

Особенности самофокусировки пучков эллиптического сечения

В.П.Кандидов, В.Ю.Фёдоров

Численно исследована стационарная самофокусировка коллимированных гауссовых пучков эллиптического сечения. Показано, что критическая мощность самофокусировки повышается с ростом отношения полуосей a/b первоначального эллиптического сечения. Самофокусировка сопровождается осцилляциями поперечных размеров пучка, обусловленных конкуренцией дифракционной расходимости и нелинейного сжатия. При увеличении мощности пучка с отношением полуосей $a/b \geq 3$ происходит абберационная самофокусировка, при которой, после первоначального образования и конкуренции нескольких максимумов интенсивности в сечении пучка, выделяется глобальный максимум в центре, формирующий нелинейный фокус. Аппроксимационная формула для расстояния самофокусировки обобщена на пучки эллиптического сечения.

Ключевые слова: самофокусировка, эллиптические пучки, критическая мощность, расстояние самофокусировки, абберационная самофокусировка, вариационно-разностная схема.

1. Состояние исследований

Лазерные пучки эллиптического сечения давно привлекают внимание исследователей как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. В настоящее время интерес к задаче о самовоздействии эллиптических пучков связан с быстро развивающейся нелинейной оптикой фемтосекундного лазерного излучения [1–3]. При распространении фемтосекундных импульсов с мощностью, превышающей критическую мощность самофокусировки в среде, образуются протяженные филаменты, в которых концентрируется значительная часть энергии падающего излучения [4, 5]. В атмосфере длина филаментов, создаваемых импульсами Ti:сапфирового лазера, достигает сотен метров, их диаметр составляет 100 мкм, интенсивность светового поля в филаменте равна $\sim 10^{13}$ Вт \times см $^{-2}$, ширина частотного спектра простирается от 0.5 до 3 мкм [6, 7]. Формирование импульса суперконтинуума при распространении мощных фемтосекундных лазерных импульсов в воздухе делает возможным широкополосное лазерное зондирование и экологический мониторинг окружающей среды [1].

В импульсах тераваттной мощности образуется пучок филаментов, которые зарождаются вследствие пространственной неустойчивости интенсивного светового поля в среде с кубической нелинейностью [8]. Возмущения интенсивности и фазы светового поля в поперечном сечении импульса, обусловленные качеством пучка на выходе лазерной системы и флуктуациями показателя преломления в воздушной среде, приводят к пространственной хаотизации пучка филаментов [9]. Сигналы

флуоресценции и обратного рассеяния компонентов воздушной среды оказываются нерегулярными, что осложняет практическое применение фемтосекундного лазерного излучения в системах лазерного зондирования. В связи с этим проблема регуляризации процесса образования филаментов в фемтосекундном импульсе тераваттной мощности является весьма актуальной.

Можно ожидать, что использование импульсов со специальным распределением интенсивности на выходе лазерной системы позволит упорядочить образование многих филаментов при распространении импульса в реальных условиях. Одно из таких распределений имеют эллиптические пучки.

Впервые самофокусировка эллиптических пучков была исследована вариационным методом в [10]. В рамках безабберационного приближения из условия стационарности лагранжиана для светового поля в среде с кубической нелинейностью записана система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение амплитуды поля и размеров полуосей эллиптического сечения пучка при изменении расстояния. В результате аналитического исследования этой системы уравнений получена оценка критической мощности самофокусировки P_{cr}^{est} для эллиптического пучка:

$$P_{cr}^{est} = 2 \frac{a^2 + b^2}{ab} \frac{\pi n_0}{2k^2 n_2}, \quad (1)$$

где a, b – полуоси эллиптического сечения, определяемые по уровню e^{-1} профиля интенсивности; k – волновое число; n_0 – показатель преломления; n_2 – коэффициент нелинейности. Результаты вариационного анализа и экспериментального исследования самофокусировки эллиптических пучков обсуждаются в обзорной работе [11]. Численное моделирование самофокусировки пучков эллиптического сечения позволило уточнить критическую мощность самофокусировки [12].

В.П.Кандидов, В.Ю.Фёдоров. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 20 апреля 2004 г., после доработки – 23 августа 2004 г.

С 1990-х годов интерес к теоретическим исследованиям самофокусировки эллиптических пучков возобновился. В [13] проведен анализ решений, найденных приосевым методом [14] в рамках безабберационного приближения, при котором распределение поля в поперечном сечении остается близким к гауссову (см. (2)), и предложена некоторая классификация режимов распространения пучка в зависимости от соотношения его параметров. Безабберационное приближение использовано в [15], где численно решена система уравнений относительно параметров гауссова пучка, полученных изложенным в [10] вариационным методом. Утверждается, что режим самоканализирования эллиптического пучка невозможен, поскольку при постоянной величине эффективного радиуса пучка $[a^2(z) + b^2(z)]^{1/2}$ происходят незатухающие осцилляции длин его полуосей $a(z)$ и $b(z)$ в процессе распространения.

