредством сближения исходно неограниченно удаленных стенок волновода. При этом по (3.20) стартовое поле с частотой ω_0 порождает в волноводе волну с частотой ω .

Отдельного внимания заслуживает предельный случай исчезающе малой частоты стартового поля ($\omega_0 \rightarrow 0$), когда стартовое поле в сущности является чисто статическим, и

$$\omega = \omega_{nm}. \quad (3.21)$$

В этом предельном случае *статическое* стартовое поле выступает как поле, порождающее в волноводе *волновое* поле с частотой, равной критической.

Нетрудно заметить, что поскольку свободное пространство можно рассматривать как предельный случай волновода с бесконечно удаленными стенками, то нулевая стартовая частота имеет для свободного пространства смысл критической частоты. В самом деле, статическому полю с $\omega_0 \rightarrow 0$ свойствен основной признак поля критической частоты, а именно неспособность к распространению. Иными словами, в этом последнем преобразовании частота поля неизменно остается равной критической.

В обратной последовательности явлений, при увеличении поперечного сечения критического волновода от конечных размеров до неограниченного свободного пространства, наблюдается деградация волнового поля в чисто статическое.

Следующим фундаментальным инвариантом процесса эволюции волновода является утверждение о неизменности фотонного числа заполнения моды ($N = \text{const}$), которое является вполне обоснованным в отсутствие диссипации и нелинейностей. Наряду с этим энергия поля наблюдаемой моды

$$W' = \hbar\omega(N + 1/2) \quad (3.22)$$

изменяется вместе с частотой ω (3.19). Слагаемое $1/2$ отражает вклад нулевых вакуумных флуктуаций.

Полная энергия электромагнитного поля с данными поперечной структурой и критической частотой такова:

$$W = \hbar\omega(N + 1). \quad (3.23)$$

Здесь сумма $1 = 1/2 + 1/2$ отвечает суммарной энергии нулевых флуктуаций, неустранимо присутствующих в одинаковых модах с противоположными направлениями распространения даже при условии, что во второй из них нет реальных фотонов.

Таким образом, в ходе эволюции волновода энергия поля W изменяется в полном соответствии с адиабатическим инвариантом Мэнли – Роу для отношения энергии осциллятора к его частоте:

$$\frac{W}{\omega} = \frac{W_0}{\omega_0} = \hbar(N + 1), \quad (3.24)$$

где W_0 – начальное значение энергии при $\omega = \omega_0$.

Закон сохранения энергии требует, чтобы приращение энергии поля происходило в результате работы некоторой внешней силы, перемещающей стенки волновода и уменьшающей его сечение, причем в данном рассмотрении не имеет значения источник этой внешней силы, важен лишь сам факт накопления энергии в волноводной моде. Очевидно, что в обратном процессе уменьшения энергии поля моды при увеличении сечения волновода происходит возвращение этой энергии внешнему источнику. Ниже будет показано на простом примере, что в этих процессах эволюции сила, приложенная изнутри к стенкам волновода и противодействующая внешней силе, есть сила светового давления поля моды.

Особенно поучителен случай (3.21) построения волновода из свободного пространства с нулевой критической частотой $\omega_{nm0} = 0$, заполненного статическим полем с $\omega_0 \rightarrow 0$. Возникающее волновое поле имеет критическую частоту $\omega = \omega_{nm}$, соответствующую достигнутому конечному сечению волновода, с энергией кванта (по (3.24))

$$\hbar\omega_{nm} = \frac{W}{N + 1}, \quad (3.25)$$

где правая часть формулы есть работа внешней силы, затрачиваемая на порождение одного кванта.

Существенно, что этот процесс не нуждается в наличии реальных начальных фотонов в моде: затравочную роль при $N = 0$ играет всегда присутствующая энергия $\hbar\omega_0(1/2 + 1/2) = \hbar\omega_0$ нулевых флуктуаций вакуума, обладающих к тому же нулевой частотой $\omega_0 \rightarrow 0$ (нечто абсолютно неосозаемое, вроде улыбки чеширского кота!).

Возвращаясь к определению наблюдаемой массы покоя M_{nm} фотона в волноводе (3.17) и к вопросам, поставленным в конце п.3.2, следует констатировать, что величина $M_{nm}c^2$ равна работе внешней силы, создающей поле стоячей волны одного кванта критической частоты. Энергия, эквивалентная наблюдаемой массе M_{nm} , черпается из источника внешней силы и может быть трансформирована в энергию внешнего источника в ходе обратного процесса возрастания сечения волновода вплоть до его превращения в свободное пространство. В итоге следует признать, что определение (3.17) не является чисто формальным, а имеет реальный физически содержательный смысл.

3.4. Механизм трансформации энергии при перемещении стенок волновода

Детали рассмотренных выше процессов трансформации энергии при перемещении стенок волновода полезно проследить на простом примере планарного волновода [34], образованного двумя параллельными металлическими плоскостями с промежутком шириной a ; критическая частота мод поляризации TE_{n0} ($n = 1, 2, \dots, m = 0$) и TM_{n0} ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 0$) есть

$$\omega_{n0} = \pi cn/a. \quad (3.26)$$

Поле моды планарного волновода можно представить как результат интерференции двух парциальных плоских волн, падающих на стенки под углом ϑ , причем

$$\cos \vartheta = \omega_{n0}/\omega. \quad (3.27)$$

Вариация параметров этих волн при сближении/удалении стенок относительно плоскости симметрии волно-

вода со скоростью $c\beta$ состоит в релятивистских изменениях частоты (из-за эффекта Доплера) и угла отражения при каждом акте отражения ($\beta > 0$ и $\beta < 0$ при сближении и удалении соответственно):

$$\omega' = \omega \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (3.28)$$

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \frac{1 + 2\beta / \cos \vartheta + \beta^2}{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что за цикл пробега парциальной волны от одной до другой стенки волноводный промежуток a получает приращение

$$\Delta a = -2a\beta \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{(1 + 3\beta) \cos \vartheta + \beta(3 + \beta^2)}, \quad (3.30)$$

а соответствующие приращения частоты и угла падения таковы:

$$\Delta \omega = \omega \beta \frac{\beta(1 + \cos^2 \vartheta) + 2 \cos \vartheta}{1 - \beta^2}, \quad (3.31)$$

$$\Delta(\cos \vartheta) = \frac{2\beta \sin^2 \vartheta}{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}. \quad (3.32)$$

Переход от конечных разностей к дифференциалам приводит к системе дифференциальных уравнений, управляющих изменением частоты и угла при изменении промежутка a :

$$\frac{d\omega}{da} = -\frac{\omega}{2a} \frac{\beta(1 + \cos^2 \vartheta) + 2 \cos \vartheta}{1 - \beta^2} \times \frac{3\beta + \cos \vartheta + \beta(\beta^2 + 3 \cos \vartheta)}{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\vartheta}{da} = \frac{\sin \vartheta}{a} \frac{3\beta + \cos \vartheta + \beta(\beta^2 + 3 \cos \vartheta)}{(1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2)}. \quad (3.34)$$

Интегрирование этой системы по многим актам отражения при $\beta \ll 1$ дает следующие соотношения для текущих значений частоты и угла отражения:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} = \omega_0 \frac{a_0 \cos \vartheta_0}{a \cos \vartheta}, \quad (3.35)$$

$$\tan \vartheta = \frac{a}{a_0} \tan \vartheta_0, \quad (3.36)$$

где нулевыми индексами обозначены стартовые значения.

