

О влиянии дифракции на нелинейное распространение оптических импульсов длительностью в несколько периодов колебаний

С.В.Сазонов, В.А.Халяпин

Исследовано влияние эффектов дифракции на распространение импульсов длительностью в несколько периодов оптических колебаний в изотропном нелинейном диэлектрике. Выявлены значительные отличия нелинейного режима дифракции таких сигналов от нелинейного режима квазимонохроматических импульсов с ярко выраженной несущей частотой. Показано, что при числе импульсных осцилляций, меньшем определённого критического значения, дифракция не может препятствовать самофокусировке импульса при любой его мощности.

Ключевые слова: дифракция, самофокусировка, предельно короткий импульс.

1. Введение

В последнее десятилетие интенсивно развивается нелинейная оптика лазерных импульсов длительностью всего в несколько (вплоть до одного) периодов колебаний [1–6]. Такие импульсы принято называть предельно короткими импульсами (ПКИ). В англоязычной литературе для них часто используется термин «few-cycle pulses». Длительность ПКИ достигает единиц фемтосекунд [7]. При теоретических исследованиях взаимодействия ПКИ с веществом в материальных и волновых уравнениях приходится отказываться от приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ) и исследовать уравнения движения непосредственно для электрического поля импульса, а не для его огибающей. На этом пути удалось значительно продвинуться при описании одномерного распространения ПКИ [1, 4, 5, 8]. Влияние поперечных возмущений, включая дифракцию, исследовано значительно меньше, несмотря на то что в этом имеется настоятельная необходимость в связи с возможными применениями ПКИ в системах оптической связи. В работах [6, 9–14] установлены качественные критерии устойчивости ПКИ по отношению к самофокусировке в эйкональном приближении (приближении геометрической оптики). Следует заметить, что эти критерии находятся в чётком соответствии с солитонным вариантом принципа Ферма. При выработке данных критериев применялся развитый в [15, 16] метод усреднённого лагранжиана.

В [17–19] для описания поперечных возмущений эйкональное приближение не используется, а пространственно-временной подход заменён на спектральный. Применение совокупности аналитических и численных методов позволило авторам работ [17–19] выявить особен-

ности самофокусировки ПКИ. В частности показано, что самофокусировка сопровождается самоделением импульсов и генерацией спектрального суперконтинуума, если спектр импульсов принадлежит области нормальной групповой дисперсии. Сугубо аналитический подход к учёту влияния дифракции на однополярные (полуволновые) ПКИ, базирующийся на методе усреднённого лагранжиана, предложен в [20]. Как показано в этой работе, в случае ПКИ дифракция способствует самофокусировке, т.е. играет деструктивную роль, что находит своё ясное физическое толкование. В этой связи следует отметить, что в случае квазимонохроматических импульсов с ярко выраженной несущей частотой роль дифракции конструктивна: при импульсной мощности ниже пороговой дифракционные эффекты могут препятствовать самофокусировке [21–23].

На заключительной стадии самофокусировки, когда поперечный размер импульса становится сравнимым с длиной световой волны, роль дифракции наиболее существенна. Обычно принято считать, что импульс (или пучок света) не может сжаться до размеров, меньших длины волны. В этой связи отметим работу [24], где показано, что баланс нелинейности и дифракции в средах с большой интенсивностью насыщения нелинейности может наступить при поперечных размерах пучка, составляющих десятые доли длины волны. Авторы работы [24] назвали такие образования «оптическими иглами».

Возникает резонный вопрос: при каком числе колебаний, содержащихся в импульсе, конструктивная роль дифракции сменяется деструктивной? Ответ на него важен как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

Исследованию влияния дифракции на нелинейное распространение ПКИ и посвящена настоящая работа.

2. Учёт поперечной динамики импульсов, содержащих произвольное число колебаний

В работе [5] на основе полуфеноменологической модели материального отклика было получено уравнение, описывающее распространение ПКИ вдоль произвольной оси в изотропном широкозонном диэлектрике:

С.В.Сазонов, В.А.Халяпин. Калининградский государственный университет, Россия, 236041 Калининград, ул. Невского, 14; e-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

Поступила в редакцию 10 марта 2004 г., после доработки – 9 июля 2004 г.

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + b \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' + g E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{c}{2n} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau', \quad (1)$$

где E – напряжённость электрического поля ПКИ; $\tau = t - nz/c$ – локальное время в сопутствующей системе координат; c – скорость света в вакууме; n – линейный низкочастотный показатель преломления среды; $g = 3n_2 \times c^{-1}$ [5]; n_2 – нелинейный показатель преломления, который в области прозрачности твёрдотельных диэлектриков является положительным [25]; коэффициенты a и b определяют соответственно электронную и ионную дисперсии среды. Последнее слагаемое в левой части уравнения (1) обусловлено электронной кубической нелинейностью, правая часть описывает влияние поперечных возмущений, включая дифракцию, в параксиальном приближении.

