

Периодические последовательности импульсов в нелинейных волоконных световодах при учёте дисперсии групповых скоростей третьего порядка

В.А.Алешкевич, В.А.Выслоух, С.В.Горин, А.С.Жукарев, Я.В.Карташов

Исследован новый класс стационарных периодических решений нелинейного волнового уравнения Шрёдингера с учётом дисперсии групповых скоростей третьего порядка, проанализированы их основные свойства и области существования. Показана возможность формирования периодической последовательности импульсов с высоким контрастом и большой частотой повторения вблизи точки нулевой дисперсии групповых скоростей второго порядка.

Ключевые слова: кубическая дисперсия, кноидальные волны, волоконные световоды.

Предметом статьи являются теоретический анализ и компьютерное моделирование формирования и распространения периодических нелинейных волн кноидального типа вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости в плавленом кварце ($\lambda_0 \simeq 1.27$ мкм), когда существенен вклад кубической дисперсии. Интерес к исследованию влияния кубической дисперсии на распространение уединённых импульсов солитонного типа [1] возник почти сразу же после первых успешных экспериментов с оптическими солитонами [2]. Он был также стимулирован развитием систем волоконно-оптической связи, т. к. смещение рабочей длины волны к нулевой точке материальной дисперсии позволяет заметно снизить требования к мощности передаваемых сигналов. Хорошей альтернативой является смещение длины волны нулевой дисперсии в область минимума потерь ($\lambda_{\min} = 1.55$ мкм), возможное за счёт специально спроектированного профиля показателя преломления световода.

Было установлено, что вследствие влияния кубической дисперсии унимодальный спектр импульса, первоначально центрированный на длине волны λ_0 , при распространении по волоконному световоду распадается на два кластера. Первый из этих кластеров расположен в области аномальной дисперсии групповой скорости ($\lambda \geq \lambda_0$) и соответствует относительно устойчивому импульсу солитонного типа. Второй спектральный кластер ($\lambda \leq \lambda_0$), относящийся к области нормальной дисперсии групповой скорости, во временном представлении соответствует расплывающемуся пьедесталу. Динамическая интерференция разнесённых по частоте спектральных кластеров порождает осцилляции огибающей импульса. Была также предпринята попытка найти форму симметричного стационарного импульса солитонного типа чис-

ленно [3], но вскоре выяснилось, что подобные импульсы хотя и весьма слабо, но непрерывно теряют энергию [4]. Далее были найдены нетривиальные решения в виде бимодальных импульсов – разнесённых во времени солитонных пар, способных к безызлучательному распространению [5]. Впоследствии эти интересные результаты были обобщены на случай нескольких связанных импульсов [6].

В настоящей работе мы рассматриваем распространение не уединённых солитонных пар, а так называемых кноидальных волн, возможность существования которых следует из решения нелинейного уравнения Шрёдингера. С практической точки зрения кноидальные волны являются прекрасной моделью импульсных последовательностей с варьруемыми частотой повторения и степенью локализации энергии, а с теоретической – заполняют пробел между уединёнными солитонными импульсами и простыми гармоническими волнами. Различные аспекты самовоздействия однокомпонентных и многокомпонентных кноидальных волн обсуждались в недавно опубликованных работах [7–11].

Целями настоящей работы являются исследование условий существования кноидальных волн сп- и dp-типов, анализ влияния кубического вклада в дисперсию на их профили и дисперсионные характеристики, а также предварительное исследование устойчивости этих волн. Технически сложный детальный анализ устойчивости будет представлен в отдельной работе.

Математическое описание базируется на нелинейном уравнении шрёдингеровского типа для безразмерной медленно меняющейся комплексной амплитуды электрического поля световой волны $q(\eta, \xi)$:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - |q|^2 q + i \epsilon \frac{\partial^3 q}{\partial \eta^3}, \quad (1)$$