Детальный анализ безабберационного приближения при применении приосевого и вариационного методов выполнен в [16]. Показано, что аппроксимации, используемые в этих подходах, приводят к существенным отклонениям получаемых решений от результатов численного моделирования. При большой эллиптичности начального распределения интенсивности излучения в пучке возможно образование колец в плоскости поперечного сечения; непосредственно перед нелинейным фокусом эллиптический пучок трансформируется в круговой.

В работе [17] для пучков с небольшой эллиптичностью ($a/b < 2.5$) численно определена критическая мощность самофокусировки P_{cr} и для нее получена эмпирическая формула. Показано, что коллапс эллиптического пучка охватывает не весь пучок в целом, а некоторую область его поперечного сечения, в которой непосредственно перед нелинейным фокусом формируется осесимметричный профиль, близкий к моде Таунса [18]. Увеличение критической мощности самофокусировки для пучков с начальным профилем, отличающимся от таунсовой моды, авторы работы [19] объясняют растеканием мощности пучка вне области коллапса.

В настоящей работе численно исследована стационарная самофокусировка эллиптических пучков в широких диапазонах значений мощности и соотношений полуосей их поперечного сечения с целью изучения особенностей формирования нелинейных фокусов в таких пучках и получения аппроксимационных формул для практического расчета критической мощности и длины самофокусировки эллиптических пучков.

2. Постановка задачи

Распределение амплитуды поля в поперечном сечении коллимированного эллиптического пучка таково:

$$E(x, y, z = 0) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right). \quad (2)$$

В скалярном приближении комплексная амплитуда $E(x, y, z)$ при стационарной самофокусировке описывается уравнением

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{2k^2}{n_0} n_2 |E|^2 E. \quad (3)$$

Численное исследование трехмерной задачи (2), (3) о самофокусировке пучка вызывает значительные трудности, связанные с тем, что в плоскости его поперечного сечения многократно изменяются масштабы локализации светового поля и возникают сильные градиенты фазы. Для адекватного воспроизведения таких изменений светового поля необходима расчетная сетка с мелким шагом, что приводит к чрезмерному увеличению вычислительных затрат. В пучках с большой эллиптичностью вычислительные трудности усугубляются значительным различием поперечных масштабов a и b начального распределения светового поля (2). Для преодоления этих трудностей в настоящей работе используется эффективный вычислительный метод (см. Приложение) на основе неоднородной сетки в плоскости поперечного сечения XY .

Неоднородная сетка состоит из приосевой области с равномерным мелким шагом h_0 пространственного разбиения и периферийной области, в которой шаг сетки h_m медленно нарастает в соответствии с выражением

$$h_{m+1} = h_m(1 + \varepsilon), \quad (4)$$

где ε – параметр нарастания, много меньший единицы; $m = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$ – номер шага; N – число шагов. Физическое основание для применения такой неоднородной сетки в исследовании самофокусировки состоит в том, что коллапс светового поля, проявляющийся в возникновении больших пространственных градиентов нелинейного набега фазы и в лавинном нарастании интенсивности, происходит в приосевой области пучка, где необходим мелкий шаг разбиения. На периферии, где изменения интенсивности и фазы светового поля, обусловленные в основном дифракцией, невелики, шаг сетки может быть значительно больше.

3. Критическая мощность самофокусировки

Серия численных экспериментов, выполненных при различных значениях мощности P и отношения полуосей a/b первоначального эллиптического сечения, позволила определить критическую мощность самофокусировки P_{cr} эллиптических пучков. Для анализа влияния отношения a/b на P_{cr} выражение для нее удобно представить в следующем виде:

$$P_{cr}(a/b) = R_{cr}(a/b) \frac{\pi n_0}{2k^2 n_2}, \quad (5)$$

где $R_{cr}(a/b)$ – критический параметр нелинейности. Заметим, что для кругового гауссова коллимированного пучка критический параметр нелинейности $R_{cr}(a/b = 1) = 3.77$ [11]; наименьшую мощность самофокусировки с параметром нелинейности $R_{cr}^{Town}(a/b = 1) = 3.72$ имеет круговой пучок, у которого распределение интенсивности в плоскости поперечного сечения совпадает с модой Таунса [18]. Приосевой метод с безабберационным приближением [14] дает сильно заниженную оценку параметра нелинейности, согласно которой для кругового пучка $R_{cr}^{parax}(a/b = 1) = 1$.