Подчеркнём, что уравнение (1) записано не для огибающей импульса, а непосредственно для его электрического поля E . Поэтому область использования уравнения (1) достаточно широка: от ПКИ до квазимонохроматических импульсов, содержащих большое число оптических колебаний. Следует отметить, что в (1) не учитывается влияние ВКР. Как показывают оценки [5], процессами ВКР можно пренебречь, если характерный временной масштаб τ_{ch} ПКИ удовлетворяет условию $\tau_{ch} < \tau_m$, где τ_m – параметр с размерностью времени, зависящий от характеристик среды. Для кварцевого стекла $\tau_m \approx 10$ фс [5]. Ниже будем считать данное условие выполненным.

Отметим также, что при получении (1) использовалось приближение квазиоднонаправленного распространения импульса вдоль оси z [5]. Роль отражённой волны оказывается существенной главным образом на входе импульса в рассматриваемую среду. Нелинейность и дисперсия считались слабыми, что также вполне оправданно в спектральной области прозрачности диэлектрика.

В пределе импульсов длительностью вплоть до фемтосекунд из (1) можно получить нелинейное модифицированное уравнение Шрёдингера для медленно меняющейся огибающей ε , определяемой из равенства

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon(t, r) \exp[i(\omega\tau - qz)] + \text{компл. сопр.}, \quad (2)$$

где ω – несущая частота; q – волновое число импульса в сопутствующей системе координат. Данное уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2} - i\alpha_1 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial T^3} + \alpha_2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial T^4} - \beta |\varepsilon|^2 \varepsilon + i\beta_1 \frac{\partial}{\partial T} (|\varepsilon|^2 \varepsilon) = \frac{c}{2n\omega} \Delta_{\perp} \varepsilon, \quad (3)$$

где $T = \tau - 3a\omega^2[1 + (\omega_c/\omega)^4]z = t - z/v_g$; $\omega_c^4 = b/(3a)$; v_g – линейная групповая скорость, определяемая выражением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + 3a\omega^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^4 \right].$$

Соотношения между коэффициентами уравнений (1) и (3) имеют вид

$$\alpha = \frac{3a}{\omega^3} (\omega_c^4 - \omega^4), \quad \alpha_1 = a \left(1 + \frac{3\omega_c^4}{\omega^4} \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{3a\omega_c^4}{\omega^5}, \quad \beta = \frac{g\omega}{4}, \quad \beta_1 = \frac{g}{4}.$$

Если в (3) пренебречь нелинейностями более высокого порядка, то оно перейдёт в нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2} - \beta |\varepsilon|^2 \varepsilon = \frac{c}{2n\omega} \Delta_{\perp} \varepsilon. \quad (4)$$

При $\alpha > 0$ (или $\omega < \omega_c$) групповая дисперсия является аномальной. Такой характер дисперсии в нашем случае возможен исключительно благодаря вкладу в поляризацию ионного отклика среды. Именно в области $\omega < \omega_c$ при $\beta \propto g \propto \chi^{(3)} > 0$ (где $\chi^{(3)}$ – нелинейная восприимчивость третьего порядка) возможно формирование одномерных ($\Delta_{\perp} \varepsilon = 0$) солитонов уравнения (4), имеющих хорошо известный вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau_p} \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{i\alpha z}{\tau_p^2} \right) \text{sech} \left(\frac{T}{\tau_p} \right). \quad (5)$$

Здесь τ_p – свободный параметр, определяющий длительность импульса.

Авторы работы [26] провели дальнейшую модификацию уравнений вида (3), (4) с целью описания динамики импульсов длительностью в несколько периодов колебаний. Полученное в [26] уравнение, в отличие от (1), выглядит весьма громоздким и является сложным для анализа. При этом оно записано для огибающей с использованием приближения ММАФ для нелинейных слагаемых. На основе численного эксперимента в [26] показано, что учёт дополнительных слагаемых, исчезающих в пределе НУШ, приводит к замедлению процесса самофокусировки. В качестве примера в [26] рассмотрен импульс длительностью $\tau_p = 1$ пс, центрированный на длине волны $\lambda_0 = 800$ нм, который распространяется в плавленом кварце. Заметим, что при таких параметрах импульс содержит порядка 10^3 колебаний, т. е. является импульсом огибающей. В этой связи замедление самофокусировки можно рассматривать как поправочный эффект, а не явление принципиального характера.

Поведение импульса, описываемого уравнением (1), будем исследовать с помощью усреднённого вариационного принципа типа принципа Ритца – Уизема [15, 16, 27]. Уравнению (1) соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{g}{12} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right)^4 + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{b}{2} U^2 - \frac{c}{4n} (\nabla_{\perp} U)^2, \quad (6)$$

где $E = \partial U / \partial \tau$.

