

Аналитический подход к описанию нагрева многокомпонентных биологических тканей лазерным пучком

В.В.Барун, А.П.Иванов

Развит аналитический подход к решению системы уравнений теплопроводности в двухкомпонентных биологических тканях при внешнем облучении узким лазерным пучком. Учтены осевой и радиальный перенос тепла в среде, теплообмен между капиллярами и окружающей их тканью, а также теплоотдача во внешнюю среду. Получены простые формулы, описывающие пространственно-временные распределения температуры ткани, которые практически не требуют использования средств программирования для вычислений. На основе разработанной методики приведены примеры полей температуры в среде для различных длин волн облучения в диапазоне 400–700 нм при широкой вариации геометрических и оптико-теплофизических параметров задачи. Оценены временные интервалы, в которых можно пользоваться более простым приближением бесконечно широкого пучка для анализа теплового режима ткани, облучаемой узким пучком света. Аналитическая запись функции Грина задачи с узким пучком, полученная в работе, показывает, что применимость указанного приближения определяется не условием существенного превышения ширины пучка над глубиной проникновения света в среду, а радиусом пучка, коэффициентом температуропроводности и моментом времени после начала светового воздействия.

Ключевые слова: биологические ткани, кровеносные сосуды, температура, рассеяние, поглощение, лазерный пучок, глубина проникновения света.

1. Введение

Лазерное излучение оказывает тепловое действие на биологические ткани. Этот эффект находит применение в медицинской практике, например для проведения хирургических и косметических операций, при светотерапии и т. д. Важным аспектом указанных приложений является оперативная оценка параметров теплового режима при нагревании и остывании тканей, а также оптимизация воздействия по размерам светового пучка, его мощности, длине волны, времени и другим характеристикам облучения. Для решения этих задач необходимо иметь инженерный математический аппарат, позволяющий рассчитать пространственные и временные распределения температуры в тканях при различных входных параметрах воздействия, не прибегая к сложным алгоритмам и компьютерным программам. Обычно такие задачи решают численно, особенно для сложных тканей, каждый из компонентов которых термически взаимодействует со своим окружением. Для этого используют, в основном, конечно-разностные схемы [1–4] и метод функций Грина [5, 6]. Обзоры соответствующих теоретических подходов и круг решаемых с их помощью задач приведены, например, в работах [7, 8]. Целью же данной статьи является разработка аналитического метода описания теплового режима многокомпонентных тканей при облучении узким пучком света.

Основу для исследований составляет построенная ранее оптико-теплофизическая модель [9, 10], дающая все

спектральные и тепловые характеристики задачи. Эта модель соответствует некоторой «средней» мягкой ткани с различной степенью кровенаполнения. Ее данные получены путем анализа большого числа публикаций (см., напр., [11] и ссылки там) и представляют собой лишь удобную оценку свойств реальных тканей. В работе [9] подробно описаны принципы ее построения. Модельные результаты сопоставлены в [9, 10] с измерениями, проведенными разными авторами, и показано, что тенденции изменения оптических характеристик по спектру отражены правильно. Количественные значения иногда расходятся в 2–3 раза, но это понятно, учитывая многообразие тканей, их сильную изменчивость и много других достаточно очевидных факторов. Ниже в табл. 1 приведены только те оптические характеристики ткани, которые будут использованы при расчетах. Выбор длин волн λ обусловлен характерными точками спектра поглощения крови. Хотя значения λ не соответствуют точно лазерным длинам волн, это не очень существенно для изучения общих закономерностей переноса тепла в ткани и развиваемого здесь аналитического подхода к решению задачи. Ткань рассматривается как двухкомпонентная среда, состоящая из кровеносных сосудов (капилляров) и окружающей их ткани-основы. Полагается, что капилляры хаотически распределены по пространству, так что все их положения и ориентации равновероятны. В этом случае можно считать, что ткань макроскопически однородна, а ее свойства не зависят от координат, но кровь и обескровленная основа по-разному поглощают свет, и их тепловой режим различен.

В [9, 10, 12] предложены инженерные методики расчета световых и тепловых полей при облучении ткани широким световым пучком бесконечно малой длительности. Там же проанализированы пространственно-временные распределения температуры в зависимости от оптических и теплофизических характеристик среды. В

В.В.Барун, А.П.Иванов. Институт физики им. Б.И.Степанова НАН Белоруссии, Белоруссия, 220072 Минск, просп.Ф.Скорины, 68; e-mail: barun@dragon.bas-net.by, ivanovap@dragon.bas-net.by

Поступила в редакцию 30 декабря 2003 г., после доработки – 20 июля 2004 г.

данной работе исследована температурная кинетика квазиоднородной по толщине ткани, облучаемой импульсом произвольной геометрической ширины и длительности.

2. Постановка задачи

Исходная система уравнений теплопроводности при облучении двухкомпонентной ткани азимутально-симметричным импульсом света по нормали к поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - C_V) \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \eta(1 - C_V) \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \\ &+ (1 - C_V) S_1(t, z, r) + \frac{Q(T_1, T_2)}{c\rho}, \\ C_V \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \eta C_V \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \\ &+ C_V S_2(t, z, r) - \frac{Q(T_1, T_2)}{c\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} T_1(t = 0, z, r) &= T_2(t = 0, z, r) = 0, \\ \left. \frac{\partial T_1(t, z, r)}{\partial z} \right|_{z=0} &= h T_1(t, z = 0, r), \\ \left. \frac{\partial T_2(t, z, r)}{\partial z} \right|_{z=0} &= h T_2(t, z = 0, r), \\ \left. \frac{\partial T_1(t, z, r)}{\partial r} \right|_{r=0} &= \left. \frac{\partial T_2(t, z, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь C_V – объемная концентрация капилляров; T_1 и T_2 – превышения температур ткани-основы и крови над их исходной температурой; t – текущее время, отсчитываемое от начала импульса; z и r – глубина и радиальная координата, отсчитываемые соответственно от поверхности ткани и оси лазерного пучка; η – коэффициент температуропроводности (здесь рассматриваются мягкие ткани, состоящие, в основном, из воды, так что указанные два компонента имеют практически одинаковые $\eta = 1.4 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и произведение теплоемкости на плотность $c\rho = 4.2 \times 10^6 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$ [9]); $S_{1,2}(t, z, r) = E(t, z, r)k_{1,2}/(c\rho)$ – функции источника, обусловленные воздействием внешнего излучения; E – полная (сверху и снизу) облученность в среде; $k_{1,2}$ – показатели поглощения основы и крови соответственно; Q – количество тепла, передаваемого кровью основе в единице объема в еди-

ницу времени; h – параметр теплоотдачи на границе раздела ткань – окружающая среда.