Следует подчеркнуть, что частота и угол при изменении промежутка a не остаются неизменными даже при $\beta \rightarrow 0$. При медленном движении с $\beta \ll 1$ условие (3.27) сохраняет силу, что свидетельствует о неизменности структуры поля наблюдаемой моды – частота излучения и угол падения непрерывно подстраиваются под стационарную интерференционную картину моды. И наоборот, при не малых β интерференционная структура разрушается, что сопровождается рассеянием фотонов из одной моды в другую.

Исключение из системы (3.35), (3.36) угла отражения ϑ возвращает к инварианту (3.19), полученному ранее для общего случая.

Для рассматриваемого примера планарного волновода можно непосредственно вычислить работу, совершаемую против силы светового давления поля моды

$$F_\omega = \frac{W}{a} \cos^2 \vartheta, \quad (3.37)$$

где W – энергия поля моды, а работа, совершаемая при изменении промежутка на Δa , есть

$$\Delta W = -\frac{W \cos^2 \vartheta}{a} \Delta a. \quad (3.38)$$

Переход от конечных разностей к дифференциалам с учетом инварианта (3.19) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dW}{da} = -\frac{W/a}{1 + (a/a_0)^2 [(\omega_0/\omega_{n00})^2 - 1]}, \quad (3.39)$$

интеграл которого, как и следовало ожидать, совпадает с (3.24); здесь ω_{n00} – начальное значение критической частоты (3.26) при $a = a_0$.

В итоге простой пример планарного волновода проясняет как механизм работы внешней силы против силы светового давления поля моды в процессе построения волновода из неограниченного свободного пространства, так и общие выводы п.3.3.

Краткое замечание о моде TM_{00} планарного волновода с нулевой критической частотой ω_{00} при любом значении промежутка a . Поляризация этой волны такова, что электрический вектор всегда перпендикулярен стенкам и, следовательно, световое давление отсутствует, что и приводит в полном соответствии со всем вышесказанным как к нулевой работе внешней силы, так и к нулевой критической частоте.

3.5. Трансформация энергии при вариации поперечных размеров обобщенно-цилиндрического волновода произвольного сечения

Наглядный результат, полученный в п.3.4 для простого планарного волновода, может быть распространен (хотя и менее наглядно) на общий случай цилиндрического волновода произвольного сечения [35], для которого безразмерная скалярная функция $\psi(q_1, q_2)$, являющаяся решением уравнения типа (3.11), (3.12)

$$\nabla_q^2 \psi + (\omega_{nm}/c)^2 \psi = 0, \quad (3.40)$$

определяет зависимость полей моды от поперечных ортогональных координат q_1 и q_2 . Здесь

$$\nabla_q^2 \equiv \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right] \quad (3.41)$$

– оператор Лапласа по поперечным координатам, и коэффициенты Ляме h_1 и h_2 подчинены условиям

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2) = 0. \quad (3.42)$$

Компоненты полей таковы: для ТМ-поляризации

$$E_z = E_0 \psi \exp(i\Phi), \quad (3.43)$$

$$\mathbf{E}_q = E_0 \frac{c^2 k}{\omega_{nm}^2} (\nabla_q \psi) \exp(i\Phi), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{H}_q = E_0 \varepsilon_0 \frac{c^2 \omega}{\omega_{nm}^2} [(\nabla_q \psi) \mathbf{z}_0] \exp(i\Phi), \quad (3.45)$$

$$H_z = 0; \quad (3.46)$$

для ТЕ-поляризации

$$H_z = E_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \psi \exp(i\Phi), \quad (3.47)$$

$$\mathbf{H}_q = E_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{c^2 k}{\omega_{nm}^2} (\nabla_q \psi) \exp(i\Phi), \quad (3.48)$$

$$\mathbf{E}_q = E_0 \frac{c\omega}{\omega_{nm}^2} [(\nabla_q \psi) \mathbf{z}_0] \exp(i\Phi), \quad (3.49)$$

$$E_z = 0, \quad (3.50)$$

где \mathbf{E}_q и \mathbf{H}_q – векторные компоненты электрического и магнитного полей в плоскости поперечного сечения; ∇_q – оператор по поперечным координатам; градиент $(\nabla_q \psi)$ образует векторное произведение с ортом \mathbf{z}_0 . Металлические граничные условия на контуре, ограничивающем поперечное сечение волновода S , имеют вид

$$\psi|_L = 0, \quad (\nabla_q \psi)|_L \perp \mathbf{L} \quad (\text{для ТМ-поляризации}), \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_L = 0, \quad (\nabla_q \psi)|_L \parallel \mathbf{L} \quad (\text{для ТЕ-поляризации}), \quad (3.52)$$

где \mathbf{n} – нормаль к контуру L ; \mathbf{L} – его направляющая.

Средняя по времени сила светового давления на стенку волновода единичной длины, вычисленная через компоненту тензора натяжений, взятую с обратным знаком, равна интегралу по контуру L :

$$f_{\text{TM}} = E_0^2 \frac{c^2 \varepsilon_0}{4\omega_{nm}^2} \int_L (\nabla_q \psi)^2 dl, \quad (3.53)$$

$$f_{\text{TE}} = E_0^2 \frac{c^2 \varepsilon_0}{4\omega_{nm}^2} \int_L [(\omega_{nm} \psi / c)^2 - (\nabla_q \psi)^2] dl. \quad (3.54)$$

Отсюда полная сила светового давления на стенки волновода произвольной длины пропорциональна полной энергии поля W :

$$F_\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega} \right)^2 W \frac{L}{S}. \quad (3.55)$$

Здесь учтено, что энергия поля на единице длины волновода выражается через интеграл по сечению S :

$$W^* = E_0^2 \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_{nm}} \right)^2 \int_S \psi^2 ds. \quad (3.56)$$

Элементарная работа, производимая посредством перемещения контура L против силы светового давления F_ω при изменении площади сечения S волновода, есть

$$dW = -F_\omega dn, \quad (3.57)$$

где dn – дифференциал перемещения по нормали к контуру L .

Если при изменении сечения сохраняется подобие фигуры контура L , то остается неизменной и безразмерная функция $\psi(q_1, q_2)$, а произведение

$$\omega_{nm}^2 S = (\omega_{nm}^2)_0 S_0 = \text{const}, \quad (3.58)$$

где нулевыми индексами обозначены начальные значения. Отсюда с учетом $dS = Ldn$ следует

$$d\omega_{nm}^2 = -\omega_{nm}^2 \frac{dS}{S}. \quad (3.59)$$

Таким образом (3.59) с учетом инварианта (3.19) приводит к уравнению аккумуляции полной энергии моды в ходе изменения контура сечения волновода

$$\frac{dW}{d\omega_{nm}^2} = \frac{W/2}{\omega_{nm}^2 - (\omega_{nm}^2)_0 + \omega_0^2}, \quad (3.60)$$

интеграл которого совпадает с ранее полученным соотношением Мэнли–Роу (3.24) со всеми вытекающими отсюда выводами пп.3.3 и 3.4.

3.6. Итоговые замечания

Итак, наблюдаемая масса покоя M_{nm} (3.17) фотона в волноводе есть эквивалент энергии кванта критической частоты ω_{nm} , численно равной работе, совершаемой внешней силой при образовании волновода против силы светового давления поля моды в процессе его «сгребания» из бесконечного пространства в ограниченный объем волновода. Таким образом, величина M_{nm} (3.17) имеет отнюдь не формальный, а физически содержательный смысл.