Пробное решение, соответствующее распространяющемуся импульсу, представим в виде [28]

$$U = A \text{sech} \left[\gamma \left(\tau - \frac{z}{V} \right) \right] \cos [\omega(\tau - \varphi)], \quad (7)$$

где $\varphi(z, \mathbf{r}_{\perp})$ и $\gamma(z, \mathbf{r}_{\perp}) = 2/\tau_p$ – подлежащие определению функции координат; параметр $1/V$ связан с групповой скоростью v соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n}{c} + \frac{1}{V}.$$

Будем считать, что функциональные зависимости $A^2(\omega, \gamma)$ и $1/V(\omega, \gamma)$ совпадают с таковыми в одномерном случае [28]:

$$A^2 = 168 \frac{a \cdot \gamma^2}{g} \frac{5\omega_c^4 - (5\omega^2 + \gamma^2)(\omega^2 + \gamma^2)}{(\omega^2 + \gamma^2)(3\gamma^4 + 14\omega^2\gamma^2 + 35\omega^4)}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{V} = a(3\omega^2 - \gamma^2) + \frac{b}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (9)$$

Из (8) следует, что ионная дисперсия играет принципиальную роль в формировании солитоноподобного импульса. Действительно, в отсутствие ионной дисперсии $\omega_c = 0$, тогда $A^2 < 0$. При $\omega_c = 0$ групповая дисперсия среды формируется только электронным откликом, а потому является положительной (нормальной). С другой стороны, $g \propto \beta \propto \chi^{(3)} > 0$. При $\chi^{(3)} > 0$ среда является фокусирующей, и солитоны могут формироваться, только если их спектр принадлежит области аномальной групповой дисперсии [28], которая создаётся, как было показано в предыдущем разделе, ионным откликом.

Обосновать выбор пробной функции в виде (7) можно исходя из следующих рассуждений. В одномерном случае $\varphi = z/V_{ph}$. Здесь параметр $1/V_{ph}$ связан с фазовой скоростью v_{ph} соотношением

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{n}{c} + \frac{1}{V_{ph}},$$

где

$$\frac{1}{V_{ph}} = a(\omega^2 - 3\gamma^2) - \frac{b}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (10)$$

Отсюда и из (9) видно отличие фазовой скорости v_{ph} от групповой скорости v , что характерно для диспергирующей среды.

Решение (7)–(10) при $\gamma \ll \omega$ с учётом того, что $E = \partial U / \partial \tau$, как легко видеть, точно переходит в солитон огибающей НУШ (5) (см. также формулу (2)). Если же $\gamma \simeq \omega$, это решение соответствует ПКИ. По причине того что $v_{ph} \neq v$, данный ПКИ не является стационарным: в сопутствующей системе отсчёта его профиль по мере распространения изменяется, т. е. импульс имеет бризероподобный вид. Решения такого типа были найдены в работе [5] в результате численных экспериментов с уравнением (1) при $\Delta_{\perp} = 0$. В этом случае спектр импульса лежал в области аномальной дисперсии. Кроме того, бризероподобные решения в этой же области были найдены в [8] с помощью численного анализа уравнений Максвелла и феноменологических материальных уравнений, содержащих кубическую нелинейность.

Таким образом, можно говорить, что в одномерном случае решение (7)–(10) достаточно хорошо согласуется с известными решениями уравнения (1) и других уравнений, содержащих дисперсию и кубическую нелинейность, практически во всём диапазоне значений γ/ω .

Учёт поперечных возмущений здесь состоит в том, что параметры γ , φ , а вместе с ними A и $1/V$ считаются зависимыми от поперечных и продольной координат. Данную зависимость мы определим с помощью усред-

нённого вариационного принципа. По сути дела речь идёт об исследовании вопроса устойчивости одномерного солитоноподобного решения уравнения (1) по отношению к поперечным возмущениям, включая дифракцию.

Подставляя (7)–(9) в (6) и интегрируя по τ , получаем усреднённый лагранжиан

$$A = A_e + A_d, \quad (11)$$

где выражения для эйкональной (A_e) и дифракционной (A_d) частей усреднённого лагранжиана имеют следующий вид:

$$A_e = -\frac{\omega^2 A^2}{2\gamma} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{c}{2n} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 \right] + \frac{a A^2}{2} \left[\frac{4\gamma^3}{5} + \gamma\omega^2 + \frac{\omega^4}{\gamma} - \omega_c^4 \left(\frac{3}{\gamma} + \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \right) \right] + \frac{g}{12} A^4 \left(\frac{3\gamma^3}{70} + \frac{\gamma\omega^2}{5} + \frac{\omega^4}{2\gamma} \right), \quad (12)$$

$$A_d = -\frac{c}{4n} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{A^2}{6\gamma^2} \left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) - \frac{\partial A^2}{\partial \gamma^2} \right] \frac{(\nabla_{\perp} \gamma)^2}{\gamma}.$$

В (12) отброшены слагаемые, отношение которых к A_e и A_d составляет соответственно $\sim \exp(-\pi\omega/\gamma)$ и $\sim \exp(-2\pi \times \omega/\gamma)$ [24]. Ниже в настоящем разделе будет показано, что в области значений ω/γ , где импульс может быть устойчив по отношению к поперечным возмущениям, данное допущение вполне оправданно.