Отметим, что система (1) не содержит члена, связанного с перфузионным теплообменом (с охлаждением ткани за счет микроциркуляции крови) [8]. В настоящей работе перфузия не рассматривается, чтобы не перегружать задачу дополнительным параметром. Кроме того, как показано в [13], это приближение вполне допустимо при не очень больших временах после начала облучения. Например, при скорости перфузии, характерной для кожи, такие времена составляют примерно 1 мин. Ниже будет сделано замечание об учете этого механизма в полученном решении.

Укажем на еще один эффект, наблюдающийся в биологических тканях при нагревании. Это зависимость оптических [14–16] и теплофизических [7] характеристик ткани в целом и ее компонентов от температуры. Учет такой зависимости требует специального исследования, и в настоящей работе она не рассматривается.

3. Упрощающие предположения

Из-за наличия члена Q аналитическое решение системы (1), (2) не удастся получить без дополнительных допущений даже для бесконечно широкого светового пучка. Рассмотрим ряд физических соображений, позволяющих упростить решение (1), (2).

3.1. Характерные времена процессов переноса тепла в ткани

Учтем, что характерные времена протекания процессов теплопроводности, входящих в (1) и (2), различны. В [9, 10] были введены такие времена: $\tau_x = d^2/(10\eta)$ – характерное время выравнивания температуры крови и ткани, $\tau_\eta = 1/(\beta^2\eta)$ – время выравнивания температуры по толщине ткани, $\tau_h = 1/(h^2\eta)$ – время теплообмена поверхности ткани с внешней средой, где d – средний диаметр капилляров; $\beta = [3k(k + \sigma)(1 - g)]^{1/2}$ – глубинный показатель ослабления [17] (k , σ и g – показатели поглощения, рассеяния и средний косинус индикатрисы рассеяния элементарного объема среды; $k = (1 - C_V)k_1 + C_Vk_2$). При вариации d от 2.5 до 10 мкм τ_x изменяется от 4.6×10^{-6} до 7.5×10^{-5} с [9]. Учитывая возможные значения β , указанные в табл. 1, получаем τ_η в диапазоне 0.01 – 40 с. Типичные интервалы значений h равны 5 – 50 и 500 – 1000 м^{-1} [9] (при контакте ткани с воздухом или водой соответственно), при этом $\tau_h = 3 \times 10^5 - 0.7$ с. Дополнительно к τ_x , τ_h и τ_η можно по аналогии с τ_x [9, 12] ввести характерное время $\tau_D = D^2/(10\eta)$ радиального размытия тепла. Пусть диаметр $D = 2r_0$ лазерного пучка порядка 1 – 10 мм, так что интервал изменения τ_D составляет 0.7 – 70 с. Таким образом, $\tau_x \ll \tau_h, \tau_\eta, \tau_D$, т. е. теплообмен капилляров с тканью-основой протекает намного быстрее других рассматриваемых здесь процессов теплопроводности. По истечении некоторого промежутка времени τ_0 ,

Табл. 1. Некоторые модельные оптические и теплофизические параметры биологической ткани.

λ (нм)	$C_V = 0.01$					$C_V = 0.05$					$C_V = 0.1$				
	k (см $^{-1}$)	β (мм $^{-1}$)	z_0 (мм)	R (%)	τ_η (с)	k (см $^{-1}$)	β (мм $^{-1}$)	z_0 (мм)	R (%)	τ_η (с)	k (см $^{-1}$)	β (мм $^{-1}$)	z_0 (мм)	R (%)	τ_η (с)
418	20.4	7.56	0.132	24.9	0.125	94.9	17.2	0.0581	5.89	0.0241	188	25.1	0.04	2.13	0.011
575	2.36	1.53	0.655	45.2	3.1	10.2	3.18	0.315	19.2	0.706	20	4.41	0.227	9.65	0.367
600	0.575	0.71	1.41	65.8	14.2	1.5	1.13	0.888	50.5	5.64	2.65	1.47	0.68	39.6	3.3
700	0.289	0.41	2.43	69.4	42.5	0.382	0.462	2.17	65.4	33.5	0.497	0.519	1.93	61.2	26.5

большого τ_x , когда температуры крови и ее окружения выравниваются, средю можно рассматривать как однокомпонентную и не учитывать теплообмен между сосудами и основой, т.е. положить $Q = 0$ в (1). Оценим это время τ_0 .