4. Наблюдаемая масса покоя фотона в сопутствующей ему системе координат

Свойства, присущие наблюдаемой массе фотона, можно обнаружить в чисто кинематическом эксперименте, если следить за бегущей волной волноводной моды из сопутствующей инерциальной системы координат, перемещающейся вдоль оси z волновода со скоростью $c\beta = v_{\text{gr}}$ [36]. (Последнее не запрещено законами специальной теории относительности (СТО), поскольку $v_{\text{gr}} < c$ (3.5).) Результатом такого релятивистского преобразования является, очевидно, остановка волны и возможность непосредственного наблюдения остановленного света.

4.1. Релятивистская кинематика поля волноводной моды

Что происходит при таком преобразовании координат с частотой и постоянной распространения волны вдоль волновода, исходно заданными в лабораторной системе отсчета?

Стандартный релятивистский вывод формулы эффекта Доплера основан на постулате инвариантности фазы волны $\Phi = \omega t - kz$ в различных инерциальных системах координат. Подставляя в выражение для фазы Φ значения t и z ,

$$t = \frac{t' + \beta z'/c}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad z = \frac{z' + \beta ct'}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (4.1)$$

выраженные через лоренц-преобразованные штрихованные координаты движущейся системы, нетрудно получить выражение для фазы в штрихованной системе

$$\Phi = \omega \frac{1 - c\beta k/\omega}{(1 - \beta^2)^{1/2}} t' - k \frac{1 - \beta\omega/ck}{(1 - \beta^2)^{1/2}} z'. \quad (4.2)$$

Здесь множители перед t' и z' – значения частоты ω' и постоянной распространения k' в движущейся системе, а вторые члены в числителях преобразуются с помощью дисперсионного соотношения (3.6), так что

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta[1 - (\omega_{nm}/\omega)^2]^{1/2}}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \omega \frac{1 - \beta(v_{gr}/c)}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (4.3)$$

$$k' = k \frac{1 - \beta/[1 - (\omega_{nm}/\omega)^2]^{1/2}}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = k \frac{1 - \beta(c/v_{gr})}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (4.4)$$

Выражение (4.3) есть формула эффекта Доплера в волноводе.

Из (4.3) и (4.4) следует, что если скорость перемещения штрихованной системы $c\beta$ совпадает с групповой скоростью волны v_{gr} в лабораторной системе отсчета, то

$$\omega' = \omega_{nm} = \omega(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (4.5)$$

$$k' = 0, \quad v'_{gr} = 0. \quad (4.6)$$

Последнее означает, что в штрихованной системе волна *останавливается* и транспортировка электромагнитной энергии прекращается, бегущая составляющая волны исчезает вовсе и сохраняется лишь поперечная стоячая составляющая с частотой $\omega' = \omega_{nm}$ (4.5), отвечающей поперечному же эффекту Доплера второго порядка. В этой *остановленной* световой волне аккумулирована *покоящаяся* электромагнитная энергия $N\hbar\omega_{nm}$, или, иными словами, содержатся N *остановленных* фотонов с энергией каждого, равной энергии кванта критической частоты волноводной моды. В соответствии с принципом эквивалентности эта энергия *покоящегося* фотона отвечает неподвижной массе (3.17), совпадающей с ненулевой наблюдаемой массой покоя фотона.

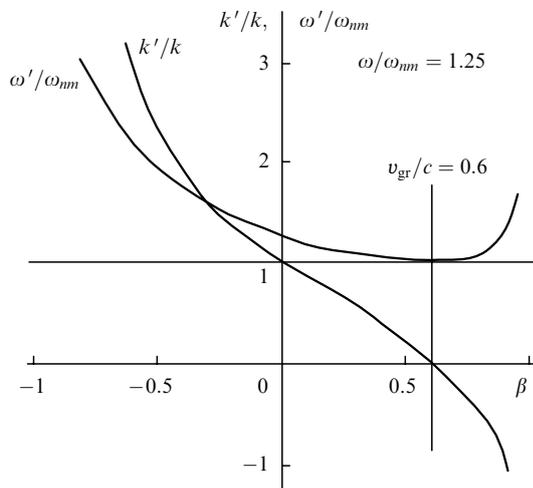


Рис.3.

При дальнейшем увеличении скорости перемещения штрихованной системы отсчета ($c\beta > v_{gr}$) происходит обращение направления распространения волны ($k' < 0$) и возрастание ее частоты ω' (рис.3).

4.2. Релятивистские преобразования векторов поля и вектора Пойнтинга

Обращение направления распространения и остановка волны подтверждаются также изменением знака и обращением в нуль вектора Пойнтинга в штрихованной системе координат.

Векторы поля трансформируются при переходе в движущуюся штрихованную систему координат, причем продольные компоненты векторов поля остаются неизменными ($e'_z = e_z$ и $h'_z = h_z$), а поперечные преобразуются по известным правилам:

$$e'_x = \frac{e_x - (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} \beta h_y}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (4.7)$$

$$e'_y = \frac{e_y + (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} \beta h_x}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (4.8)$$

$$h'_x = \frac{h_x + (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \beta e_y}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (4.9)$$

$$h'_y = \frac{h_y - (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \beta e_x}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (4.10)$$

Отсюда с учетом (3.7)–(3.10) и (3.14), (3.15) продольная составляющая вектора Пойнтинга для каждой из поляризаций есть

$$P'_{TM,TE} = P_{TM,TE} = \frac{(1 - \beta v_{gr}/c)(1 - c\beta/v_{gr})}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Таким образом, при равенстве между групповой скоростью волны в лабораторной системе и скоростью наблюдателя, перемещающегося вместе со штрихованной системой, продольный вектор Пойнтинга обращается в нуль, т.е. транспортировка электромагнитной энергии прекращается, а фотоны оказываются *покоящимися*. При дальнейшем увеличении скорости наблюдателя поток энергии, меняя знак, обращается вспять, что совпадает с отмеченным ранее изменением знака волнового вектора.

4.3. Итоговые замечания

В дополнение к сделанным выше выводам о массоподобном поведении фотонов реальных электромагнитных полей, обусловленном наличием в них фрагментов стоячих волн (остановленного света), следует заключение о том, что ненулевая наблюдаемая масса покоя фотона в волноводе обнаруживается при его чисто кинематической остановке в результате релятивистского преобразования координат. Не вызывает сомнения, что подобная релятивистская кинематическая остановка фотонов, приводящая к обнаружению их наблюдаемой массы покоя, может быть зафиксирована в любых полях вне материальной среды, поскольку, как было отмечено выше, в них $v_{gr} < c$ (например, в поле волны, отраженной от плоского зеркала (п. 2.7), при движении наблюдателя вдоль поверхности последнего со скоростью (2.30)).

5. Динамические эксперименты над фотонами конечной наблюдаемой массы покоя

Характерные свойства величины, определяемой как инертная и гравитационная масса покоя тела, обнаруживаются при воздействии на него тех или иных сил, вызывающих ускорение, т.е. в мысленном динамическом эксперименте над фотонами, принадлежащими модам базовой волноводной модели [28].

5.1. Продольное ускорение фотона в волноводе

Из дисперсионного соотношения (3.6) и формулы для групповой скорости (3.5) следуют выражения для энергии фотона в волноводе,

$$\hbar\omega = \frac{M_{nm}c^2}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}}, \quad (5.1)$$

и для произведения постоянной распространения и постоянной Планка, имеющего смысл импульса фотона,

$$\hbar k = \frac{M_{nm}v_{gr}}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}}. \quad (5.2)$$

Оба эти выражения очевидным образом совпадают с соответствующими релятивистскими формулами для энергии и импульса массивной частицы.