На рис.1 представлена зависимость критического параметра нелинейности R_{cr} от соотношения полуосей a/b , полученная по результатам численного моделирования. С увеличением отношения полуосей a/b критическая

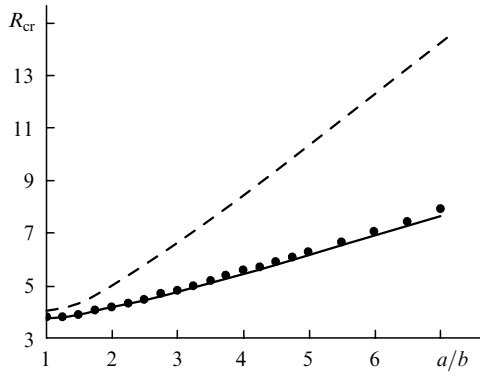


Рис.1. Зависимости критического параметра нелинейности R_{cr} от отношения полуосей a/b первоначального эллиптического сечения гауссова коллимированного пучка: точки – численное моделирование, штриховая кривая – вариационная оценка R_{cr}^{est} (1); сплошная кривая – эмпирическая формула (6).

мощность самофокусировки P_{cr} повышается, что объясняется возрастающим отличием эллиптического распределения интенсивности от моды Таунса. Здесь же показана зависимость для параметра нелинейности R_{cr}^{est} , соответствующего критической мощности, рассчитанной вариационным методом в рамках безабберационного приближения [10]. Видно, что вариационный метод с безабберационным приближением дает завышенную оценку критической мощности самофокусировки эллиптического пучка. При этом с ростом отношения полуосей a/b увеличивается отклонение вариационной оценки R_{cr}^{est} от величины R_{cr} , полученной численно. Численные значения параметра $R_{cr}(a/b)$ удовлетворительно аппроксимируются эмпирической зависимостью, предложенной в [17]:

$$R_{cr}(a/b) \approx \left[0.4 \frac{a/b + b/a}{2} + 0.6 \right] R_{cr}(a/b = 1). \quad (6)$$

4. Осцилляции поперечных размеров пучка и поток мощности

Самофокусировка пучков эллиптического сечения гауссова профиля сопровождается периодическим изменением его поперечных размеров. При $P > P_{cr}$ осцилляции полуосей с расстоянием происходят на фоне сжатия пучка, при $P < P_{cr}$ размеры полуосей осциллируют одновременно с уширением пучка. В качестве примера на рис.2 для пучка с первоначальным отношением полуосей $a/b = 2$ приведены окна с тоновыми картинами распределения интенсивности $I(x, y)/I_0$ в поперечном сечении на ряде расстояний z при мощности $P = 2P_{cr}(a/b = 2)$. Масштабом $L_{||}$ для продольной координаты z служит величина, характеризующая линейную дифракцию пучка эллиптического сечения: $L_{||} = kab$.

Из рис.2 видно, что пучок, у которого горизонтальный размер превышает вертикальный ($z = 0.16L_{||}$), становится сначала близким к круговому ($z = 0.64L_{||}$), а затем горизонтальный размер становится меньше вертикального ($z = 0.96L_{||}$), причем этот процесс сопровождается сжатием пучка в целом.

В плоскости поперечного сечения поток мощности, приводящий к ее локализации на оси пучка, не является осесимметричным, и направление потока в некоторых областях поперечного сечения пучка в процессе самофокусировки меняется. Это наглядно подтверждают распределения градиента фазы $\varphi(x, y)$ светового поля. На границах окон рис.2 приведены графики для величин φ^* , определяющих направление потока мощности ($(\partial\varphi/\partial x) \text{sign} x$ и $(\partial\varphi/\partial y) \text{sign} y$), которые вычислялись при $y = 0$ и $x = 0$ соответственно. В начале самофокусировки ($z = 0.16L_{||}$) поток мощности в приосевой области содержит компоненты, направленные к центру пучка. Вне этой области мощность вдоль короткой полуоси, где проявле-

*Заметим, что выбор масштаба $L_{||}$ произволен, и в качестве такового могут быть взяты, например, дифракционные длины кругового пучка ka^2 и kb^2 , длина нелинейности $n_0/(2kn_2|E_0|^2)$ и т. п.