Варируя (12) по φ и γ , получаем систему уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp} (\rho \nabla_{\perp} \Phi) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \Phi)^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} = Q(\rho, (\nabla_{\perp} \rho)^2, \Delta_{\perp} \rho), \quad (14)$$

где

$$\rho = A^2/\gamma; \quad \Phi = c\varphi/n. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае P и ρ связаны соотношением

$$\frac{dP}{d\rho} = -\frac{\rho}{n} \frac{dn_s}{d\gamma} \Big/ \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{A^2}{\gamma} \right), \quad (16)$$

где

$$n_s = \frac{c}{v_{ph}} = n - \int \frac{dP}{\rho} = n + \frac{ca}{n} \left(\omega^2 - 3\gamma^2 - \frac{3\omega_c^4}{\omega^2 + \gamma^2} \right). \quad (17)$$

– солитонный показатель преломления. Выражение для Q получается варьированием дифракционной части (11):

$$Q = \frac{2c}{n\omega^2} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} (\nabla_{\perp} \gamma)^2 + 2\Gamma \Delta_{\perp} \gamma \right] \Big/ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{A^2}{\gamma} \right), \quad (18)$$

где

$$\Gamma = \frac{c}{4n\gamma} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) \frac{A^2}{6\gamma^2} - \frac{\partial A^2}{\partial \gamma^2} \right]. \quad (19)$$

Правая часть (14) описывает поперечную динамику импульса вследствие дифракции. Пренебрежение правой частью (14) соответствует эйкональному приближению. В этом случае система (13), (14) принимает вид уравнений гидродинамики для идеальной жидкости (формула (13) имеет смысл уравнения непрерывности, а формула (14) – интеграла Коши). Тогда P имеет смысл «давления», ρ – «плотности» воображаемой идеальной жидкости, а Φ – потенциала скоростей. Критерий устойчивости по отношению к самофокусировке может быть записан в виде условия устойчивого течения данной «идеальной жидкости»: $dP/d\rho > 0$ [11, 12].

Из (17) видно, что $dn_s/d\gamma > 0$ при $\omega^2 + \gamma^2 < \omega_c^2$, а это согласуется с условием $A^2 > 0$ (см. формулу (8)). Очевидно, неравенство $\omega^2 + \gamma^2 < \omega_c^2$ является более жёстким, чем условие $\omega < \omega_c$, означающее, что частота несущей импульса принадлежит области аномальной групповой дисперсии среды, и оно справедливо для оптического солитона, содержащего произвольное (в том числе небольшое) число колебаний. В этом случае, как показано в [24], производная $d(A^2/\gamma)/d\gamma > 0$. Суммируя сказанное, из (16) находим, что $dP/d\rho < 0$. Следовательно, на эйкональной стадии импульс подвержен самофокусировке.

Учтём теперь вклад правой части (14) (дифракции) в динамику импульса. Считая солитон аксиально симметричным в плоскостях поперечных сечений, представим выражения для ρ и Φ в автомодельном виде [19–21]:

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right), \quad (20)$$

$$\Phi = f_1 + f_2 \frac{r^2}{2} + \dots, \quad (21)$$

где R, f_1, f_2 являются функциями от z , а R_0 имеет смысл поперечного радиуса входного сигнала. Здесь мы предполагаем, что автомодельная зависимость $\rho(r, z)$ вида (20) сохраняется во всей области распространения импульса. Данное предположение соответствует безаберационному приближению [19, 20].

Подставляя (20), (21) в (13), получаем

$$f_2 = R'/R. \quad (22)$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную по z . Будем, следуя [19, 21], рассматривать приосевую область, что соответствует неравенству $r^2/R^2 \ll 1$. Выражение для обратной длительности импульса γ представим в виде

$$\gamma = F_1 - F_2 + F_2 \exp(-r^2/R^2), \quad (23)$$

где F_1 и F_2 – функции от z . Из (23) видно, что

$$\gamma(r=0, R=R_0) = \gamma_0 = F_1, \quad (24)$$

где γ_0 – входная обратная длительность импульса на его оси. Подставляя (21)–(23) в (14) с учётом (15), разлагая полученные выражения в ряд по $(r/R)^2$ и приравнявая в обеих частях выражения при нулевой и второй степенях r , находим

$$R'' = \frac{4cF_2^2}{n\omega^2 F_1 R} (D - G_e - G_i - G_{\text{non}}), \quad (25)$$