3.2. Решение уравнений теплопроводности для бесконечно широкого в пространстве и дельтаобразного во времени пучка

Поскольку $\tau_x \ll \tau_D$, то для оценки τ_0 можно использовать решение более простой задачи, чем (1), (2), а именно – функции Грина T_{18}^∞ и T_{28}^∞ , т.е. температуры ткани-основы и крови, полученные для бесконечно широкого дельтаобразного во времени ($\delta(t)$) пучка [9, 10, 12]:

$$T_{18}^\infty(t, z) = \frac{A_1 F(t, z)}{2} - A_1 F_1(t, z) \frac{\tau_\eta^{1/2}}{\tau_\eta^{1/2} - \tau_h^{1/2}}, \tag{3}$$

$$T_{28}^\infty(t, z) = \frac{A_2 F(t, z)}{2} - A_2 F_1(t, z) \frac{\tau_\eta^{1/2}}{\tau_\eta^{1/2} - \tau_h^{1/2}}. \tag{4}$$

Здесь

$$A_1(t) = A_{10}[1 - W(t)] + A_0 W(t); \tag{5}$$

$$A_2(t) = A_{20}[1 - W(t)] + A_0 W(t);$$

$$W(t) = \exp\left(-\frac{t_0}{t}\right) \left[I_0\left(\frac{t_0}{t}\right) + I_1\left(\frac{t_0}{t}\right) \right]; \quad t_0 = \frac{d^2}{8\eta}; \tag{6}$$

$$A_{10,20} = \frac{k_{1,2} E_0^* (1 - r_1)(1 + R)}{(1 - Rr_2)c\rho}; \tag{7}$$

$$A_0 = (1 - C_V)A_{10} + C_V A_{20}; \tag{8}$$

$$F(t, z) = \exp\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right) \left\{ \exp(-\beta z) \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right)^{1/2} - \frac{z}{2(t\eta)^{1/2}}\right] + \exp(\beta z) \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right)^{1/2} + \frac{z}{2(t\eta)^{1/2}}\right] \right\}; \tag{9}$$

$$F_1(t, z) = \exp\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right) \exp\left[\frac{z}{(\tau_\eta\eta)^{1/2}}\right] \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right)^{1/2} + \frac{z}{2(t\eta)^{1/2}}\right] - \exp\left(\frac{t}{\tau_h}\right) \exp\left[\frac{z}{(\tau_h\eta)^{1/2}}\right] \times \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{t}{\tau_h}\right)^{1/2} + \frac{z}{2(t\eta)^{1/2}}\right]; \tag{10}$$

E_0^* – поверхностная плотность энергии δ -импульса на входе в среду (в Дж/м²). Три параметра из (7), (8) ($R = \exp(-Y)$, r_1 и r_2) имеют смысл коэффициентов отражения толщи слоя и поверхности ткани при ее освещении извне и изнутри среды. При освещении по нормали $Y = (36/7)\{k/[3(k + \sigma)(1 - g)]\}^{1/2}$ [17], $r_1 = 0.02$ (при показателе преломления ткани 1.33). Изнутри ткань всегда освещена диффузно. Если интенсивность излучения, подходящего к ее поверхности, изотропна, то $r_2 = 0.472$ [18]. При учете реальной угловой структуры r_2 несколько возрастает в синей области спектра (максимум на 0.08) и примерно настолько же уменьшается в красной обла-

сти [10, 19] относительно 0.472. Это связано с особенностями угловой структуры рассеянного назад света в сильно поглощающей среде (при $\lambda < 550$ нм) [19].

Тогда для импульса длительности t_p имеем

$$T_{18,28}^\infty(t, z) = \int_0^t u(t - \tau) T_{18,28}^\infty(\tau, z) d\tau, \tag{11}$$

где $u(\tau)$ – временная форма импульса облучения. Пусть далее

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq t_p, \\ 0 & \text{при } t > t_p. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, соотношения (3)–(12) дают решение задачи о пространственно-временном распределении температуры двухкомпонентной среды, облучаемой бесконечно широким пучком света произвольной длительности.

3.3. Оценка времени выравнивания температуры ткани-основы и крови

Рис.1 иллюстрирует закономерности изменения температуры ткани-основы и крови на глубинах $z = 0$ и $2z_0$ (где z_0 – глубина, на которой облученность падает в e раз) при облучении импульсами разной длительности, но с одинаковой поверхностной плотностью энергии на входе в среду $E_0^* = 20$ Дж/см². Данные рис.1 получены для гематокрита 0.4, объемной доли гемоглобина в эритроцитах 0.25, степени оксигенации крови 0.75, $C_V = 0.05$ (значения этих параметров будут сохраняться постоянными и для всех результатов, приведенных ниже); расчет выполнен по (3)–(12). Видно, что при $\tau_0 \approx 100\tau_x$ температура капилляров и их окружения выравнивается. Из рис.1 также следует, что при t , больших по сравнению с t_p , кинетика теплового процесса не зависит от t_p (а зависит от E_0^*). С момента τ_0 , который, учитывая реальные значения d , составляет примерно $(0.5 - 7.5) \times 10^{-3}$ с, можно полагать в (1), что $Q = 0$, и исходная система (1) вырождается в одно уравнение для температуры T

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S(t, z, r) \tag{13}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} T(t = 0, z, r) &= 0, \\ \frac{\partial T(t, z, r)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= hT(t, z = 0, r), \\ \frac{\partial T(t, z, r)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $S = (1 - C_V)S_1 + C_V S_2$ – новая функция источника. Таким образом, задача (1), (2) сведена к более простому случаю (13), (14), эквивалентному исходной системе уравнений при $t \geq \tau_0$. Именно такие моменты времени будем рассматривать ниже.

3.4. Особенности функции источника

Оценим функцию источника S . В [10, 19] путем расчета дисперсии радиального размытия пучка света по формулам диффузионного приближения, приведенным в