где $\eta = (t - z/v_{gr})/\tau_0$ – бегущее время, нормированное на характерный временной масштаб τ_0 ; $v_{gr} = (\partial k / \partial \omega)_{\omega=\omega_0}^{-1}$ – групповая скорость; k – волновое число; ω_0 – несущая частота; $\xi = z/L_{dis}^{(2)}$ – продольная координата, нормированная на дисперсионную длину второго порядка $L_{dis}^{(2)} = \tau_0^2 / |\beta_2|$; $\beta_2 = (\partial^2 k / \partial \omega^2)_{\omega=\omega_0}$. Комплексная амплитуда поля $q(\eta, \xi) = (L_{dis}^{(2)} / L_{fm})^{1/2} A(\eta, \xi) I_0^{-1/2}$ ($L_{fm} = 2c / (\omega_0 n_2 I_0)$ –

В.А.Алешкевич, С.В.Горин, А.С.Жукарев, Я.В.Карташов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьёвы горы

V.A.Vyslokh. Departamento de Física y Matemáticas, Universidad de las Américas – Puebla, Santa Catarina Martir, 72820, Cholula, Puebla, Mexico

Y.V.Kartashov. ICFO-Institut de Ciències Fòniques, and Department of Signal Theory and Communications, Universitat Politècnica de Catalunya, 08034 Barcelona, Spain

Поступила в редакцию 25 сентября 2003 г.

длина фазовой самомодуляции, I_0 – пиковая интенсивность входной волны, n_2 – нелинейный коэффициент, A – медленно меняющаяся огибающая светового поля).

Вклад дисперсии третьего порядка определяется коэффициентом $\varepsilon = \text{sgn}(\beta_3)L_{\text{dis}}^{(3)}$, где $L_{\text{dis}}^{(3)} = 2\tau_0^3 k_{\omega=\omega_0}/|\beta_3|$ – дисперсионная длина третьего порядка; $\beta_3 = [(\partial k/\partial \omega) \times (\partial^2 k/\partial \omega^2) + (k/3)(\partial^3 k/\partial \omega^3)]_{\omega=\omega_0}$. Для стандартного световода на основе плавленого кварца дисперсионные коэффициенты можно вычислить по формулам [12] $\beta_2 \approx 87.5(1.27 - \lambda)$, $\varepsilon \approx 3.5 \times 10^{-4}(\lambda - 0.86)/[\tau_0(\lambda - 1.27)]$, где β_2 измеряется в $\text{пс}^2/\text{км}$, λ – в микрометрах, τ_0 – в пикосекундах.

Известно, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) имеет дважды периодические решения в виде кноидальных sn - и dn -волн, выражаемые через функции Якоби:

$$q_{\text{cn}}(\eta, \xi) = m \text{cn}(\eta, m) \exp[i(m^2 - 1/2)\xi], \tag{2}$$

$$q_{\text{dn}}(\eta, \xi) = \text{dn}(\eta, m) \exp[i(1 - m^2/2)\xi],$$

где параметр Якоби $1 \geq m \geq 0$ определяет степень локализации энергии кноидальной волны. В пределе сильной локализации ($m \rightarrow 1$) sn -волна трансформируется в последовательность светлых противозападных солитонов $q_{\text{cn}} = \text{sech} \eta \exp(i\xi/2)$, следующих с бесконечным периодом повторения, а dn -волна – в аналогичную последовательность синфазных солитонов. В пределе слабой локализации ($m \rightarrow 0$) sn -волна вырождается в низкоинтенсивную гармоническую волну $q_{\text{cn}} = m \cos \eta \exp(-i\xi/2)$, а dn -волна – в волну постоянной интенсивности $q_{\text{dn}} = \exp(i\xi)$. Отметим, что соотношения подобия для вырожденного уравнения ($\varepsilon = 0$) имеют вид $q(\eta, \xi) \rightarrow \chi q(\chi\eta, \chi^2\xi)$, где $\chi > 0$ – произвольный масштабный множитель; в невырожденной исходной задаче (1) помимо вышеприведенного преобразования необходимо ещё изменить дисперсионный коэффициент ε ($\varepsilon \rightarrow \varepsilon/\chi$).