где выражения для вкладов от дифракции D , электронной и ионной дисперсий G_e и G_i , а также нелинейности G_{non} имеют вид

$$D = c[(F_1^3 - 7F_2^2 F_1 + 6F_2^3)/(F_1^2 F_2^2) + (\pi^2 + 12)(7F_1 - 6F_2)/(9F_1^2)]/(4nR^2),$$

$$G_e = aF_1(16F_1^3 + 10\omega^2 F_1 + 24F_1^2 F_2 + 5F_2\omega^2)/5,$$

$$G_i = \omega_c^4 aF_1(3\omega^2 F_1^2 F_2 - 2F_1\omega^4 - \omega^4 F_2 - 2\omega^2 F_1^3)/[F_2(\omega^2 + F_1^2)^3],$$

$$G_{\text{non}} = g\rho_0^2 R_0^4 (21F_1^5 + 39F_1^4 F_2 + 3F_1^3 F_2^2 + 42\omega^2 F_1^3 + 84\omega^2 F_1^2 F_2 + 14\omega^2 F_1 F_2^2 - 35\omega^4 F_1 + 105\omega^4 F_2 + 35\omega^4 F_2^2/F_1)/(420F_2 R^4).$$

Подставляя (8) в выражение для ρ (15) и, приравнявая члены при равных степенях r , получаем алгебраические уравнения, определяющие F_1 и F_2 :

$$\frac{168aF_1}{g} \frac{5\omega_c^4 - (5\omega^2 + F_1^2)(\omega^2 + F_1^2)}{(\omega^2 + F_1^2)(35\omega^4 + 14\omega^2 F_1^2 + 3F_1^4)} = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \equiv u, \quad (26)$$

$$F_2 = ug(\omega^2 + F_1^2)(35\omega^4 + 14\omega^2 F_1^2 + 3F_1^4)$$

$$\times \{168a[5(\omega_c^4 - \omega^4) - 18\omega^2 F_1^2 - 5F_1^4]$$

$$- 2ugF_1(49\omega^4 + 34\omega^2 F_1^2 + 9F_1^4)\}^{-1}. \quad (27)$$

Условие для входных параметров ПКИ, при которых дифракция может компенсировать самофокусировку, определяется из неравенства $R''(0) > 0$. Тогда из (25) находим

$$\gamma_0^2 R_0^2 < \frac{c\omega^2 M}{na X}, \quad (28)$$

где

$$M = (\omega_c^4 - \omega^4)[\omega^4(\omega_c^4 - \omega^4) - 8.39\gamma_0^2 \omega^2(\omega_c^4 + 0.96\omega^4)]$$

$$- 59.9\gamma_0^4(\omega_c^8 - 1.28\omega_c^4 \omega^4 - 0.42\omega^8);$$

$$X = (\omega_c^4 - \omega^4)^2 [4.94\omega^4(\omega_c^4 - \omega^4) + 62.2\gamma_0^2 \omega^2(\omega_c^4 - 0.81\omega^4)]$$

$$+ 103.6\gamma_0^4(\omega_c^{12} - 6.26\omega_c^8 \omega^4 + 7.59\omega_c^4 \omega^8 - 2.33\omega^{12}).$$

Важно отметить, что критерий (28) в случае квазимонохроматических импульсов точно переходит в неравенство

$$R_0^2 \gamma_0^2 < D_c \equiv 0.20 \frac{c}{na} \frac{\omega^2}{\omega_c^4 - \omega^4}. \quad (29)$$

Легко видеть, что неравенство (29) представляет собой хорошо известное условие для мощности солитона огибающей, при выполнении которого дифракция может компенсировать самофокусировку [25]. Действительно, при $\gamma^2 \ll \omega^2$ имеем $\rho_0^2 \sim \gamma_0^2 \sim A^2 \sim E^2 \sim I$, где I – интенсивность импульса. Следовательно, левая часть (29) пропорциональна мощности импульса W , а правая – пороговой мощности W_{th} . Оценим численное значение W_{th} для кварцевого стекла. Из (8) при $\gamma^2 \ll \omega^2$ получаем

$$W \simeq \pi I R_0^2 \simeq \frac{c R_0^2}{4n} E_m^2 \simeq \frac{c R_0^2}{4n} \omega^2 A^2 \simeq \frac{6c a \omega_c^4 - \omega^4}{n g \omega^4} \gamma_0^2 R_0^2,$$

где E_m – амплитуда солитоноподобного импульса. Найдя из этой формулы выражение для $\gamma_0^2 R_0^2$ и подставив его в (29), а также учитывая, что $g = 3n_2/c$ [5], перепишем (29) непосредственно в виде условия для мощности:

$$W < W_{th} \sim \frac{c^3}{n^2 n_2 \omega^2}.$$

Для кварцевого стекла имеем $\omega_c = 1.47 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$ [5], $n_2 \sim 10^{-13} \text{ см}^3/\text{эрг}$. Взяв $\omega \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $n \sim 1$, получим $W_{th} = 10^5 - 10^6 \text{ Вт}$.

В общем случае неравенство (28) можно рассматривать как условие для поперечного радиуса солитоноподобного импульса, при котором дифракция может подавить самофокусировку, т. к. в правой части (28) параметр R_0 отсутствует. Из (28) следует, что с уменьшением поперечного размера импульса при фиксированных остальных параметрах становится проще удовлетворить условию дефокусировки. Полагая, что для ПКИ $\gamma = 10^{14} \text{ c}^{-1}$, $\omega = 10^{15} \text{ c}^{-1}$, получим $R_0 < 10^{-3} \text{ см}$. Область параметров импульса γ_0 и ω , при которых дифракция играет дефокусирующую роль, определим ниже.