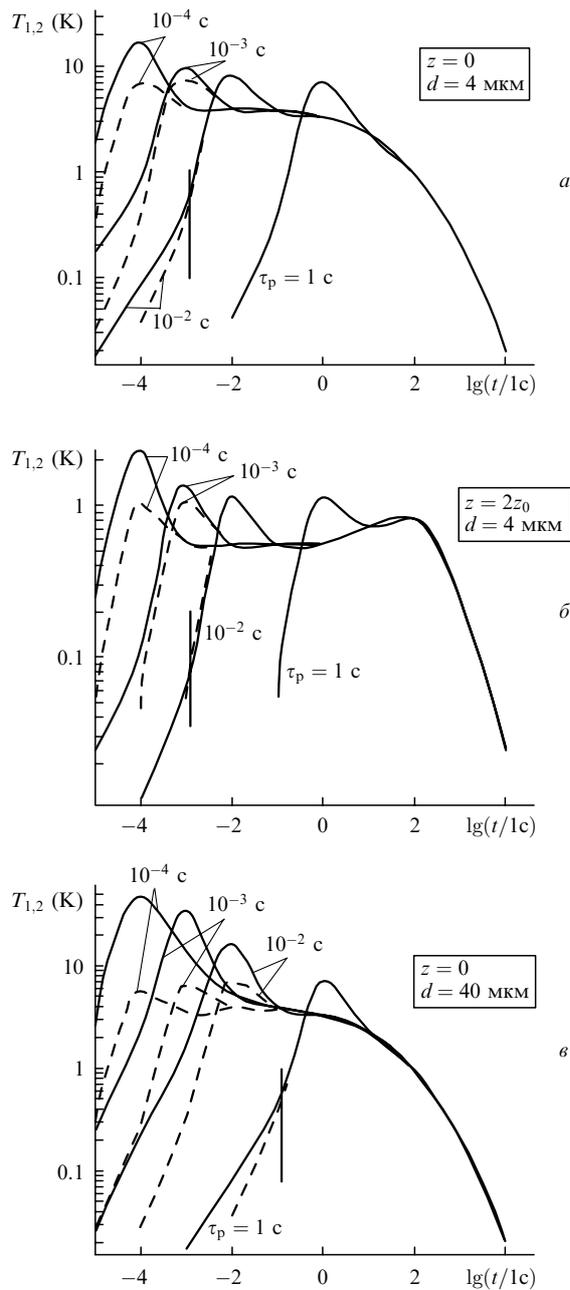


Рис.1. Зависимость от времени температуры крови (сплошные кривые) и ткани-основы (штриховые кривые) при облучении широким световым пучком с плотностью энергии $E_0^* = 20$ Дж/см² и длительностью $t_p = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ и 1 с; $z = 0$ и $2z_0$, $d = 4$ и 40 мкм, $\lambda = 700$ нм, $C_V = 0.05$, $h = 40$ м⁻¹. Вертикальные прямые дают значения $100\tau_x$.

[17], показано, что при $r_0 \geq 1$ мм можно в ряде случаев до глубин в несколько единиц $z_0 = 1/\beta$ (см. табл.1) пренебречь таким размытием и считать, что

$$S(t, z, r) = u(t)U_1(z)U_2(r), \tag{15}$$

т. е. разделить переменные функции S . Функция $U_1(z)$ описывает зависимость облученности в среде от глубины, а $U_2(r)$ – от расстояния до оси пучка. Соотношение (15) означает, что радиальная структура пучка сохраняется при любых z . Ниже, как и в [20], будем решать задачу (13), (14) в предположении, что условие (15) выполняется. Здесь согласно [17, 18]

$$U_1(z) = U_0(1 - r_1)(1 + R) \frac{\exp(-\beta z)}{1 - Rr_2}, \tag{16}$$

где $U_0 = E_0 k / (c\rho)$ (в К/с); E_0 – поверхностная плотность мощности лазера на оси пучка при $z = 0$ (в Вт/м²). Радиальную структуру функции источника будем считать гауссовой: $U_2(r) = \exp(-2r^2/r_0^2)$, где r_0 – эффективная ширина (радиус) пучка по уровню $1/e^2$.

4. Решение системы уравнений теплопроводности

4.1. Решение методом преобразования Фурье при произвольном параметре теплоотдачи

Уравнение (13) при условиях (14) было решено в [20] методом преобразования Фурье для $h = 0$ и нерассеивающей, но поглощающей среды. Рассеяние света сказывается на физическом смысле показателя экспоненты β функции $S_1(z)$ (здесь это глубинный показатель ослабления, тогда как в [20] – показатель поглощения) и на радиальном размытии пучка света. Как отмечалось, последним фактором можно в ряде случаев пренебречь. Таким образом, конечный результат [20], а именно пространственно-временные распределения температуры ткани, можно при минимальной модификации использовать и для рассеивающей среды при $h = 0$. Однако это решение имеет другие недостатки, которые будут рассмотрены ниже.

Получим решение задачи (13), (14) методом преобразования Фурье для произвольного h :

$$T(t, z, r) = U_0 \int_0^\infty [G_1(p) \cos(zp) + G_2(p) \sin(zp)] dp \times \int_0^\infty H(q) J_0(rq) f(t, p, q) dq, \tag{17}$$

где

$$f(t, p, q) = \frac{1 - \exp[-\eta t(p^2 + q^2)]}{\eta(p^2 + q^2)} \text{ при } t \leq t_p, \tag{18}$$

$$f(t, p, q) = \frac{\exp[-\eta(t - t_p)(p^2 + q^2)] - \exp[-\eta t(p^2 + q^2)]}{\eta(p^2 + q^2)}$$

при $t > t_p$;

p и q – переменные преобразования Фурье по z и r . В (17) собственные функции имеют вид

$$G_1(p) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\beta}{\beta^2 + p^2} - h \frac{h\beta - p^2}{(\beta^2 + p^2)(h^2 + p^2)} \right], \tag{19}$$

$$G_2(p) = \frac{2}{\pi} hp \frac{\beta + h}{(\beta^2 + p^2)(h^2 + p^2)}, \tag{20}$$

$$H(q) = \frac{r_0^2}{4} q \exp\left(-\frac{q^2 r_0^2}{8}\right), \tag{21}$$

J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, однако, что общее решение (17)–(21) довольно громоздко, как и аналогичное решение [20] при $h = 0$. Оно выражено в виде двойного интеграла по p и q в бесконечных пре-

делах от осциллирующих тригонометрических функций и функции Бесселя, что создает трудности при расчетах. Цель данной работы – получить более простую форму решения уравнений теплопроводности для произвольного h .