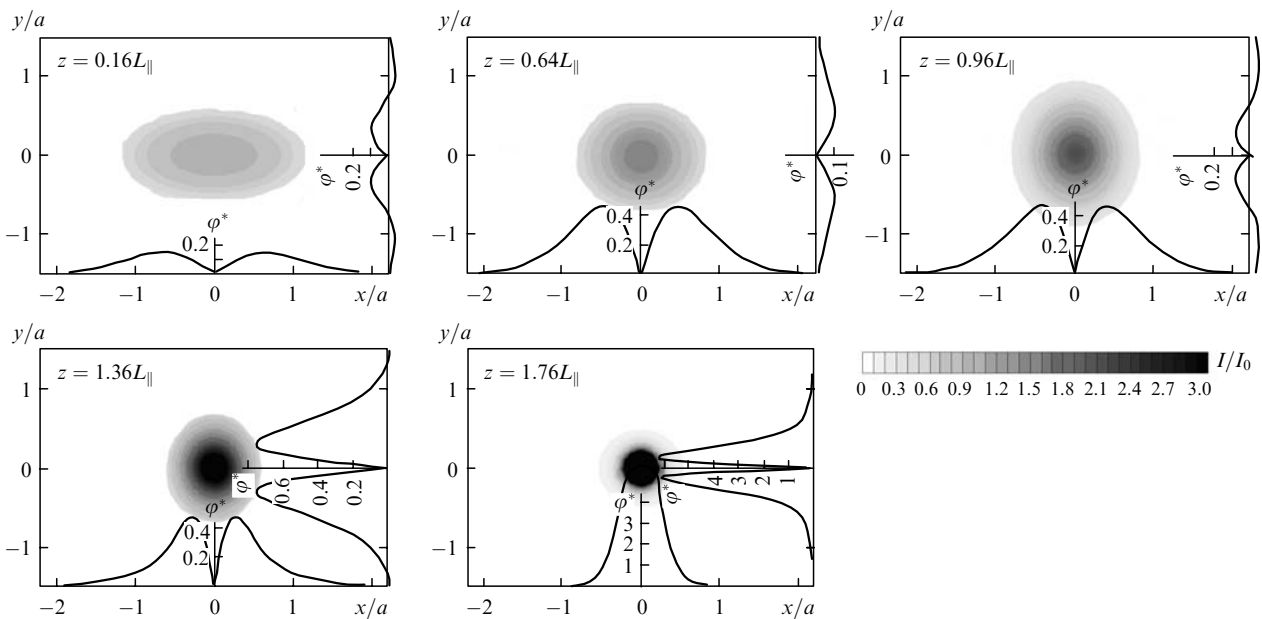


Рис.2. Тоновые картины распределения интенсивности $I(x, y)/I_0$ в сечении пучка (внутри окон) и графики градиентов фазы $(\partial\varphi/\partial x) \text{sign} x|_{y=0}$ и $(\partial\varphi/\partial y) \text{sign} y|_{x=0}$ (на границах окон) на разных расстояниях z при безабберационной самофокусировке пучка с первоначальным соотношением полуосей $a/b = 2$ и мощности $P = 2P_{cr}$. Расстояние z приведено в единицах продольного масштаба $L_{||} = kab$; φ^* дано в радианах.

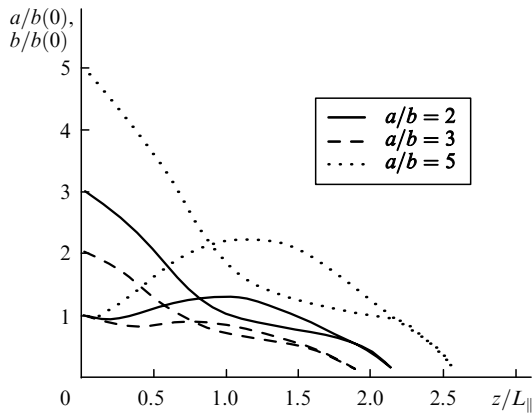


Рис.3. Изменение с расстоянием z поперечных размеров пучка a и b с первоначальным соотношением полуосей $a/b = 2, 3$ и 5 при $P = 1.2P_{cr}(a/b)$.

ние дифракции сильнее, «перетекает» на периферию пучка. При $z = 0.64L_{\parallel}$ дифракционная расходимость по вертикальной полуоси становится преобладающей и происходит отток мощности светового поля от центра пучка. Размер пучка в этом направлении возрастает, и на расстоянии $z = 0.96L_{\parallel}$ вертикальная полуось эллиптического сечения становится больше горизонтальной. При этом, как показывает анализ, мощность «перетекает» в окрестности центра, где пучок принимает форму, близкую к осесимметричной. В дальнейшем ($z = 1.36L_{\parallel}$) мощность в приосевой области стягивается к центру пучка по обоим направлениям. На расстоянии $z = 1.76L_{\parallel}$ поток мощности к центру пучка стремительно возрастает, формируя нелинейный фокус с осесимметричным распределением интенсивности.