Единственной силой, способной вызвать ускорение фотона вдоль волновода, может служить, по-видимому, лишь сила тяжести, что будет рассмотрено ниже. Здесь достаточно в выражении для производной $\hbar k$ (5.2) по времени [37]

$$\frac{d}{dt}(\hbar k) = \frac{M_{nm}}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{3/2}} \frac{dv_{gr}}{dt} \quad (5.3)$$

отыскать коэффициент при величине продольного ускорения dv_{gr}/dt . Этот коэффициент

$$M_{\rightarrow} = \frac{M_{nm}}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{3/2}} \quad (5.4)$$

имеет вид и значение так называемой продольной массы частицы.

5.2. Поперечное ускорение фотона в волноводе

Поперечное (нормальное к оси волновода) ускорение фотона A приобретет физический смысл только в том случае, если изучить перемещение поля и удерживающего его волновода, рассматриваемых как единое целое, под действием нормальной к оси силы F_{\uparrow} , которой противодействует разность сил светового давления ΔF поля моды с единственным фотоном на противоположные стенки волновода [37]. Тогда так называемую поперечную наблюдаемую массу фотона в волноводе (естественно, не принимая в расчет массу стенок) можно определить как

$$M_{\uparrow} = \frac{F_{\uparrow}}{A} = \frac{\Delta F}{A}. \quad (5.5)$$

При рассматриваемом поперечном перемещении волновода с переменной скоростью $V = At$ (ускорение A принято для упрощения постоянным) частота волны

изменяется по закону (3.19), в котором из-за релятивистского сокращения поперечного размера волновода текущее значение критической частоты ω_{nm} есть функция мгновенного значения скорости V . В простом случае планарного волновода с расстоянием a между стенками

$$\omega_{nm} = \frac{\omega_{nm0}}{[1 - (V/c)^2]^{1/2}}. \quad (5.6)$$

и частота изменяется (фактически в результате эффекта Доплера на движущихся стенках) как

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{\omega_{nm0}}{\omega_0} \right)^2 \frac{(V/c)^2}{1 - (V/c)^2} \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

(нулевыми индексами обозначены начальные значения).

В момент $t > 0$, когда скорость $V = At$, фотон, падающий на стенку под углом ϑ , передает ей при отражении импульс

$$p' = \frac{2\hbar\omega \cos \vartheta \pm V/c}{c \sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (5.8)$$

При следующем отражении от противоположной стенки, происходящем в момент $t + \Delta t$, когда скорость получает приращение $\Delta V = A\Delta t$, волноводу передается в обратном направлении импульс

$$p'' = \frac{2\hbar\omega}{c} \times \frac{\cos \vartheta \pm V/c \mp \Delta(V/c)[1 \pm 2(V/c) \cos \vartheta + (V/c)^2]}{1 - (V + \Delta V)^2/c^2}. \quad (5.9)$$

(Здесь частоты и углы даны в неподвижной системе координат, установленной при $t = 0$ и $V = 0$; верхние знаки относятся к первому отражению от стенки, перемещающейся навстречу фотону, нижние – к отражению от попутно движущейся стенки).

В результате двух последовательных отражений фотона волновод приобретает направленный навстречу вектору ускорения разностный импульс

$$\Delta p = \pm(p' - p'') = \frac{2\hbar\omega}{c} \times \frac{1 \mp (\cos \vartheta \pm V/c)\Delta(V/c)/[1 - (V/c)^2]}{1 - (V + \Delta V)^2/c^2} \times \frac{\Delta V}{c} \approx \frac{2\hbar\omega \Delta V}{c^2}, \quad (5.10)$$

где во втором приближенном равенстве для случая нерелятивистского перемещения волновода опущены квадратичные по V/c и $\Delta V/c$ члены, зависящие от последовательности актов отражения. Приращение скорости за время между двумя отражениями

$$\Delta V \approx \frac{aA}{c \cos \vartheta}, \quad (5.11)$$

а импульс, передаваемый волноводу за одно отражение, есть

$$\Delta p^* = \frac{\Delta p}{2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} \frac{aA}{\cos \vartheta}. \quad (5.12)$$

Если N – фотонное число заполнения волноводной моды, то

$$J = \frac{cN}{a} \cos \vartheta \quad (5.13)$$

– полный поток фотонов, падающих на стенки волновода, а

$$\Delta p^* J = \frac{\hbar \omega}{c^2} A \frac{N}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}} \quad (5.14)$$

– сила светового давления фотонов моды, которая уравновешивает внешнюю силу F_{\uparrow} из (5.5), приводящую волновод в ускоренное движение. Приравнение F_{\uparrow} силе (5.14) для волновода с единственным фотоном в моде ($N = 1$) дает выражение

$$M_{\uparrow} = \frac{M_{nm}}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}} \quad (5.15)$$

для так называемой поперечной наблюдаемой массы фотона в волноводе, совпадающее со стандартной формулой СТО.

5.3. Центростремительное ускорение фотона в криволинейном волноводе

Для наблюдения и измерения массы фотона можно последовать простому рецепту Фейнмана [38]: «Количественной мерой инертности является масса. Ее можно измерить так: просто привязать предмет на веревочку, крутить его с определенной скоростью и измерить ту силу, которая необходима, чтобы удержать его. Этим способом можно измерить массу любых предметов». Иными словами, следует отыскать силу реакции стенок волновода, изогнутого по дуге окружности, на распространяющуюся по нему волну заданной моды [39].

Для упрощения можно принять центральный угол дуги равным 2π , т. е. фактически рассматривать кольцевой резонатор прямоугольного сечения с размерами a и b , радиусами цилиндрических стенок R_2 и $R_1 = R_2 - a$ и с двумя образующими стоячую волну встречными бегущими волнами равных частот ω с компонентами полей [32] в цилиндрической системе координат (R, φ, x) .

Для ТМ-поляризации

$$E_R = -A_0 \frac{\tau}{\rho} D'_m(\rho R) \sin(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi)], \quad (5.16)$$

$$E_\varphi = A_0 \frac{m\tau}{\rho^2 R} D_m(\rho R) \sin(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi + \pi/2)], \quad (5.17)$$

$$E_x = A_0 D_m(\rho R) \cos(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi)], \quad (5.18)$$

$$H_x = 0, \quad (5.19)$$

где

$$D_m(\rho R) \equiv N_m(\rho R_2) J_m(\rho R) - J_m(\rho R_2) N_m(\rho R); \quad (5.20)$$

$\rho = \rho_{nm} = \alpha_{nm} R_1$ отыскивается из корней α_{nm} характеристического уравнения

$$D_m(\rho_{nm} R_1) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

Для ТЕ-поляризации

$$H_R = A_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\tau}{\rho} G'_m(\rho R) \cos(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi)], \quad (5.22)$$

$$H_\varphi = -A_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{m\tau}{\rho^2 R} \times G_m(\rho R) \cos(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi + \pi/2)], \quad (5.23)$$

$$H_x = A_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} G_m(\rho R) \sin(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi)], \quad (5.24)$$

$$E_R = -A_0 \frac{\omega m}{c \rho^2 R} G_m(\rho R) \sin(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi)], \quad (5.25)$$

$$E_\varphi = A_0 \frac{\omega}{c \rho} G'_m(\rho R) \sin(\tau x) \exp[i(\omega t \mp m\varphi + \pi/2)], \quad (5.26)$$

$$E_x = 0, \quad (5.27)$$

где

$$G_m(\rho R) \equiv N'_m(\rho R_1) J_m(\rho R) - J'_m(\rho R_1) N_m(\rho R); \quad (5.28)$$

$\rho = \rho_{nm} = \alpha_{nm} / R_1$ отыскивается из корней α_{nm} характеристического уравнения

$$G'_m(\rho_{nm} R_1) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (5.29)$$

J_m – функция Бесселя первого рода; N_m – функция Неймана порядка m (штрихи означают дифференцирование по аргументу); A_0 – амплитудный множитель.