Будем варьировать безразмерную несущую частоту, введя поправку к ней – параметр α , и искать те области частот, для которых существуют стационарные периодические решения. Поскольку с изменением частоты меняется и групповая скорость, то целесообразно перейти к новой бегущей системе координат $\zeta = \eta - \alpha\xi$ и представить искомое решение в виде

$$q(\xi, \zeta) = [u(\zeta) + iv(\zeta)] \exp(ib\xi), \tag{3}$$

где b – действительная постоянная распространения. Связанные обыкновенные дифференциальные уравнения для действительной (u) и мнимой (v) частей имеют следующий вид:

$$\varepsilon \frac{d^3 u}{d\zeta^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\zeta^2} + \alpha \frac{du}{d\zeta} + bv - v^3 - uv^2 = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon \frac{d^3 v}{d\zeta^3} + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \alpha \frac{dv}{d\zeta} - bu + u^3 + uv^2 = 0.$$

Граничные условия предполагаются периодическими: $u(\zeta) = u(\zeta + T)$, $v(\zeta) = v(\zeta + T)$, где T – период следования, нормированный на характерный временной масштаб τ_0 .

Система уравнений (4) решалась численно методом релаксации. В качестве начального приближения исполь-

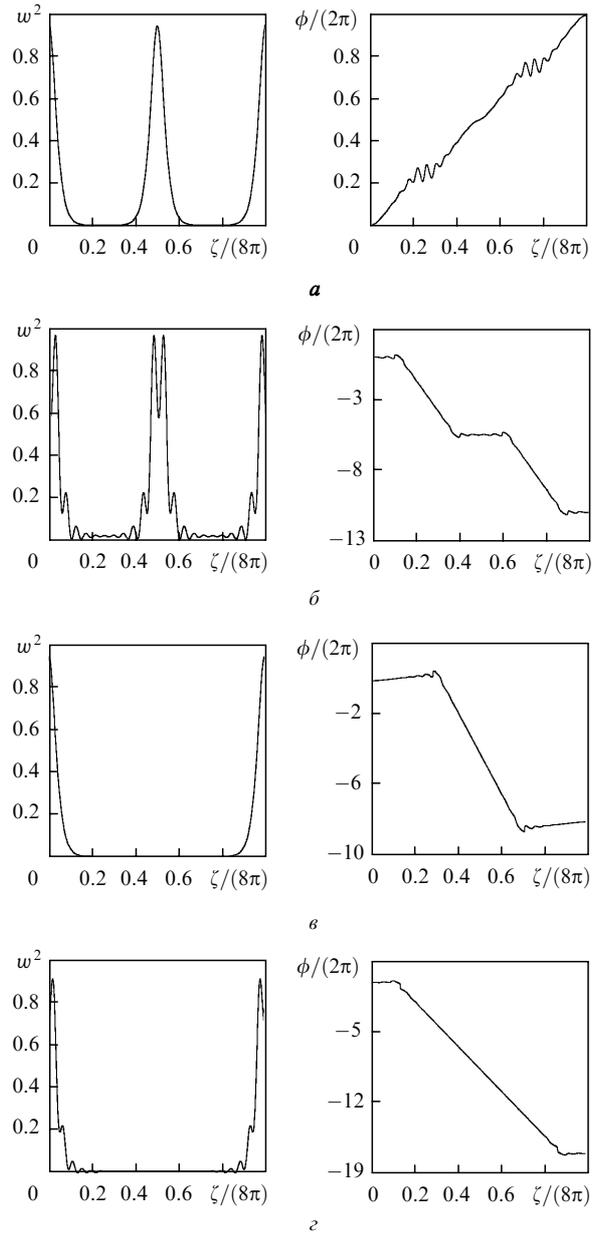


Рис.1. Профили интенсивностей и распределения фаз для волн sn - (a, b) и dn -типов (c, d) при $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ (a, c) и вблизи точек ветвления (b, d); $\varepsilon = 0.1, b = 0.5$.

зовались комбинации гармонических функций (с постоянной составляющей для решений dn -типа). Типичные профили интенсивности $w^2 = u^2 + v^2$ и распределения фазы $\phi = \arctan(v/u)$ для волн sn - и dn -типов представлены на рис.1. Несмотря на то что профили стационарных волн при $\varepsilon \neq 0$ не описываются эллиптическими функциями Якоби, мы по аналогии сохраняем за ними обозначения sn и dn . Из рис.1 отчетливо видно, что при изменении безразмерной отстройки несущей частоты α на гладком профиле интенсивности появляются мелко-масштабные осцилляции. Для более детального анализа нами исследовалась зависимость плотности потока энергии $U = \int_0^T |q|^2 d\eta$ от параметра α (рис.2) при фиксированном значении постоянной распространения b . Анализ показывает, что существует ряд значений отстройки частоты α_n (точки ветвления), при которых плотность потока энергии стационарной волны сильно возрастает, что сопровождается также значительным увеличением