На рис.3 приведены зависимости от расстояния поперечных размеров сечения пучка, определяемых по уровню e^{-1} , которые получены при ряде соотношений полуосей первоначально эллиптического сечения a/b и мощности пучка $P = 1.2P_{cr}(a/b)$. Видно, что при одном и том же относительном превышении критической мощности $P_{cr}(a/b)$ амплитуда осцилляций размеров полуосей увеличивается с ростом отношения a/b в первоначальном эллиптическом сечении пучка. Осцилляции поперечных размеров эллиптического пучка являются следствием конкуренции дифракционной расходимости и нелинейного сжатия и зависят от соотношения полуосей первоначального сечения пучка и его мощности.

5. Аберрационная самофокусировка

Поперечные размеры пучка однозначно определяют его профиль в условиях безабберационной самофокусировки в виде (2). Вместе с тем характер трансформации профиля пучка зависит от его мощности и эллиптичности первоначального распределения интенсивности. С увеличением мощности P эллиптического пучка возникают аберрационные искажения его профиля. Так, в пучке с $a/b = 5$ при $P = 10P_{cr}$ пучок остается унимодальным, но его профиль существенно отличается от гауссова.

При $P = 25P_{cr}$ в таком пучке происходит сложное перераспределение плотности мощности в его поперечном сечении (рис.4). Сильное нелинейное сжатие пучка вдоль короткой полуоси, опережающее самофокусировку в перпендикулярном направлении, вызывает на профиле пучка образование перетяжки в эллиптическом сечении ($z = 0.045L_{\parallel}$). Мощность не успевает «перетечь» к центру по длинной полуоси сечения и, вследствие дифракционной расходимости в поперечном направлении, пучок распадается ($z = 0.06L_{\parallel}$). В результате образуются два максимума на большей оси, которые нарастают, черпая мощность из прилежащей к ним области. Достигнув интенсивности, приблизительно в 10 раз превышающей начальную, они перестают расти ($z = 0.07L_{\parallel}$). Одновременно с этим на меньшей полуоси начинают образовываться еще два максимума. Поток мощности, направленный к этим максимумам, вызывает увеличение их интенсивности и одновременно истощает ранее образовавшиеся максимумы на большей полуоси ($z = 0.085L_{\parallel}$). В дальнейшем нарастающие максимумы сливаются в один (центральный), вокруг которого остается сложное распределение плотности мощности без осевой симметрии ($z = 0.096L_{\parallel}$). С ростом z на оси пучка формируется один максимум, образуя нелинейный фокус, и часть мощности остается на его периферии.

6. Расстояние самофокусировки

Несмотря на аберрационный характер трансформации профиля первоначально эллиптического пучка в процессе самофокусировки, происходит формирование одного глобального осесимметричного максимума, в котором распределение интенсивности близко к моде Таунса [18]. В дальнейшем из этого максимума образуется нелинейный фокус. При численных исследованиях в при-

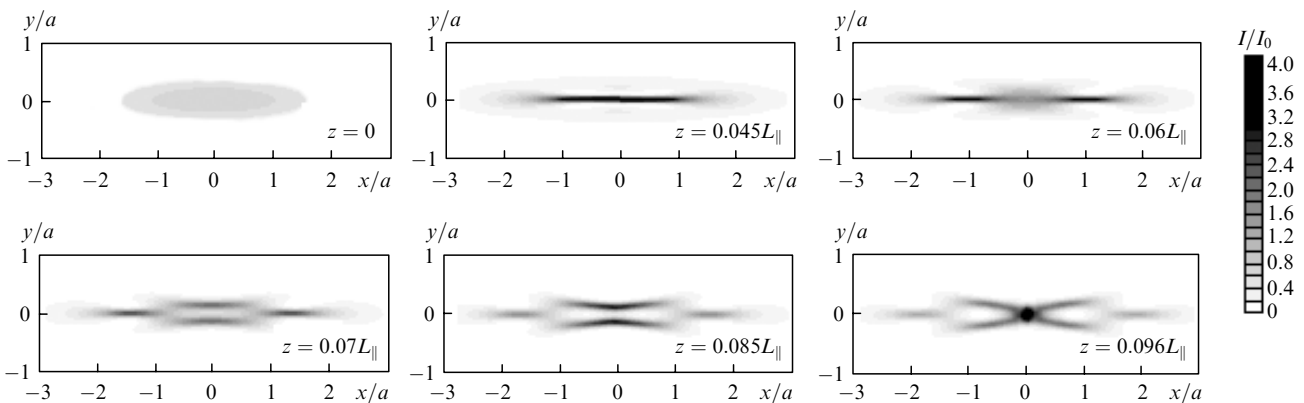


Рис.4. Тоновые картины распределения интенсивности $I(x, y)/I_0$ в сечении пучка на разных расстояниях z при аберрационной самофокусировке пучка с первоначальным отношением полуосей $a/b = 5$ и мощности $P = 25P_{cr}$. Расстояние z приведено в единицах продольного масштаба $L_{\parallel} = kab$.