Резонансные частоты волн обеих поляризаций определяются из выражения

$$\omega^2 = \omega_{nml}^2 = (c \rho_{nm})^2 + (c\tau)^2 = \omega_{n0l}^2 + c^2(\rho_{nm}^2 - \rho_{n0}^2), \quad (5.30)$$

где

$$\tau = \pi l / b; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Радиальная составляющая вектора светового давления на цилиндрическую границу с $R = \text{const}$ равна соответствующей компоненте T_{11} максвелловского тензора натяжений с обратным знаком:

$$Q_R = -T_{11} = -\frac{\varepsilon_0}{2} (E_R^2 - E_\varphi^2 - E_x^2) - \frac{\mu_0}{2} (H_R^2 - H_\varphi^2 - H_x^2). \quad (5.32)$$

Отсюда с учетом (5.16)–(5.19) и (5.22)–(5.27) следуют значения радиальной составляющей вектора светового давления для поляризаций

$$Q_R^{\text{TM}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} E_R^2 + \frac{\mu_0}{2} H_\varphi^2, \quad (5.33)$$

$$Q_R^{\text{TE}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} E_R^2 + \frac{\mu_0}{2} (H_\varphi^2 + H_x^2), \quad (5.34)$$

а также средняя по времени полная сила светового давления на всю цилиндрическую поверхность радиусом R_1 или R_2

$$F_R = \int_0^{2\pi/\omega} R\omega dt \int_0^b Q_R dx. \quad (5.35)$$

Таким образом, разность сил светового давления на противоположащие цилиндрические стенки для двух поляризаций есть

$$\Delta F_{TM} = \frac{B}{R_2} \left[1 - \frac{R_2 J_m^2(\rho R_2)}{R_1 J_m^2(\rho R_1)} \right], \quad (5.36)$$

$$\Delta F_{TE} = \frac{B}{R_2} \left[1 - \left(\frac{m}{\rho R_2} \right)^2 - \frac{R_2 J_m'^2(\rho R_2)}{R_1 J_m'^2(\rho R_1)} \times \left(1 - \frac{m^2}{(\rho R_1)^2} \right) \right], \quad (5.37)$$

где

$$B \equiv \frac{\varepsilon_0 b}{\pi \rho^2} A_0^2 \quad (5.38)$$

имеет размерность энергии и входит в качестве множителя в полную энергию полей мод

$$W_{TM} = B \left(\frac{\omega}{c\rho} \right)^2 \left[1 - \frac{J_m^2(\rho R_2)}{J_m^2(\rho R_1)} \right], \quad (5.39)$$

$$W_{TE} = B \left(\frac{\omega}{c\rho} \right)^2 \left\{ 1 - \left[\frac{m}{\rho R_2} \right]^2 - \frac{J_m'^2(\rho R_2)}{J_m'^2(\rho R_1)} \left[1 - \frac{m^2}{(\rho R_1)^2} \right] \right\}. \quad (5.40)$$

В связи с этим разность сил светового давления ΔE (5.36), (5.37) можно выразить через полную энергию поля моды W :

$$\Delta F = \frac{W}{R_2} \left(\frac{c\rho}{\omega} \right)^2 f, \quad (5.41)$$

где множитель f для двух поляризаций различен:

$$f_{TM} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 - \frac{1 - R_1/R_2}{1 - J_m^2(\rho R_2)/J_m^2(\rho R_1)} \right), \quad (5.42)$$

$$f_{TE} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 - \frac{1 - R_1/R_2}{1 - \frac{J_m'^2(\rho R_2)}{J_m'^2(\rho R_1)} \frac{1 - (m/\rho R_1)^2}{1 - (m/\rho R_2)^2}} \right). \quad (5.43)$$

Возвращаясь к рецепту Фейнмана, следует учесть, что в этом простом механическом аналоге вся масса сосредоточена на конце веревочки, в то время как в тороидальном резонаторе энергия поля распределена в кольце с радиальными координатами, различающимися на величину a , что как раз и учитывается множителем f в (5.41). Таким образом, прямое сопоставление с опытом Фейнмана правомочно лишь для такой моды, в которой поле

сосредоточено у цилиндрической поверхности большего радиуса R_2 , тесно прилегая к ней. Этому требованию удовлетворяют моды с многократной периодичностью поля по окружности и малым числом нулей по радиусу

$$m \gg 1 \quad \text{и} \quad n \sim 1, \quad (5.44)$$

когда для упрощения и без заметного влияния на результат можно принять $R_1 \ll R_2$. Тогда выражения (5.42) и (5.43) принимают приближенный вид и имеют практически совпадающие корни [40]:

для ТМ-поляризации

$$J_m(\rho_{1m} R_2) = 0, \quad \rho_{1m} \approx \frac{m}{R_2} (1 + 1.86m^{-2/3}) \approx \frac{m}{R_2}, \quad (5.45)$$

для ТЕ-поляризации

$$J_m'(\rho_{1m} R_2) = 0, \quad \rho_{1m} \approx \frac{m}{R_2} (1 + 0.81m^{-2/3}) \approx \frac{m}{R_2}. \quad (5.46)$$

Для обеих поляризаций разность сил светового давления

$$\Delta F \approx \frac{W}{R_2} \left(\frac{cm}{\omega R_2} \right)^2, \quad (5.47)$$

где частота, определенная по (5.30), с учетом сделанных приближений есть

$$\omega \approx \frac{\omega_{n0l}}{[1 - (c/\omega)^2 (\rho_{1m}^2 - \rho_{l0}^2)]^{1/2}} \approx \frac{\omega_{n0l}}{[1 - (cm/\omega R_2)^2]^{1/2}}. \quad (5.48)$$

Пусть далее в моде содержится единственный фотон, так что $W = \hbar\omega$. Тогда с учетом выражения для групповой скорости волны в тороидальном волноводе

$$v_{gr} = \frac{c^2 m}{\omega R} \quad (5.49)$$

формула для разности сил светового давления

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{\hbar\omega_{n0l}/c^2}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}} \frac{v_{gr}^2}{R_2} \\ &= \frac{M_{n0l}}{[1 - (v_{gr}/c)^2]^{1/2}} \frac{v_{gr}^2}{R_2} = \frac{M_{\uparrow} v_{gr}^2}{R_2} \end{aligned} \quad (5.50)$$

($M_{n0l} = \hbar\omega_{n0l}/c^2$ – наблюдаемая масса покоя фотона, M_{\uparrow} – поперечная масса фотона (5.15)) очевидным образом совпадает со стандартной формулой для центростремительного ускорения тела.