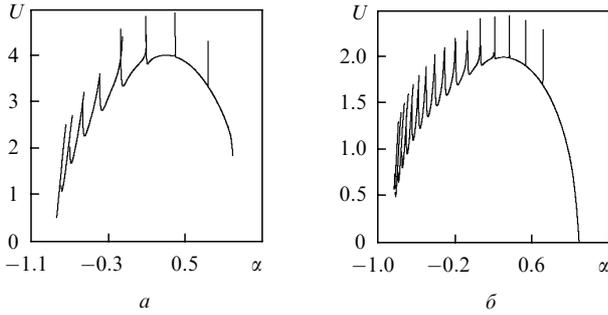


Рис.2. Зависимости плотностей потока энергии от α для волн сп- (а) и dp-типов (б) при $\varepsilon = 0.1, b = 0.5$.

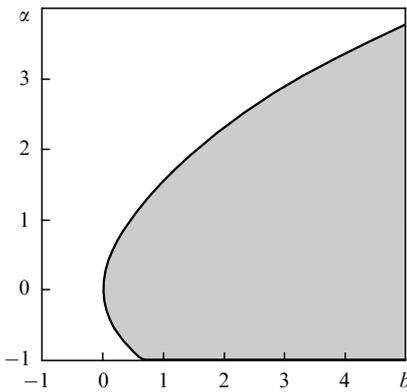


Рис.3. Области существования решений сп- и dp-типов на плоскости (α, b) при $\varepsilon = 0.1$ (практически совпадают).

амплитуды мелкомасштабных осцилляций. Отметим, что значения α_n , соответствующие точкам ветвления, мало изменяются с ростом постоянной распространения b .

На рис.3 приведены две практически совпадающие области существования решений сп- и dp-типов в плоскости параметров (α, b) при $\varepsilon = 0.1$. Ширина области существования стационарных периодических решений монотонно увеличивается с ростом постоянной распространения b , связанной с плотностью потока энергии. Границы этой области соответствуют трансформации стационарных периодических решений в решения, отвечающие волне постоянной интенсивности $u^2 + v^2 \equiv \text{const}$ с линейной фазой $\phi \sim \zeta$. Точки ветвления α_n лежат на прямых внутри области существования стационарных решений. Эти прямые практически параллельны друг другу и оси b в случае волн как сп-, так и dp-типа. Ширина области существования стационарных решений, вообще говоря, является немонотонной функцией параметра ε . Однако в интервале $0 \leq \varepsilon \leq 0.16$ увеличение дисперсионного параметра ε

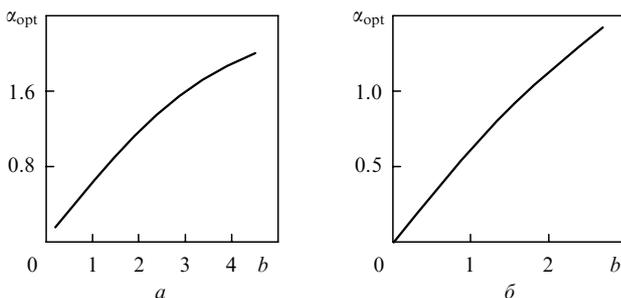


Рис.4. Зависимость параметра α_{opt} от постоянной распространения b для волн сп- (а) и dp-типов (б) при $\varepsilon = 0.1$.

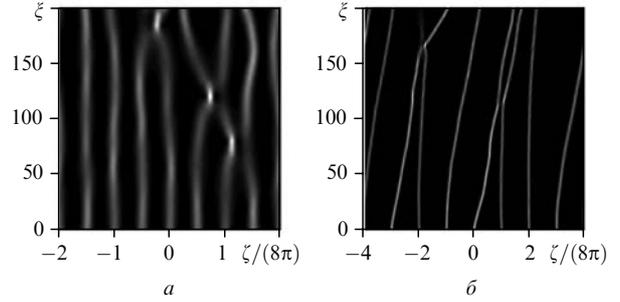


Рис.5. Распространение возмущённой сп-волны при $b = 0.1, \alpha = 0$ (а) и dp-волны при $b = 0.3, \alpha = 0$ (б); $\varepsilon = 0.1$, дисперсия шума $\sigma^2 = 0.02$.