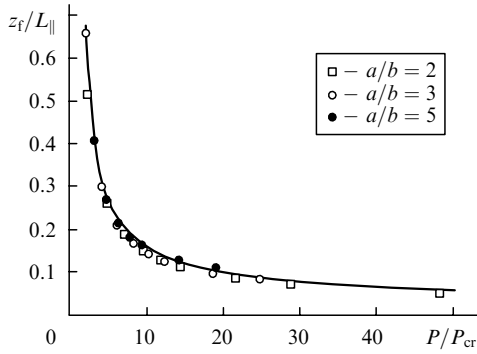


Рис.5. Зависимости длины самофокусировки z_f/L_{\parallel} эллиптического пучка при разных отношениях полуосей a/b от его относительной мощности P/P_{cr} ; кривая – аппроксимационная формула (7).

ближении метода медленно меняющихся амплитуд можно оценить длину самофокусировки z_f как расстояние, на котором распределение интенсивности в глобальном максимуме становится осесимметричным и его величина более чем на два-три порядка превышает первоначальную. Погрешность такой оценки z_f невелика, поскольку интенсивность в максимуме лавинно нарастает с приближением к нелинейному фокусу.

На рис.5 приведена длина самофокусировки z_f эллиптических пучков для ряда соотношений полуосей a/b первоначального сечения и различной мощности P . Видно, что найденные значения z_f , независимо от отношения полуосей a/b первоначального эллиптического сечения и относительной мощности P/P_{cr} (a/b), принадлежат одной зависимости: $z_f = z_f(P/P_{cr})$. Методом наименьших квадратов получена аппроксимационная формула для зависимости длины самофокусировки z_f эллиптического пучка с отношением полуосей a/b от его продольного масштаба $L_{\parallel} = kab$ и мощности P , отнесенной к критической мощности P_{cr} (a/b) для такого пучка:

$$z_f = 0.367L_{\parallel} \left\{ \left[\left(\frac{P}{P_{cr}(a/b)} \right)^{1/2} - 0.852 \right]^2 - 0.0219 \right\}^{-1/2}. \quad (7)$$

Зависимость (7) для длины самофокусировки z_f является обобщением на пучки эллиптического сечения известной формулы Марбургера [11] для круговых пучков. В этой формуле продольный масштаб L_{\parallel} совпадает с дифракционной длиной $L_{\parallel} = ka^2$, а критическая мощность P_{cr} ($a/b = 1$) определяется формулой (5) с $R_{cr}(a/b = 1) = 3.77$. Интересно отметить, что полученная зависимость (7) применима как при безабберационной самофокусировке пучка, так и в случае ярко выраженного абберационного характера изменения его профиля при самофокусировке. Ошибка обобщенной формулы (7) во всем рассмотренном диапазоне изменения мощности и соотношения полуосей эллиптического сечения пучка не превышает 10 % при $P \geq P_{cr}$ и возрастает до 35 % при $P \approx 1.2P_{cr}$.

7. Выводы

1. Критическая мощность самофокусировки эллиптических пучков P_{cr} возрастает с увеличением отношения полуосей a/b первоначального распределения интенсивности в поперечном сечении. Вариационный метод с безабберационным приближением дает завышенную оценку критической мощности самофокусировки. При этом от-

носительное отклонение вариационной оценки от результатов численного моделирования возрастает с увеличением соотношения полуосей эллиптического распределения интенсивности.

2. Распространение эллиптических пучков в среде с кубической нелинейностью сопровождается осцилляциями их поперечных размеров, которые происходят на фоне дифракционной расходимости при $P < P_{cr}$ или нелинейного сжатия при $P > P_{cr}$. Амплитуда осцилляций растет с увеличением a/b . Осцилляции полуосей вызваны конкуренцией дифракции и самофокусировки и являются следствием «перетекания» мощности в плоскости поперечного сечения, в результате чего формируется глобальный максимум с профилем, близким к моде Таунса.

3. С увеличением отношения полуосей a/b эллиптического сечения и мощности пучка P его самофокусировка имеет абберационный характер. В поперечном сечении пучка существует конкуренция между образующимися максимумами интенсивности, что приводит к их взаимному подавлению, возникновению новых максимумов и, наконец, к формированию нелинейного фокуса в центре пучка.

4. Длина самофокусировки z_f эллиптического пучка с отношением полуосей a/b первоначального распределения интенсивности зависит от его продольного масштаба $L_{\parallel} = kab$ и мощности P , отнесенной к критической мощности самофокусировки P_{cr} пучка с таким отношением a/b , и может быть рассчитана по аппроксимационной формуле, которая является обобщением на эллиптический случай выражения, полученного в [11] для круговых пучков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-16939), Европейского офиса по научным исследованиям армии США (контракт № N62558-04-P-6051) и гранта CRDF GAP (№ RPO-1390-TO-03).