5.4. Гравитационное ускорение тяжелого фотона. Настольная «черная дыра»

Обнаружить черты гравитационной массы в величине M_{nm} (3.17) можно, наблюдая распространение волны по волноводу, который помещен вертикально в поле тяготения [4]. По определению (3.17) величина M_{nm} пропорциональна критической частоте

$$\omega_{nm} = \frac{c\alpha_{nm}}{a}, \quad (5.51)$$

где a – размер поперечного сечения волновода и α_{nm} – корень характеристического уравнения, т. е. математический инвариант, не зависящий от размеров. Если волно-

вод находится в гравитационном поле с потенциалом $\Psi < 0$, $|\Psi| \ll c^2$, то и скорость света

$$c \approx c_\infty(1 + 2\Psi/c^2), \quad (5.52)$$

и поперечный размер (как и любые линейные размеры тел)

$$a \approx a_\infty(1 + 2\Psi/c^2) \quad (5.53)$$

зависят от Ψ (здесь и далее индексами ∞ обозначены значения на бесконечности, где потенциал нормирован как $\Psi_\infty = 0$) [41]. Отсюда следует, что критическая частота, а следовательно, и наблюдаемая волноводная масса покоя фотона также зависят от гравитационного потенциала

$$\begin{aligned} M_{nm} &= \frac{\hbar\omega_{nm}}{c^2} \approx \frac{M_{nm\infty}}{(1 + \Psi/c^2)(1 + 2\Psi/c^2)} \\ &\approx M_{nm\infty}(1 - 3\Psi/c^2), \end{aligned} \quad (5.54)$$

где

$$M_{nm\infty} = \frac{\hbar\omega_{nm}}{c_\infty a_\infty}. \quad (5.55)$$

Стоит подчеркнуть, что зависимость (5.55), вытекающая из учета воздействия гравитационного поля на величины, входящие в определение наблюдаемой волноводной массы покоя M_{nm} (3.17), не отличается от стандартной зависимости массы обычного тяжелого тела от гравитационного потенциала [41], что очевидно и по соотношениям размерности.

Возвращаясь к процессу распространения волны в вертикальном волноводе, следует отметить, что постоянная распространения k также не остается неизменной в поле тяготения:

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{nm}}{c}\right)^2 \\ &\approx k_\infty^2 \left[1 - 2\frac{\Psi}{c^2} \left(1 + \frac{2}{1 - \omega_{nm\infty}^2/\omega_\infty^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Это связано с тем, что от потенциала зависит как критическая частота

$$\omega_{nm} \approx \omega_{nm\infty}(1 + \Psi/c^2), \quad (5.57)$$

так и частота волны

$$\omega = \omega_\infty(1 - \Psi/c^2). \quad (5.58)$$

Важно отметить, что хотя второй член в (5.56) может оказаться не малым даже при $|\Psi| \ll c^2$ вблизи критических условий, когда $\omega_\infty \rightarrow \omega_{nm\infty}$, тем не менее k не обращается в нуль, поскольку $\Psi < 0$, и в силу нормировки $k_\infty \neq 0$.

Наблюдение за убыванием постоянной k при распространении волны вверх по волноводу из точки с потенциалом Ψ , в которой $k = k^*$, в точку с большим потенциалом $\Psi + \Delta\Psi$ ($\Delta\Psi > 0$) приводит к обнаружению явления гравитационной остановки волны:

$$k^2 \approx (k^*)^2 \left[1 - 2\frac{\Delta\Psi}{c^2} \left(1 + \frac{2}{1 - \omega_{nm}^2/\omega^2}\right)\right] \quad (5.59)$$

(ω и ω_{nm} взяты в точке с потенциалом Ψ).

В самом деле, в случае близости к критическому режиму, когда $1 - (\omega_{nm}/\omega)^2 \ll 1$, и несмотря на то что $\Delta\Psi \ll c^2$, постоянная распространения обращается в нуль при

$$\Delta\Psi \approx \frac{c^2}{4} \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right] \quad (5.60)$$

и распространение волны вверх по волноводу прекращается. Затем вместе со знаком $\pm\sqrt{k^2}$ направление волны изменяется на обратное – вниз по волноводу.

На языке механической аналогии это означает, что брошенное вверх тело с кинетической энергией, малой по сравнению с энергией покоя (в силу малости k^* вблизи критического режима), т. е. в нерелятивистском случае, останавливается в верхней точке траектории, исчерпав начальный импульс, а затем падет обратно.

Прибегая к другой аналогии, можно сказать, что возникающая ситуация в известном смысле воспроизводит на лабораторном столе «черную дыру», удерживающую фотоны волноводной моды.

Из условия (5.60) можно получить вертикальное расстояние H до точки поворота волны вниз. Так, если

$$\Delta\Psi = gz \quad (5.61)$$

(g – ускорение силы тяжести, а z – вертикальная координата), то высота точки поворота волны

$$H \approx \frac{c^2}{4g} \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right] = \frac{v_{gr}^2}{4g}. \quad (5.62)$$

Нетрудно заметить, что H вдвое меньше высоты подъема тяжелого тела с начальной скоростью v_{gr} , вычисленной по законам ньютоновской механики. Причина этого расхождения та же, что и возникающая при сравнении оценок гравитационного отклонения луча света, сделанных по законам общей теории относительности и по теории тяготения Ньютона с учетом принципа эквивалентности (см., напр., [41]).

В самом деле, обращение вспять волны в вертикальном волноводе есть, в сущности, ничто иное, как одна из возможных реализаций процесса гравитационного отклонения луча света, разбитого на отдельные участки многократными последовательными отражениями от стенок волновода. Так, в планарном волноводе при $g = 0$ луч света описывает зигзагообразную ломаную прямую с постоянным шагом и с вершинами на стенках (рис.4). Посредством известного приема развертки луча, отражающегося от плоских зеркал (каковыми являются стенки планарного волновода), зигзаг может быть представлен наклонной прямой. Гравитационное поле с $g > 0$ искривляет этот исходно прямолинейный луч и придает ему вид дуги с максимумом, отвечающим гравитационной высоте H (5.62). Эта дуга в сущности является разверткой луча внутри волновода, показанной ломаной линией с убывающим при росте высоты шагом. Аналогичная дуга с вдвое более медленным изменением угла, рассчитанным по законам ньютоновской механики с учетом принципа эквивалентности, показана штриховой линией с максимумом высотой $2H$.

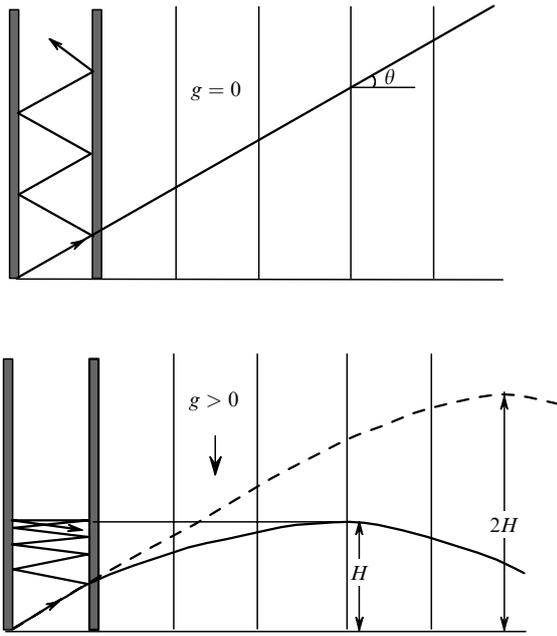


Рис.4.