приводит к сужению этих областей для волн сп- и dp-типов.

Таким образом, распространение стационарных периодических волн сп- и dp-типов с достаточно гладкими функциональными профилями (т. е. импульсных последовательностей с высоким контрастом) возможно лишь при значениях безразмерной отстройки несущей частоты α , лежащих между точками ветвления α_n . Из рис.2, в частности, следует, что существует оптимальная безразмерная отстройка несущей частоты α_{opt} , при которой последовательность импульсов достигает максимального значения плотности потока энергии при высокой степени её локализации. Эта величина оптимальной отстройки несущей частоты монотонно возрастает с увеличением постоянной распространения b (рис.4).

Основной проблемой, возникающей в случае практического применения в системах связи и волоконных лазерах волн сп- и dp-типов, является их стабильность. Методика корректного анализа устойчивости кноидальных волн в средах с чисто квадратичной дисперсией обоснована и детально изложена в [13]. Её обобщение на случай смешанной дисперсии будет представлено в отдельной работе. Здесь мы ограничимся иллюстрациями компьютерного моделирования распространения кноидальных волн сп- и dp-типов, возмущённых широкополосным гауссовым шумом (рис.5). Уравнение (1) решалось с помощью метода расщепления по физическим факторам. Из рис.5 видно, что хорошо локализованная волна сп-типа сохраняет структурную устойчивость на больших расстояниях даже при значительной дисперсии мультипликативного гауссова шума $\sigma^2 = 0.02$. Наличие стохастических возмущений приводит, в основном, к нарастающим флуктуациям координат центров импульсов, часто называемым джиттером. Хорошо локализованная волна dp-типа ведёт себя подобным образом, однако в той области, где при слабой локализации она оказывается постоянной, эта волна начинает испытывать классическую модуляционную неустойчивость, на которую кубическая дисперсия практически не влияет.

Анализируя приведённые результаты с практической точки зрения, следует отметить возможность формирования высококонтрастных импульсных последовательностей, следующих с высокой частотой повторения, вблизи нулевой дисперсии групповых скоростей. Таким образом, волны сп- и dp-типов могут быть полезными при создании волоконных лазеров и линий связи с высокой пропускной способностью. Отметим, что рассмотренными выше типами решений весь спектр возможных решений не ограничен.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-16370).

1. Выслоух В.А. *Квантовая электроника*, **10**, 1688 (1983); Doran N.J., Blow K.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **19**, 1883 (1983).
2. Mollenauer L.F., Stolen R.H., Gordon J.P. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1095 (1980).
3. Wai P.K.A., Menyuk C.R., Chen H.H., Lee Y.C. *Opt. Lett.*, **12**, 628 (1987).
4. Wai P.K.A., Chen H.H., Lee Y.C. *Phys. Rev. A*, **41**, 426 (1990).
5. Klauder M., Laedke E.W., Spatschek K.H., Turitsyn S.K. *Phys. Rev. E*, **47**, R3844 (1993).
6. Calvo D.C., Akylas T.R. *Phys. D*, **101**, 270 (1997).
7. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1 (1999).
8. Aleshkevich V., Vysloukh V., Kartashov Y. *Opt. Commun.*, **173**, 277 (2000).
9. Aleshkevich V., Kartashov Y., Vysloukh V. *Opt. Commun.*, **185**, 305 (2000).
10. Алешкевич В.А., Выслоух В.А., Карташов Я.В. *Квантовая электроника*, **31**, 257 (2001).
11. Aleshkevich V., Kartashov Y., Vysloukh V. *J. Opt. Soc. Am. B*, **18**, 1127 (2001).
12. Wai P.K.A., Menyuk C.R., Chen H.H., Lee Y.C. *Opt. Lett.*, **11**, 464 (1986).
13. Kartashov Y.V., Aleshkevich V.A., Vysloukh V.A., Egorov A.A., Zelenina A.S. *Phys. Rev. E*, **67**, 036613 (2003).