Анализ выражения для X показывает, что в области аномальной групповой дисперсии, где $\omega^2 + \gamma^2 < \omega_c^2$, данная величина положительна. Величины G_e , G_i и G_{non} в (25) также положительны в этой области, что соответствует самофокусировке на эйкональной стадии, а величина M при отношении γ_0/ω , большем некоторого критического значения, может стать отрицательной. Тогда условию (28) удовлетворить невозможно и импульс будет подвержен самофокусировке при любых $\gamma_0^2 R_0^2$. Очевидно, что достаточное условие для импульсных параметров, при котором самофокусировка неизбежна даже при учёте дифракции, имеет вид $D < 0$. При этом условии конструктивная роль дифракции сменяется деструктивной. С учетом данного условия из выражения для D получаем кубическое неравенство

$$(F_2/F_1)^3 - 1.167(F_2/F_1)^2 - 0.117 > 0,$$

решая которое, находим, что $F_2/F_1 > 1.242$. Подставляя в последнее неравенство формулы (26) и (27) с учетом (24) и оставляя в числителе и знаменателе члены вплоть до второго порядка малости по γ_0/ω , получаем

$$\frac{\gamma_0}{\omega} > \eta \equiv 1.35 \left(\frac{\omega_c^4 - \omega^4}{23.6\omega_c^4 + \omega^4} \right)^{1/2} \approx 0.28 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^4 \right]^{1/2}. \quad (30)$$

На рис.1 область значений γ_0 и ω , соответствующая конструктивной роли дифракции, заштрихована. При этом $\omega_m/\omega_c = 0.76$, $\gamma_{0m}/\omega_c = 0.17$.

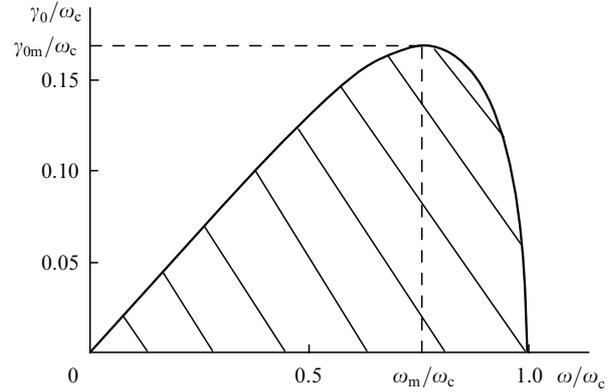


Рис.1. Область параметров γ_0 и ω (заштрихована) входного импульса, при которых роль дифракции конструктивна.

При выполнении неравенства (30) роль дифракции деструктивна, в противном случае – конструктивна. Отсюда видно, что максимальное значение γ_0/ω , при котором дифракция ещё может препятствовать самофокусировке, равно 0.28. Этим оправдывается отбрасывание при получении (30) членов четвертого порядка малости по γ_0/ω и выше. Кроме того, в области, где ещё возможна устойчивость ($\gamma_0/\omega < \eta$), отношения членов, отброшенных в лагранжиане (12), к A_e и A_d составляют соответственно $\sim \exp(-11)$ и $\sim \exp(-22)$, т. е. эти члены являются исчезающе малыми.

Перейдем в (30) к числу колебаний N , содержащихся в импульсе. С учётом того что период световых колебаний, заполняющих данный импульс, можно определить как $T_w = 2\pi/\omega$, а длительность импульса – соотношением $\tau_p = 2/\gamma$, из (30) получим выражение

$$N = \frac{\tau_p}{T} < N_m = \frac{1.15}{[1 - (\omega/\omega_c)^4]^{1/2}}. \quad (31)$$

Отсюда видно, что минимальное число колебаний, при котором дифракция ещё может играть конструктивную роль, равно 1.15. Если же $\omega \rightarrow \omega_c$, то $N_m \rightarrow \infty$. В этом случае справедливо приближение ММАФ, но из анализа влияния дифракции на солитон НУШ не следует вывод о деструктивной роли дифракции при $N < N_m$. Данный факт легко объясним, т. к. при $\omega \rightarrow \omega_c$ дисперсия второго порядка стремится к нулю. Здесь необходим учёт дисперсии третьего порядка и дисперсии нелинейности, что соответствует выходу за пределы применимости НУШ.

Минимальная длительность импульса $\tau_p^{\min} = 2/\gamma_{0m} = 11.5/\omega_c$. Взяв для кварцевого стекла $\omega_c = 1.47 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$ [5], получим $\tau_p^{\min} = 7.8$, $\omega_m = 0.76\omega_c = 1.12 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$, при этом $N_m = 1.41$.

Отметим, что в [29] исследованы процессы самофокусировки импульса длительностью до трёх периодов колебаний, распространяющегося в кубически-нелинейной среде. В случае когда спектр импульса принадлежит области аномальной групповой дисперсии, самофокусировка, как показано в [29], происходит при мощностях импульса, превышающих некоторые пороговые значения. При этом самофокусировка имеет более выраженный (взрывной) характер, чем в случае квазимонохроматических импульсов. Данный вывод согласуется с исследованиями, представленными в настоящей работе.