5.5. Оптический резонатор с гравитационным зеркалом

Обращение направления распространения волны в вертикальном волноводе можно интерпретировать как рефракционное отражение от гравитационного зеркала, находящегося на высоте $z = H$. Если снабдить вертикальный волновод обычным отражающим зеркалом у основания при $z = 0$, то такой открытый сверху волновод с высотой, превышающей H , образует оптический резонатор [42] с условием резонанса

$$\int_0^H k(z)dz = \pi q \quad (q = 1, 2, \dots). \quad (5.63)$$

В частном случае (5.61), когда

$$k(z) = k^*(1 - zH)^{1/2}, \quad (5.64)$$

измеренная при $z = 0$ резонансная частота

$$\omega_q = \left[\omega_{nm}^2 + \left(\frac{3\pi c q}{2H} \right)^2 \right]^{1/2} = \omega_{nm} \left[1 + \left(\frac{6\pi g q}{c \omega_{nm}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.65)$$

5.6. Взвешивание фотона

Для прямой операции взвешивания фотона достаточно поместить рассмотренный в п.5.5 гравитационный резонатор с единственным фотоном в моде на платформу весов и найти силу светового давления вниз, на нижнее зеркало, которая передается весам. Существенно, что силу, направленную вверх при отражении от верхнего гравитационного зеркала, можно не принимать в расчет, т.к. она, минуя весы, передается непосредственно источнику тяготения, например Земле. В результате сила светового давления единственного фотона на дно гравитационного резонатора и есть вес фотона.

Полный цикл обращения фотона по гравитационному резонатору (вверх-вниз) равен удвоенному времени транспортировки энергии на высоту H со скоростью v_{gr}

$$t_H = 2 \int_0^H \frac{\omega}{c^2 k} dz, \quad (5.66)$$

где подынтегральная функция определяется с учетом (5.59). В частности, если потенциал задан как (5.61), то

$$t_H = \frac{2}{v_{gr}} \int_0^H \frac{dz}{(1 - z/H)^{1/2}} = \frac{4H}{v_{gr}} = \frac{v_{gr}}{g}. \quad (5.67)$$

В каждом цикле отражения фотон передает платформе весов импульс

$$p_q = 2 \frac{\hbar \omega_q}{c} \left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega_q} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.68)$$

а вес фотона, как отношение p_q к t_H , есть

$$f_g = \frac{p_q}{t_H} = 2 \frac{\hbar \omega_q}{c^2} g = 2M_{nm}g. \quad (5.69)$$

Обращает на себя внимание двукратное превышение веса фотона f_g над стандартным ньютоновским значением. Причина состоит в релятивистской скорости движения фотона между стенками волновода в противоположном направлении нерелятивистской скорости тяжелого шарика.

Здесь необходимо сделать отступление [42], чтобы рассмотреть задачу о взвешивании обычной тяжелой частицы (шарика), которая, однако, не покоится на платформе весов, а периодически отскакивает от нее, перемещаясь над ней с релятивистской скоростью. В общем случае абсолютно упругого «отражения» шарика при каждом падении на платформу траектория его движения представляет собой циклическую последовательность дугообразных отрезков, опирающихся на горизонтальную плоскость, а вес шарика может быть определен как

$$f_g = \frac{2p_z(z=0)}{\Delta t}, \quad (5.70)$$

где $p_z(z=0)$ – вертикальная компонента импульса в точке отражения $z = 0$; Δt – временной интервал между двумя последовательными «отражениями» (отскоками).

Релятивистское уравнение, задающее один цикл траектории шарика с массой M^* , скоростью \mathbf{v} и импульсом \mathbf{p} в гравитационном поле с потенциалом Ψ , имеет вид [41]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = M^* \left[- \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \text{grad} \Psi + \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \text{grad} \Psi \right) \right]. \quad (5.71)$$

В частности, если $\text{grad} \Psi = g$, векторное уравнение (5.71) распадается на вертикальную и горизонтальную проекции

$$\frac{dp_z}{dz} = -M^* g \left[1 + \left(\frac{v_x}{c} \right)^2 \right], \quad (5.72)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = M^* g \frac{v_x v_z}{c^2}, \quad (5.73)$$

где индексами z и x обозначены соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты векторов. Решение для двух предельных случаев существенно различны.

При строго вертикальном движении $v_x = 0$, и дугообразная траектория вырождается в отрезок вертикальной прямой, характеризуемый значениями

$$p_z = -M^*gt + p_z(z=0), \quad p_x = 0, \quad \Delta t = 2 \frac{p_z(z=0)}{M^*g}, \quad (5.74)$$

а вес шарика (5.70)

$$f_g = M^*g \quad (5.75)$$

совпадает с ньютоновской величиной.

В противоположном случае очень пологой, почти горизонтальной, траектории, когда можно допустить, что $v_z \ll c$ и $v_x \approx v$,

$$p_z = -M^*g \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] t + p_z(z=0),$$

$$p_x = \text{const}, \quad \Delta t = 2 \frac{p_z(z=0)}{M^*g[1 + (v/c)^2]} \quad (5.76)$$

и, следовательно, вес шарика (5.70)

$$f_g = M^*g[1 + (v/c)^2], \quad (5.77)$$

что для релятивистской скорости $v \rightarrow c$ дает удвоенную против ньютоновского значения величину

$$f_g \rightarrow 2M^*g. \quad (5.78)$$

Для умеренно наклонной траектории существуют промежуточные значения веса релятивистского шарика, так что, вообще говоря,

$$M^*g \leq f_g \leq 2M^*g. \quad (5.79)$$

Все это справедливо как для релятивистски движущейся обычной массивной частицы, так и для рассмотренного выше вертикального движения фотона в волноводе, где в исследованном случае, близком к критическим условиям, траектория фотона приближается к горизонтальной, что и объясняет результат (5.69).

5.7. Волновое уравнение versus уравнение Шредингера

Характерной чертой вышеприведенного рассмотрения является, в частности, раскрытие процесса порождения типичным безмассовым волновым полем поля массивных частиц. Любопытно, что точно так же удается наблюдать и генетическую связь волнового уравнения с уравнением Шредингера (разумеется, без претензий на вывод последнего), а также трансформацию безмассового волнового уравнения (1.9) или (1.10) в уравнение шредингеровского типа, содержащего массу в явном виде, но без ее введения как априорного понятия.

Нерелятивистский характер уравнения Шредингера требует записать фундаментальное дисперсионное уравнение волны в волноводе (3.6) также в нерелятивистском приближении близости к критическим условиям:

$$\omega \approx \omega_{nm} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ck}{\omega_{nm}} \right)^2 \right], \quad (5.80)$$

что на языке механической аналогии соответствует малости кинетической энергии по сравнению с энергией покоя.

Далее нетрудно заметить, что дифференцирование фазы Φ бегущей волны свидетельствует о возможности следующего замещения дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow -k^2. \quad (5.81)$$

Тогда приближенное дисперсионное уравнение волны (5.80) можно переписать в виде двух операторных уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -2 \frac{\omega_{nm}}{c^2} (\omega - \omega_{nm}), \quad (5.82)$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} = \omega_{nm} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega_{nm}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (5.83)$$

Эти операторные уравнения могут относиться к любой из шести компонент векторов поля, например к H_x :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + 2 \frac{M_{nm}}{\hbar^2} (E - \hbar\omega_{nm}) H_x = 0, \quad (5.84)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2M_{nm}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \hbar\omega_{nm} H_x. \quad (5.85)$$

Здесь $E = \hbar\omega$ – полная энергия; $M_{nm} = \hbar\omega_{nm}/c^2$ – наблюдаемая масса покоя.