4.2. Решение через функцию Грина

Для нахождения функции Грина задачи, т. е. распределения температуры $T_\delta(t, z, r)$ при облучении среды $\delta(t)$ -импульсом света, заметим, что (17) можно переписать в виде

$$T(t, z, r) = U_0 \int_0^\infty u(t - \tau) d\tau \int_0^\infty [G_1(p) \cos(zp) + G_2(p) \sin(zp)] \times \exp(-\eta\tau p^2) dp \int_0^\infty H(q) J_0(rq) \exp(-\eta\tau q^2) dq, \quad (22)$$

где $u(t)$ определяется по (12). Последние два интеграла как раз дают, по определению, функцию Грина задачи. Их можно вычислить аналитически. Интеграл по p есть функция Грина T_δ^∞ задачи с бесконечно широким $\delta(t)$ -пучком для однокомпонентной среды. Ее явный вид дается формулами (3)–(10) при $W(t) \equiv 1$, если вместо E_0^* стоит E_0 . Интеграл по q – табличный [21]. Окончательно получаем

$$T_\delta(t, z, r) = T_\delta^\infty(t, z) \frac{r^2 \exp\{-r^2[4(r_0^2/8 + \eta t)]^{-1}\}}{8(r_0^2/8 + \eta t)}. \quad (23)$$

Далее, подставляя (23) в (22), находим искомое решение уравнения (13) при условиях (14)

$$T(t, z, r) = \int_0^t u(t - \tau) T_\delta(\tau, z, r) d\tau \quad (24)$$

в виде однократного интеграла от монотонных функций. Этот интеграл намного проще для вычислений, чем (17).

Структура функции Грина (23) есть следствие того, что в (15) пренебрегается радиальным размытием светового пучка и он полагается достаточно широким в пространстве. При этом, однако, нельзя не учитывать радиальный «уход» тепла из приосевой зоны, обусловленный совершенно другими, нежели перенос света, причинами, а именно процессами теплопроводности и тем, что пучок является узким для тепловой задачи вне зависимости от оптических свойств ткани. Иными словами, изменение T по глубине z связано и с оптическими, и с теплофизическими характеристиками среды, тогда как зависимость T от r определяется только теплофизическими свойствами. Эта особенность найдет свое проявление при дальнейшем рассмотрении.

Сделаем еще одно замечание относительно учета теплообмена внутри ткани, связанного с перфузией. В рамках модели [22] равномерно распределенных стоков тепла этот механизм можно описать путем простого умножения функции Грина (23) на экспоненциальный множитель $\exp(-vt)$ [13], где v – скорость перфузии или объем крови, протекающий через единичный объем ткани за единицу времени. Таким образом, теплообмен вследствие микроциркуляции крови сохраняет аналитичность развиваемого здесь подхода. Существуют и другие, более сложные модели перфузии [23–25], но мы не будем здесь подробнее останавливаться на этом вопросе.

4.3. Решение для бесконечно широкого пучка произвольной длительности

Рассмотрим сначала соответствующие зависимости для случая $r_0 = \infty$. Используя результаты (3)–(10), можно аналитически выполнить интегрирование в (24). Получим, что при $t \leq t_p$, когда происходит нагрев,

$$T_\infty \equiv T_h(t, z) = U_0 \left\{ 0.5\tau_\eta [M(t, z, \beta) + M(t, -z, \beta)] + \tau_\eta^{1/2} (\tau_h^{1/2} + \tau_\eta^{1/2}) \operatorname{erfc} \left[\frac{\beta z}{2(t/\tau_\eta)^{1/2}} \right] - \tau_\eta \exp(-\beta z) - \tau_\eta^{1/2} \left[\tau_h M(t, z, h) - \frac{\tau_\eta M(t, z, \beta)}{\tau_h^{1/2} - \tau_\eta^{1/2}} \right] \right\}. \quad (25)$$

При $t > t_p$, когда обычно ткань остывает,

$$T_c(t, z) = U_0 \left\{ \frac{\tau_h \tau_\eta^{1/2}}{\tau_h^{1/2} - \tau_\eta^{1/2}} [M(t - t_p, z, h) - M(t, z, h)] - \frac{\tau_\eta (\tau_h^{1/2} + \tau_\eta^{1/2})}{2(\tau_h^{1/2} - \tau_\eta^{1/2})} [M(t - t_p, z, \beta) - M(t, z, \beta)] - 0.5\tau_\eta \times [M(t - t_p, -z, \beta) - M(t, -z, \beta)] - \tau_\eta^{1/2} (\tau_h^{1/2} + \tau_\eta^{1/2}) \times \left\{ \operatorname{erfc} \left[0.5\beta z \left(\frac{\tau_\eta}{t - t_p} \right)^{1/2} \right] - \operatorname{erfc} \left[0.5\beta z \left(\frac{\tau_\eta}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \right\}, \quad (26)$$

где

$$M(t, z, \beta) = \exp\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right) \times \exp(\beta z) \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{t}{\tau_\eta} \right)^{1/2} + 0.5\beta z \left(\frac{\tau_\eta}{t} \right)^{1/2} \right]. \quad (27)$$

Формула для $M(t, z, h)$ имеет вид (27), но вместо β и τ_η стоят соответственно h и τ_h .

Несмотря на громоздкий вид (25)–(27), здесь нет операции интегрирования. Это очень удобно, т. к. позволяет физически наглядно исследовать влияние параметров задачи на пространственно-временные распределения температуры ткани при произвольном t_p . Кроме того, выше отмечалось, что во многих случаях $\tau_h \gg \tau_\eta$ (например, при контакте ткани с воздухом), так что в (25)–(27) можно перейти к пределу, полагая $\tau_h = \infty$, и дополнительно упростить эти формулы. Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами.