Приложение

Вариационно-разностный метод

Неоднородная сетка не позволяет использовать спектральный метод с алгоритмом быстрого преобразования Фурье, поэтому для построения консервативной разностной схемы на неоднородной сетке использован вариационный метод [20]. Построение вариационно-разностной схемы на однородной сетке и анализ ее точности даны в [21].

Вариационно-разностная схема построена применительно к процедуре расщепления, согласно которой решение уравнения (3) на шаге Δz интегрирования по оси z заменяется последовательным решением двумерных задач дифракции в линейной среде сначала в плоскостях, параллельных XZ , затем в плоскостях, параллельных YZ . После этого вычисляется нелинейный набег фазы светового поля на том же интервале Δz в отсутствие дифракции.

Решение задачи дифракции эквивалентно поиску амплитуды $E(x, y, z)$, на которой лагранжиан $L[E, E^*]$ достигает минимума [22]. В случае дифракции в плоскости YZ на интервале (z_j, z_{j+1}) лагранжиан имеет следующий вид [10, 21]:

$$L[E, E^*] = \int_{z_j}^{z_{j+1}} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[2ik \left(\frac{\partial E}{\partial z} E^* - \frac{\partial E^*}{\partial z} E \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial E^*}{\partial x} \Big]. \quad (\text{П1})$$

В вариационно-разностном методе, как и в методе конечных элементов [23], амплитуда $E(x, z)$, минимизирующая функционал $L[E, E^*]$, представляется совокупностью функций, определенных на ячейках сетки. В первом слагаемом подынтегрального выражения в (П1) амплитуда $E(x, z)$ полагается постоянной в ячейках сетки и равной узловому значению $E_m(z)$:

$$E(x, z) = E_m(z). \quad (\text{П2})$$

Во втором слагаемом в (П1) амплитуда $E(x, z)$ меняется линейно между узлами сетки:

$$E(x, z) = (E_{m+1}(z)) - E_m(z) \frac{x - x_m}{h_{m+1}} + E_m(z), \quad (\text{П3})$$

$$x \in [x_m, x_{m+1}],$$

где x_m – координата m -го узла. При подстановках (П2), (П3) в (П1) осуществляется аппроксимация одного и того же порядка по координате x для всех слагаемых лагранжиана. После замены правой части в (П1) суммой интегралов по областям определения амплитуды $E(x, z)$ на расчетной сетке функционал выражается билинейной формой $L[E_m, E_m^*]$ относительно значений в узлах E_m, E_m^* . Из условия минимизации функционала $\delta L_{E_m^*}[E_m, E_m^*] = 0$ на множестве $\{E_m^*, m = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2\}$ следует система дифференциально-разностных уравнений относительно комплексной амплитуды поля $E_m(z)$:

$$2ik \frac{h_{m+1} + h_m}{2} \frac{\partial E_m(z)}{\partial z} = \frac{E_{m+1}(z)}{h_{m+1}} - \left(\frac{1}{h_{m+1}} + \frac{1}{h_m} \right) E_m(z) + \frac{E_{m-1}(z)}{h_m}, \quad z \in [z_s, z_{s+1}]. \quad (\text{П4})$$

На границе расчетной сетки $m = -N/2, N/2$, амплитуды поля $E_{-N/2}$ и $E_{N/2}$ полагаются равными нулю. Аналогично записываются дифференциально-разностные уравнения для задачи дифракции в плоскостях, параллельных YZ .

Для интегрирования по переменной z на интервале (z_s, z_{s+1}) дифференциально-разностных уравнений дифракции в плоскостях, параллельных XZ и YZ , используется метод Кранка – Николсона [20]. Нелинейный набег фазы на интервале (z_s, z_{s+1}) вычисляется в приближении заданной интенсивности. Шаг интегрирования Δz составляет $0.01kab$ в начале распространения и затем адаптивно уменьшается вдвое, если на некотором шаге $\Delta z = z_{s+1} - z_s$ максимальный набег нелинейной фазы превышает $\pi/100$. При мощности $P \sim 24P_{cr}$ шаг интегрирования по z в конце распространения уменьшается в 2^4 раз. Численное моделирование самофокусировки пучка осуществляется до плоскости z_s , в которой максимальная интенсивность в поперечном сечении пучка в 100 раз превышает начальную пиковую интенсивность I_0 . Расчетная область в плоскости XU имеет вид квадрата со стороной $8a$.

Точность численного моделирования самофокусировки контролируется по отклонениям интегралов движения – мощности P и гамильтониана H светового пучка.