Характер предыдущего рассмотрения позволяет принять, что энергия кванта с критической частотой $\hbar\omega_{nm}$ есть в сущности потенциальная энергия U , аккумулированная в волноводе при компрессии поля моды из неограниченного свободного пространства. Тогда замена $\hbar\omega_{nm} = U$ преобразует (5.84) и (5.85) к знакомому виду:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + 2 \frac{M_{nm}}{\hbar^2} (E - U) H_x = 0, \quad (5.86)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2M_{nm}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + U H_x. \quad (5.87)$$

Разумеется, в этих одномерных уравнениях шредингеровского типа отсутствует лапласиан по поперечным координатам, поскольку интегрирование по ним уже состоялось ранее, чему и обязана своим априорным возникновением в (5.85) и (5.87) наблюдаемая масса покоя M_{nm} .

5.8. Итоговые замечания

Цикл мысленных динамических экспериментов над базисной моделью фотона в волноводной моде продемонстрировал, что ни в одном из них не удастся обнаружить какие-либо черты, отличающие массоподобную величину M_{nm} (3.17), эквивалентную энергии кванта с критической частотой, от инертной и гравитационной массы покоя тела в стандартном понимании.

Интересно сопоставить возможные значения наблюдаемой массы покоя фотона в некоторых конкретных ситуациях с данными табл.1 (п.1.3). Так, для микроволнового фотона в стандартном волноводе $M_{nm}c^2 \sim 10^{-5}$ эВ, для оптического фотона в стекловолокне $M_{nm}c^2 \sim 0.1$ эВ и в основной моде пучка лазера диаметром около 1 см $M_{nm}c^2 \sim 10^{-5}$ эВ. Эти значения на много порядков пре-

вышают величины из табл.1, что объясняется принятым предельно жестким пространственным ограничением полей по сравнению с условиями оценок п.1.3.

6. Заключение

Основное содержание настоящего анализа сводится к цепочке взаимосвязанных и вытекающих друг из друга утверждений:

– Плоские электромагнитные волны в природе не существуют; все физически реализуемые поля являются неплоскими и пространственно ограниченными.

– Не существует физически реализуемых строго поперечных волновых полей; любому физически реализуемому неплоскому волновому полю присущи три поляризационных состояния.

– Физически реализуемые неплоские волны обладают вне материальной среды частотной дисперсией, сверхсветовой фазовой и субсветовой групповой скоростями.

– Фотонам, представляемым физически реализуемыми неплоскими полями, может быть приписана конечная наблюдаемая инертная и гравитационная масса покоя, которая, однако, не служит их имманентной характеристикой, но, не являясь константой, варьируется в зависимости от структуры поля; не удается предложить эксперимент, позволяющий обнаружить отличия в поведении фотона, обладающего конечной наблюдаемой массой покоя и принадлежащего неплоскому волновому полю, от поведения обычных массивных тел, поставленных в аналогичные условия.

– Наблюдаемая масса покоя фотона обусловлена присутствием в любом физически реализуемом неплоском волновом поле неподвижной составляющей в виде фрагментов стоячей волны (остановленного света), создающих в функции Гамильтона дефект импульса.

– Перечисленные утверждения являются, в сущности, прямыми следствиями «классического соотношения неопределенности», т. е. результатом применения теоремы Фурье к пространственно ограниченному неплоскому волновым полям. (Уместно отметить, что стандартное выражение для функции плотности радиационных мод свободного пространства (радиационных осцилляторов поля) является также прямым следствием «классического соотношения неопределенности», примененного к единственно физически реализуемому неплоским волновым полям [43].)

– Эвристически любопытна обнаруженная способность типичного безмассового фотонного поля порождать в определенных условиях поле квантов, обладающих конечной наблюдаемой массой покоя, неотличимой от массы покоя в стандартном понимании.

Разумеется, все изложенное не исчерпывает проблемы неплоских электромагнитных волн и конечной наблюдаемой массы покоя фотона. Вспомним, однако,

слова, сказанные некогда Эйнштейном: «Все эти пятьдесят лет упорных размышлений не приблизили меня к ответу, что такое световые кванты. Конечно, сегодня всякий думает, что он знает ответ, но он обманывает сам себя».

Работа выполнена при частичной поддержке US. CRDF – RF Ministry of Education Award VZ-010-0.

1. Гайтлер В. *Квантовая теория излучения* (М.: ИЛ, 1956).
2. Мандельштам Л.И. *Лекции по колебаниям* (М.: изд-во АН СССР, 1955, т.4, с.350).
3. Schroedinger E. *Proc. R. Irish. Acad. A*, **49**, 135 (1943).
4. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **19**, 830 (1992).
5. Терлецкий Я.П. *Парадоксы теории относительности* (М.: Наука, 1966).
6. Окунь Л.Б. *УФН*, **158**, 511 (1989).
7. Клышко Д.Н. *УФН*, **164**, 1187 (1994).
8. Okun L.B. *Phys. Today*, **42**, 31 (1989).
9. Окунь Л.Б. *УФН*, **170**, 1366 (2000).
10. См. в Adler C. *Am. J. Phys.*, **55**, 739 (1987).
11. Proca A. *J. Phys. (Paris)*, **8**, 23 (1937).
12. Bass L., Schroedinger E. *Proc. Roy. Soc. A*, **232**, 1 (1955).
13. De Broglie L., Vigier J.P. *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1001 (1972).
14. См. в Goldhaber A.S., Nieto M.M. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 277 (1971).
15. De Broglie L. *Le Mecanique Ondulatoire du Photon* (Paris: Hermann et Cie, 1940).
16. Schroedinger E. *Proc. R. Irish. Acad. A*, **49**, 135 (1943).
17. Williams E.R., Faller J.E., Hill H. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 721 (1971).
18. Davies L, Goldhaber A.S., Nieto M.M. *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1402 (1975).
19. *Rev. Mod. Phys.*, **52** (2) (1980).
20. Barrow J.D., Burman R.R. *Nature*, **307**, 14 (1984).
21. Chernikov M.A., Gerber C.J., Ott H.R., Gerber H.J. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3383 (1992).
22. Fischbach E., Kloor H., Langel R.A..., Lui A.T.Y., Peredo M. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 514 (1994).
23. Lakes R. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1826 (1998).
24. Schaefer B.E. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4964 (1999).
25. Jun Luo, et al. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, Febr. 28 (2003).
26. Стрэттон Дж. А. *Теория электромагнетизма* (М.: ГИТТЛ, 1948).
27. Rivlin L.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2799**, 182 (1995).
28. Ривлин Л.А. *УФН*, **167**, 309 (1997).
29. Heaviside O. *Electromagnetic Theory* (New York – London, 1893).
30. Rayleigh J.W. *Philos. Mag.*, **43**, 125 (1897).
31. Бриллюэн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах* (М.: ИИЛ, 1959).
32. Де Бройль Л. *Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах* (М.: ГИТТЛ, 1948).
33. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике* (М.: Мир, 1966, т.6, с.230).
34. Ривлин Л.А. *УФН*, **161**, 143 (1991).
35. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **22**, 292 (1995).
36. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **30**, 185 (2000).
37. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **20**, 919 (1993).
38. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике* (М.: Мир, 1967, т.1, с.156).
39. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **22**, 289 (1995).
40. Янке У., Эмде Ф, Леш Ф. *Специальные функции* (М.: Наука, 1964).
41. Боулер М. *Гравитация и относительность* (М.: Мир, 1979).
42. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **22**, 625 (1995).
43. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **16**, 2159 (1989).