4.3.1. Тепловой режим поверхности ткани и его асимптотики

Температуру ткани часто измеряют на ее поверхности. При $z = 0$ из (25)–(27) следует, что

$$T_h(t, 0) = U_0 \left\{ \left[\tau_h^{1/2} \exp\left(\frac{t}{\tau_h}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\tau_h}\right)^{1/2} - \tau_\eta^{1/2} \exp\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\tau_\eta}\right)^{1/2} \right] \frac{(\tau_h \tau_\eta)^{1/2}}{\tau_\eta^{1/2} - \tau_h^{1/2}} + (\tau_h \tau_\eta)^{1/2} \right\}, \quad (28)$$

$$T_c(t, 0) = U_0 [N(t, h) - N(t, \beta)] \frac{(\tau_h \tau_\eta)^{1/2}}{\tau_\eta^{1/2} - \tau_h^{1/2}}, \quad (29)$$

где

$$N(t, \beta) = \tau_\eta^{1/2} [M(t, 0, \beta) - M(t - t_p, 0, \beta)] + 2 \frac{t^{1/2} - (t - t_p)^{1/2}}{\pi^{1/2}}. \quad (30)$$

Формула для $N(t, h)$ имеет вид (30), но вместо β и τ_η стоят соответственно h и τ_h .

В частности, при $h = 0$ или $\tau_h \rightarrow \infty$ (что достаточно часто можно полагать при контакте ткани с воздухом [9, 10, 12], во всяком случае, при ее нагревании) из (28)–(30) имеем

$$T_\infty(t, 0) = U_0 \left\{ 2 \left(\frac{t \tau_\eta}{\pi} \right)^{1/2} + \tau_\eta \left[\exp \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} \quad \text{при } t \leq t_p, \quad (31)$$

$$T_\infty(t, 0) = U_0 \left\{ 2 \left(\frac{\tau_\eta}{\pi} \right)^{1/2} [t^{1/2} - (t - t_p)^{1/2}] + \tau_\eta \left[\exp \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right)^{1/2} - \exp \left(\frac{t - t_p}{\tau_\eta} \right) \times \operatorname{erfc} \left(\frac{t - t_p}{\tau_\eta} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad \text{при } t > t_p.$$

Сравнение (31) с соответствующими асимптотиками, приведенными в [20], позволяет выявить различия между двумя подходами. Некоторые из них рассмотрены ниже. Причиной различий является то, что результат [20] – приближенный за счет гауссовой аппроксимации функции G_1 из (17), тогда как (31) – точный.

При $t \rightarrow \infty$ для импульса конечной длительности и $h = 0$ оба подхода дают одинаковую асимптотику

$$T_\infty(t, 0) = U_0 t_p \left(\frac{\tau_\eta}{\pi t} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

но когда $h \neq 0$, как следует из (29), (30), она имеет вид

$$T_\infty(t, 0) = U_0 t_p (\tau_h \tau_\eta)^{1/2} \frac{\tau_h^{1/2} + \tau_\eta^{1/2}}{\pi^{1/2} t^{3/2}}, \quad (33)$$

и поверхность ткани охлаждается по закону $t^{-3/2}$, т.е. быстрее, чем (32). Это, естественно, связано с отдачей тепла во внешнюю среду при $h > 0$.

4.4. Температура ткани в стационарном режиме

Рассмотрим случай стационарного облучения ткани ($t_p = \infty$). Если $t \rightarrow \infty$, из (28) следует, что при освещении бесконечно широким пучком установившаяся температура ткани

$$T_h(\infty, z) = U_0 \{ \tau_\eta [1 - \exp(-\beta z)] + (\tau_h \tau_\eta)^{1/2} \}, \quad (34)$$

а на поверхности

$$T_h(\infty, 0) = U_0 (\tau_h \tau_\eta)^{1/2}. \quad (35)$$

Отметим, что для теплоизолированной ткани ($\tau_h = \infty$) при $t \rightarrow \infty$ температура $T_h(\infty, z) \rightarrow \infty$, т.е. стационарный режим не наступает. Физически это связано с тем, что отток тепла в глубь среды за счет теплопроводности не обеспечивает компенсации притока внешней энергии.

Другая ситуация имеет место при облучении среды узким пучком. Здесь тепло может «уходить» в радиальном направлении, так что стационарный режим наступает и при $h = 0$. Приведем соответствующие оценки. При $t < t_p$, $t \rightarrow \infty$, $z = 0$ и $r = 0$ уравнение (17) принимает вид

$$T(\infty, z, r) = U_0 \frac{\beta r_0^2}{2\pi\eta} \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2 + p^2} dp \times \int_0^\infty \frac{q \exp(-q^2 r_0^2/8)}{q^2 + p^2} dq. \quad (36)$$

Второй интеграл из (36) согласно [26] равен $0.5 \exp(p^2 \times r_0^2/8) E_1(p^2 r_0^2/8)$, где $E_1(x) = \int_x^\infty [\exp(-t)/t] dt$ – интегральная показательная функция. Воспользовавшись неравенствами для E_1 [26]

$$0.5 \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < \exp(x) E_1(x) < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (37)$$

и выполнив интегрирование в (36), получим следующую оценку установившейся температуры на поверхности в центре пучка:

$$\frac{U_0 r_0^2}{8\eta} \ln \left(1 + \frac{4}{\beta r_0} \right) < T(\infty, 0, 0) < \frac{U_0 r_0^2}{4\eta} \ln \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\beta r_0} \right). \quad (38)$$

Аналогично можно получить и оценку температуры сверху в произвольный момент времени при стационарном облучении. Так, при $z = 0$, $h = 0$, $r = 0$, $t_p \rightarrow \infty$ и любом t находим

$$T(t, 0, 0) < \frac{U_0 r_0^2}{4\eta} \left\{ \ln \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\beta r_0} \right) + \frac{1}{(\beta r_0)^2/4 + t/\tau_\eta - 1} \times \left[\exp \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{t}{\tau_\eta} \right)^{1/2} - \left(\frac{(\beta r_0)^2}{8} + \frac{t}{\tau_\eta} \right)^{1/2} \times \exp \left(\frac{\eta t}{\eta t + r_0^2/8} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta t}{\eta t + r_0^2/8} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (39)$$

5. Некоторые применения

5.1. Приближение бесконечно широкого пучка

До каких же моментов времени t_∞ можно считать, что пучок радиуса r_0 на оси ($r = 0$) ведет себя практически как бесконечно широкий? Ответ на этот вопрос дает табл.2. Ее данные получены при $E_0 = 2$ Вт/см². Критерием t_∞ положено время, когда температура T при облучении световым пучком радиуса r_0 , рассчитанная по (23), (24), равна $0.9T_\infty$, где T_∞ вычисляется по (25), (27). Из табл.2 следует, что t_∞ увеличивается с ростом r_0 , β , h и уменьшением z . Значения t_∞ составляют единицы и доли секунды.