При $P > P_{cr}$ относительное отклонение $\Delta P/P$ не превышает 0.05 % во всем диапазоне рассматриваемых параметров, а при $P > 2P_{cr}$ относительное отклонение гамильтониана $\Delta H/H$ составляет 1 % – 2 %. С уменьшением мощности пучка до $P = (1.2 - 2)P_{cr}$ абсолютная величина гамильтониана $|H|$ падает, и его относительное отклонение при вычислениях увеличивается до 15 %. При $P \sim P_{cr}$ пучок медленно сжимается или расходится с расстоянием, что приводит к накоплению вычислительной ошибки.

Использование неравномерной сетки позволяет сократить размерность обрабатываемых массивов и, следовательно, вычислительные затраты. Анализ вычислительных схем на сетках с приосевой областью равномерного шага, изменяющейся от $0.25a$ до $1.5a$, величины шага h_0 ($0.005a - 0.1a$) и параметра его нарастания ε ($0.005 - 0.1$) показал, что наименьшие вычислительные затраты без существенной потери точности достигаются при $h_0 = 0.01a$, $\varepsilon = 0.01$ и области равномерного шага, равной $1a$. При этом отклонение гамильтониана от значений в тестовых расчетах на однородной сетке высокой размерности (1000×1000) не превышало 1 %. Оценки показывают, что при выбранных параметрах расчетной сетки размерность вычислительных массивов сокращается в четыре и более раз по сравнению с традиционными однородными сетками.

1. Kasparian J., Rodriguez M., Méjean G., Yu J., Salmon E., Wille H., Bourayou R., Frey S., André Y.-B., Mysyrowicz A., Sauerbrey R., Wolf J. P., Wöste L. *Science*, **301**, 61 (2003).
2. Bergé L., Skupin S., Lederer F., Méjean G., Yu J., Kasparian J., Salmon E., Wolf J. P., Rodriguez M., Wöste L., Bourayou R., Sauerbrey R. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 225002 (2004).
3. Кандидов В.П., Косарева О.Г., Можаяев Е.И., Тамаров М.П. *Оптика атмосферы и океана*, **13**, 429 (2000).
4. Nibberling E.T.J., Curleg P.F., Grillon G., Prade B.S., Franco M.A., Salin F., Mysyrowicz A. *Opt. Lett.*, **21**, 62 (1996).
5. Kandidov V.P., Kosareva O.G., Golubtsov I.S., Liu W., Becker A., Akozbek N., Bowden C.M., Chin S.L. *Appl. Phys. B*, **77**, 149 (2003).
6. Kasparian J., Sauerbrey R., Chin S. L. *Appl. Phys. B*, **71**, 877 (2000).
7. Rairoux P., Schillinger H., Niedermeier S., Rodriguez M., Ronneberger F., Sauerbrey R., Stein B., Waite D., Wedekind C., Wille H., Wöste L., Ziener C. *Appl. Phys. B*, **71**, 573 (2000).
8. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. В сб. *Нелинейная оптика* (Новосибирск: Наука, 1968, с. 428 – 463).
9. Liu W., Hosseini S.A., Luo Q., Ferland B., Chin S.L., Kosareva O.G., Panov N. A., Kandidov V.P. *New J. Phys.*, **6**, 6 (2004).
10. Воробьев В.В. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **13**, 1905 (1970).
11. Marburger J.H., in *Prog. Quantum Electron.* (Great Britain: Pergamon Press, 1975, Vol. 4, p. 35).
12. Егоров К.Д., Кандидов В.П. *Вестник московского ун-та. Сер. Физика, астрономия*, **19**, 70 (1978).
13. Cornolty F., Lucchesi M., Zambon B. *Opt. Commun*, **15**, 129 (1990).
14. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. *УФН*, **93**, 19 (1967).
15. Tarsem Singh, Nareshpal Saini, Shyam Sunder Kaul. *Pramana J. Phys.*, **55**, 423 (2000).
16. Gross B., Manassah J.T. *Phys. Lett. A*, **169**, 371 (1992).
17. Fibich G., Ilan B. *Opt. Soc. Am. B*, **17**, 1749 (1999).
18. Chiao R., Garmire E., Townes C. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 479 (1964).
19. Fibich G., Gaeta A.L. *Opt. Lett.*, **25**, 335 (2000).
20. Калиткин Н.Н. *Численные методы* (М.: Наука, 1978, с. 512).
21. Егоров К.Д., Кандидов В.П., Леденев В.И. *Журн. выч. мат. и мат. физ.*, **22**, 382 (1982).
22. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике* (М.: Наука, 1970, с. 512).
23. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике* (М.: Мир, 1975, с. 541).