На основе анализа полных уравнений Максвелла и нелинейной осцилляторной модели среды авторы [29] приходят к выводу, что усиление процесса самофокусировки происходит благодаря динамическому росту поперечной магнитной компоненты импульса. В этой связи отметим, что выражение (1) также получено из полной системы уравнений Максвелла и полуфеноменологических нелинейных материальных уравнений [5], поэтому магнитная составляющая импульса тоже учтена в (1), хотя и неявным образом. В процессе самофокусировки, сопровождающемся самосжатием, происходит пиковое усиление электрической компоненты импульса. Отсюда и из закона электромагнитной индукции также приходим к выводу о динамическом росте поперечной магнитной составляющей.

Деструктивную роль дифракции при $N < N_m$ можно объяснить исходя из следующих соображений. Мощный импульс, распространяясь в однородной среде, создаёт эффективную неоднородность в месте своего нахождения. Изменяя при этом показатель преломления, импульс испытывает дифракцию на данной неоднородности, размер которой равен $\sim R$. Тогда вклад дифракции в динамику импульса будет определяться безразмерным параметром $\delta = \lambda/R$ (где λ – характерная длина волны). При самофокусировке квазимонохроматического солитона огибающей его длина волны λ практически не изменяется, т. к. несмотря на самосжатие в нём содержится всё ещё много колебаний. В то же время $R \rightarrow 0$, что приводит к увеличению δ , а вместе с тем и к возрастанию роли дифракции. Для ПКИ в качестве λ следует взять центральную длину волны волны $\tilde{\lambda}$, соответствующую максимуму его спектральной плотности. Очевидно, что при самосжатии ПКИ, сопровождающемся самофокусировкой, спектр импульса, уширяясь, смещается в фиолетовую область. Это отвечает уменьшению $\tilde{\lambda}$, поэтому параметр δ увеличивается не так быстро, как в случае квазимонохроматических импульсов. Увеличение δ соответствует тому, что дифракция всё ещё может компенсировать самофокусировку при выполнении условия (31) для входных параметров. Если условие (31) справедливо, то $\tilde{\lambda}$ уменьшается более значительно, нежели R , в результате чего δ уменьшается и, следовательно, роль дифракции становится деструктивной.

Данные рассуждения согласуются с одним из выводов работы [30], где рассмотрено влияние дифракции на ПКИ, распространяющиеся в вакууме. В [30] показано, что при распространении импульса с гауссовым поперечным профилем его приосевая область испытывает частотный сдвиг в фиолетовую область. Поскольку в [30] рассматривается распространение в вакууме, то речь не может идти о самофокусировке.

Оценим влияние мелкомасштабных поперечных возмущений на полученные в настоящей работе решения. Мелкомасштабность означает, что характерный размер l_{\perp} возмущений удовлетворяет условию $l_{\perp} \ll R, R_0$. Это позволяет нам в (20) положить $R, R_0 \rightarrow \infty$. Кроме того, будем считать возмущения слабыми, поэтому относительно них можно линеаризовать систему (13), (14). В соответствии со сказанным имеем $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\Phi = \Phi_0(z) + \Phi_1$, где $\Phi_0(z) = cz/[nV_{ph}(\rho_0)]$ и $\rho_1 \ll \rho_0$, $\Phi_1 \ll \Phi_0$. После линеаризации по ρ_1 и Φ_1 уравнения (13), (14) с учётом (15)–(19) примут вид линейной однородной системы. Полагая далее

$$\rho_1, \Phi_1 \sim \exp[i(k_{\parallel}z + k_{\perp}r_{\perp})],$$

получаем алгебраическую однородную систему. Приравняв нулю определитель данной системы, найдём дисперсионное уравнение, корни которого k_{\parallel} являются вещественными при выполнении условия

$$k_{\perp}^2 > s/h,$$

где

$$s = \frac{6ca}{n} \gamma_0 \left[\frac{\omega_c^4}{(\omega^2 + \gamma_0^2)^2} - 1 \right], \quad h = 4 \frac{c}{n\omega^2} \Gamma(\gamma_0) / \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \left(\frac{A^2}{\gamma_0} \right).$$

Анализ показывает, что в области допустимых значений параметров ω и γ_0 , соответствующих аномальной групповой дисперсии, имеем $s, h > 0$. Взяв $\omega_c = 1.47 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$, а параметры ПКИ $\gamma_0 \approx 10^{14} \text{ c}^{-1}$, $\omega \approx 10^{15} \text{ c}^{-1}$, получим $k_{\perp} > 10^3 \text{ см}^{-1}$. Отсюда следует, что $l_{\perp} < 10^{-3} \text{ см}$. Данная величина сравнима с R_0 , найденным из (28) при таких же параметрах ω_c , ω и γ_0 . Поскольку согласно исходному предположению $l_{\perp} \ll R_0$, приведённые оценки свидетельствуют об устойчивости найденных в настоящей работе решений по отношению к мелкомасштабным возмущениям.