5.2. Сравнение переноса тепла в осевом и радиальном направлениях

Чтобы ответить на вопрос, можно ли облучающий пучок считать бесконечно широким для тепловой задачи,

Табл.2. Оценка временного интервала применимости формул (25)–(27) для описания температуры ткани при облучении узким пучком света.

Глубина	λ (нм)	r_0 (мм) ($h = 40 \text{ м}^{-1}$)								r_0 (мм) ($h = 1000 \text{ м}^{-1}$)							
		0.5		1		2		5		0.5		1		2		5	
		t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T	t_∞	T
$z = 0$	418	0.06	1.2	0.27	3	1.2	7	7.8	19.5	0.06	1	0.3	2.7	1.4	5.7	13.3	11.5
	575	0.054	0.25	0.22	0.87	0.95	2.7	6.7	10	0.054	0.024	0.23	0.8	1	2.3	9.3	6.3
	600	0.052	0.06	0.21	0.23	0.88	0.82	5.9	3.9	0.053	0.057	0.22	0.21	0.93	0.68	7.2	2.5
	700	0.052	0.02	0.21	0.08	0.85	0.29	5.5	1.6	0.053	0.018	0.21	0.068	0.89	0.24	6.4	1
$z = z_0$	418	0.055	0.85	0.25	2.6	1.1	6.6	7.7	19	0.056	0.83	0.26	2.4	1.3	5.9	12.7	11.6
	575	0.05	0.11	0.2	0.46	0.85	1.9	6.2	8.7	0.051	0.11	0.2	0.46	0.88	1.8	7.9	6.5
	600	0.051	0.023	0.2	0.09	0.81	0.39	5.2	2.6	0.052	0.024	0.2	0.095	0.81	0.39	5.7	2.3
	700	0.051	0.007	0.21	0.029	0.82	0.12	5	0.76	0.051	0.007	0.21	0.029	0.82	0.12	5	0.76
$z = 5z_0$	418	0.04	0.03	0.16	0.37	0.77	2.76	6.3	14	0.04	0.03	0.16	0.37	0.8	2.5	8.6	9.2
	575	0.05	0.002	0.16	0.37	0.7	0.005	3.9	1.1	0.05	0.002	0.2	0.009	0.7	0.05	4	1
	600	0.006	0.0005	0.2	0.009	0.8	0.007	4.5	0.06	0.06	0.0005	0.2	0.002	0.8	0.007	4.5	0.06
	700	0.086	0.0002	0.23	0.0006	0.87	0.002	5	0.014	0.086	0.0002	0.23	0.0006	0.87	0.002	5	0.014

Примечание: t_∞ измеряется в секундах, T – в кельвинах.

обычно сравнивают его ширину r_0 с глубиной проникновения света $1/\beta$ [4, 20]. Если $r_0 \gg 1/\beta$, полагают, что радиальным размытием тепла можно пренебречь. Выше отмечалось, что процесс переноса тепла в радиальном направлении не должен существенно зависеть от оптических свойств среды и, в частности, от β . Это прямо следует из (23). Приведем и соответствующие графические данные, полученные путем вычислений по (24) с учетом

(23), (28). Рис.2 иллюстрирует рост температуры на поверхности ткани (а) и на глубине $2z_0$ (б) в центре пучка при воздействии непрерывного лазерного излучения (с разными r_0) на двух длинах волн 418 и 700 нм. При этих λ значения $1/\beta$ сильно различаются, они равны 0.06 и 2.2 мм соответственно ($C_V = 0.05$). Тем не менее, из рис.2 видно, что отклонение от температуры в случае бесконечно широкого пучка (кривая 1) происходит для пучков конечных размеров примерно при одинаковых t и слабо зависит от глубины проникновения света. Такой же вывод можно сделать из данных табл.2 для других длин волн, во всяком случае, для приповерхностного участка ткани. Действительно, t_∞ слабо зависит от длины волны и, следовательно, от глубины проникновения света. Видно, что приближением бесконечно широкого пучка для задачи распространения тепла (не света) можно пользоваться при

$$r_0^2 \gg 8\eta t \tag{40}$$

вне зависимости от оптических свойств среды и, в частности, от z_0 . При этом функция Грина (23) принимает вид

$$T_\delta(t, z, r) = T_\delta^\infty(t, z) \exp\left(-\frac{2r^2}{r_0^2}\right). \tag{41}$$

Этот результат – следствие физически различных процессов, определяющих радиальное размытие тепла и излучения. С другой стороны, неравенство (40) можно использовать для ответа на вопрос, каким должен быть радиус пучка, чтобы нагревание среды при его воздействии в течение заданного промежутка времени t_p можно было описать формулой (25), справедливой при $r_0 = \infty$. Например, при $t_p = 60$ с оценка по (40) дает $r_0 \approx 1$ см.