3. Заключение

Проведённое в настоящей работе исследование выявляет существенные отличия влияния дифракции на квазимонохроматические импульсы с ярко выраженной несущей частотой от ее влияния на импульсы длительностью в несколько периодов колебаний светового поля. В первом случае дифракция играет конструктивную роль, т. е. препятствует самофокусировке при мощности ниже пороговой. Если же число колебаний $N < N_m$ (см. формулу (31)), дифракция ни при какой мощности импульса уже не может компенсировать самофокусировку. Качественное изменение роли дифракции при $N < N_m$ говорит о том, что волновые фронты импульсов длительностью в несколько периодов колебаний гораздо более чувствительны к абберациям, нежели фронты квазимонохроматических импульсов. Дальнейшее исследование может потребовать отказа от безабберационного приближения. Это предположение подкрепляется выводами работы [30], где показано, что даже при распространении ПКИ в вакууме его волновые поверхности испытывают аномально сильные искривления.

В настоящей работе мы не учитывали процессы ВКР, приводящие к последовательной генерации стоковых спектральных компонент, что обуславливает интенсивное обогащение красной области спектра импульса [31]. Это, в свою очередь, способствует росту введённого в конце предыдущего раздела параметра δ . В связи с этим не исключено, что учёт ВКР-процессов для импульсов длительностью десятки фемтосекунд приведёт к менее жёсткому, нежели (31), условию для входных параметров импульса.

В [17, 18] показано, что на заключительной стадии самофокусировки ПКИ эффекты непараксиальности становятся существенными. Не исключено, что при этом можно ожидать формирования импульсных «оптических игл», аналогичных тем, что предсказаны в [24] для мо-

нохроматических пучков. В дальнейшем мы надеемся рассмотреть влияние непараксиальности, как и процессы ВКР, в рамках нашего аналитического подхода.

1. Беленов Э.М., Назаркин А.В., Ущаповский В.А. *ЖЭТФ*, **100**, 762 (1991).
2. Vrabec T., Krausz F. *Rev. Mod. Phys.*, **72**, 545 (2000).
3. Желтиков А.М. *УФН*, **172**, 743 (2002).
4. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000).
5. Козлов С.А., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **111**, 404 (1997).
6. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *ЖЭТФ*, **123**, 1160 (2003).
7. Ким А.В., Рябикин М.Ю., Сергеев А.М. *УФН*, **169**, 58 (1999).
8. Серкин В.Н., Шмидт Э.М., Беляева Т.Л., Марти-Панаменко Э., Салазар Х. *Квантовая электроника*, **24**, 969 (1997).
9. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *Квантовая электроника*, **30**, 917 (2000).
10. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **90**, 449 (2001).
11. Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **119**, 419 (2001).
12. Сазонов С.В. *УФН*, **171**, 663 (2001).
13. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 746 (2002).
14. Нестеров С.В., Сазонов С.В. *ФТТ*, **45**, 303 (2003).
15. Жданов С.К., Трубников Б.А. *ЖЭТФ*, **92**, 1612 (1987).
16. Жданов С.К., Трубников Б.А. *Квазигазовые неустойчивые среды* (М.: Наука, 1991).
17. Козлов С.А., Петрошенко П.А. *Письма в ЖЭТФ*, **76**, 214 (2002).
18. Берковский А.Н., Козлов С.А., Шполянский Ю.А. *Оптич. ж.*, **69** (3), 35 (2002).
19. Bespalov V.G., Kozlov S.A., Shpolyanskiy Yu.A., Walmsley I.A. *Phys. Rev. A*, **66** (1), 013811 (2002).
20. Нестеров С.В., Сазонов С.В. *Квантовая электроника*, **34**, 151 (2004).
21. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: Наука, 1990).
22. Ахманов С.А., Высолюх В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988).
23. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры* (М.: Физматлит, 2001).
24. Rosanov N.N., Semenov V.E., Vyssotina N.V. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **3**, 96 (2001).
25. Азаренков А.Н., Альтшулер Г.Б., Белашенков Н.Р., Козлов С.А. *Квантовая электроника*, **20**, 733 (1993).
26. Trippenbach M., Wasilewski W., Kruk P., Bryant G.W., Fibich G., Band Y.B. *Opt. Commun.*, **210**, 385 (2001).
27. Anderson D. *Phys. Rev. A.*, **27**, 3135 (1983).
28. Сазонов С.В., Халяпин В.А. *Оптика и спектроскопия*, **95**, 429 (2003).
29. Bennett P.M., Aceves A. *Physica D*, **184**, 352 (2003).
30. Poggas M.A. *Phys. Rev. E*, **65**, 026606 (2002).
31. Беленов Э.М., Назаркин А.В., Прокопович И.П. *Письма в ЖЭТФ*, **55**, 223 (1992).