6. Выводы

В работе получено решение системы уравнений теплопроводности для двухкомпонентных биологических тканей, облучаемых узким пучком света. В решение заложены оценки характерных времен различных тепловых процессов, участвующих в формировании температурных полей, и особенности функции источника в среде. Показано, что обмен теплом между капиллярами и тканью-основой протекает намного быстрее других про-

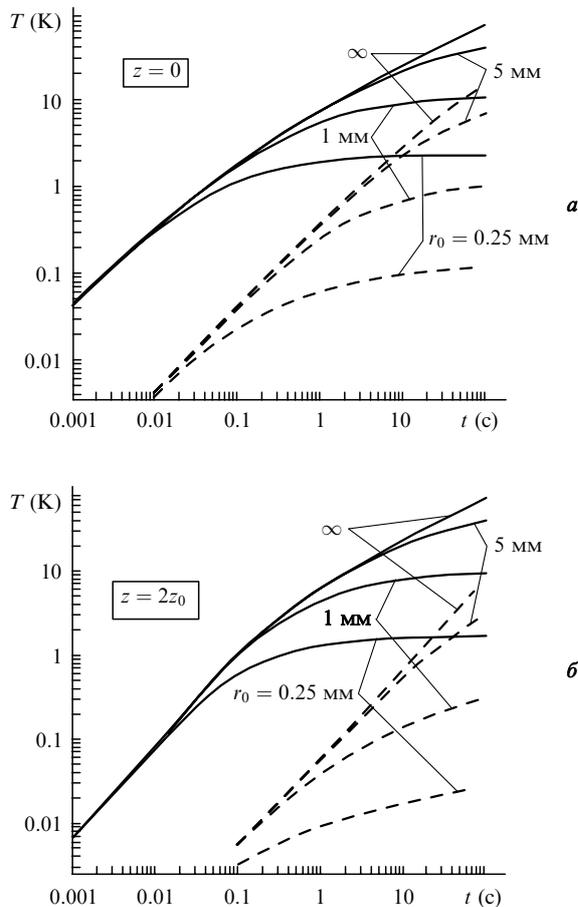


Рис.2. Зависимость от времени температуры ткани при облучении световым пучком на длинах волн 418 (сплошные кривые) и 700 нм (штриховые кривые), $r_0 = \infty, 5, 1$ и 0.25 мм; $E_0 = 2 \text{ Вт/см}^2$, $C_V = 0.05$, $h = 40 \text{ м}^{-1}$, $z = 0$ и $2z_0$.

цессов, так что по истечении достаточно малого промежутка времени τ_0 значения температуры сосудов и их окружения выравниваются и среда ведет себя как однокомпонентная. Именно за счет этого достигнута аналитичность решения. При $t < \tau_0$, когда температуры крови и ткани-основы еще не выровнялись, несущественен механизм радиального размытия тепла, и для расчета T_1 и T_2 можно пользоваться приближением (3)–(11) бесконечно широкого облучающего пучка. Второе упрощающее предположение о разделении переменных z и r в функции источника более критичное и справедливо, в общем, при не очень больших z , зависящих от длины волны облучающего пучка или, иными словами, от оптических свойств среды. Однако в любом случае оно дает оценку сверху температуры на оси пучка конечных размеров. Использование метода функции Грина для однокомпонентной среды при $t > \tau_0$ позволило получить аналитическое решение при облучении ткани бесконечно широким пучком, а также решение в виде однократного интеграла от монотонных функций для узкого пучка. Представленная в работе инженерная методика предоставляет медикам, биологам, научным работникам оперативный инструмент для оптимизации параметров лазерного воздействия на ткань при светотерапии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф01-009).

- Mansuripur M., Connell G.A.N., Goodman G.W. *Appl. Opt.*, **21** (6), 1106 (1982).
- Motamedi M., Rastegar S., LeCarpentier G., Welch A.J. *Appl. Opt.*, **28** (12), 2230 (1989).
- Щербаков Ю.Н., Якунин А.Н., Ярославский И.В., Тучин В.В. *Оптика и спектроскопия*, **76** (5), 845 (1994).
- Choi B., Welch A.J. *Lasers Surg. Med.*, **29**, 351 (2001).
- Loze M.K., Wright C.D. *Appl. Opt.*, **36** (2), 494 (1997).
- Loze M.K., Wright C.D. *Appl. Opt.*, **37** (28), 6822 (1998).
- Welch A.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **20** (12), 1471 (1984).
- McKenzie A.L. *Phys. Med. Biol.*, **35** (9), 1175 (1990).
- Barun V.V., Ivanov A.P. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46** (17), 3243 (2003).
- Барун В.В., Иванов А.П. *Наука и инновации*, (3–4), 37 (2003).
- Тучин В.В. *Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях* (Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 1998).
- Barun V.V., Ivanov A.P. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **5149**, 96 (2003).
- Welch A.J., Wissler E.H., Priebe L.A. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **27** (3), 164 (1980).
- Nilsson A.M.K., Lucassen G.W., Verkruysse W., Anderson-Engels S., van Gemert M.J.C. *Photochem. Photobiol.*, **65** (2), 366 (1997).
- Laufer J., Simpson R., Kohl M., Essenpreis M., Cope M. *Phys. Med. Biol.*, **43**, 2479 (1998).
- Nilsson A.M.K., Sturesson C., Liu D.L., Anderson-Engels S. *Appl. Opt.*, **37** (7), 1256 (1998).
- Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. *Перенос изображения в рассеивающей среде* (Минск: Наука и техника, 1985).
- Гершун А.А. *Труды ГОИ*, **11** (99), 43 (1936).
- Барун В.В., Дик В.П., Иванов А.П. В сб.: *Мат. Межд. конф. «Лазерная физика и применения лазеров»*. Под ред. Н.С.Казака и др. (Минск: ИФ НАНБ, 2003, с. 269).
- Van Gemert M.J., Lucassen G.W., Welch A.J. *Phys. Med. Biol.*, **41**, 1381 (1996).
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции* (М.: Наука, 1983, с. 186).
- Pennes H.H. *J. Appl. Physiol.*, **1**, 93 (1948).
- Weinbaum S., Jiji L.M. *J. Biomech. Eng.*, **107**, 131 (1985).
- Mooiibroek J., Lagendijk J.J.W. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **38**, 490 (1991).
- Crezee J., Lagendijk J.J.W. *Phys. Med. Biol.*, **37**, 1321 (1992).
- Абрамовиц М., Стиган И. (Ред.) *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979, с. 57).