

Спектр нелинейного поглощения в поле слабонасыщающей стоячей волны

О.В.Белай, Д.А.Шапиро, С.Н.Яковенко

Решена задача о нахождении спектра пробного поля в трехуровневой системе, взаимодействующей со стоячей волной на смежном переходе. Получено выражение для профиля нелинейного резонанса с учетом диффузии в пространстве скоростей в четвертом порядке теории возмущений по амплитуде стоячей волны.

Ключевые слова: плазма, кулоновские столкновения, нелинейная спектроскопия, метод пробного поля, трехуровневая система, теория возмущений.

1. Введение

Исследования нелинейных спектральных резонансов в поле сильной стоячей волны ведутся с 60-х годов в связи с разработкой теории одночастотного газового лазера. Форма распределения населенностей атомных уровней по скоростям в поле стоячей волны значительно отличается от простой суммы спектров резонансных структур, индуцированных встречными бегущими волнами. Это отличие обусловлено пространственной неоднородностью поля в стоячей волне, приводящей к появлению высших пространственных гармоник как в населенностях уровней, так и в поляризации среды. Решение для двухуровневой системы получается в виде цепной дроби [1, 2], которая при равных константах релаксации и точном резонансе выражается через функцию Бесселя [3]. Однако после усреднения по скоростям в спектре генерации образуется гладкий контур провала Лэмба. Было показано, что высшие пространственные гармоники проявляются только в спектре пробного поля на смежном переходе. Некоторые структуры численно найдены в работе [4], но их подробное исследование не проводилось.

Спектр пробного поля на смежном переходе измерялся в Λ -схеме на линиях Ag II [5]. Сильное поле с частотой ω генерировалось на лазерном переходе mt ($4p^2S_{1/2} - 4s^2P_{3/2}$) с длиной волны $\lambda = 458$ нм, а пробное поле с частотой ω_μ в виде бегущей волны действовало на переходе ml ($4p^2S_{1/2} - 3d^2P_{3/2}$) с $\lambda_\mu = 648$ нм (рис.1). При расстройке пробного поля $\Omega_\mu = k_\mu \Omega / k$ наблюдался известный резонанс полевого расщепления [6]. Наряду с ним в центре спектра ($\Omega_\mu = 0$) обнаружена новая структура, положение которой не зависит от расстройки сильного поля Ω . При $\Omega = 0$ наблюдался провал, который можно интерпретировать как расщепление пика полевого расщепления. При увеличении расстройки Ω провал превращался в пик, но его положение не менялось.

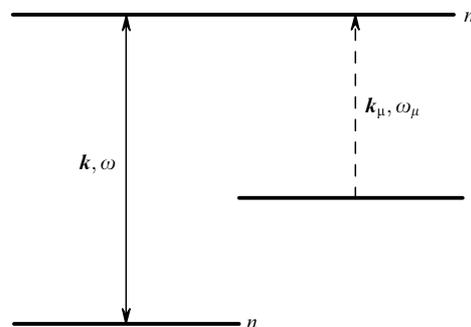


Рис.1. Схема взаимодействия уровней с полем: сильная стоячая волна (сплошная линия) с частотой ω и волновым вектором k и пробная бегущая волна с частотой ω_μ и волновым вектором k_μ (штриховая линия).

Было показано, что новая структура отвечает резонансу высших пространственных гармоник. Ее положение в спектре можно было объяснить в рамках известной теории Фелдмана – Фелда [4], тогда как интерпретация уширения резонанса из-за кулоновских ион-ионных столкновений в плазме потребовала довольно громоздкого численного расчета [7]. Возникла потребность в простой аналитической теории, которая давала бы зависимость уширения от концентрации заряженных частиц и ионной температуры в разряде.

Цель настоящей работы – получение и анализ выражения для спектра нелинейного поглощения в рамках теории возмущений по амплитуде стоячей волны. Во втором порядке теории возмущений высшие пространственные гармоники не проявляются. Вторая пространственная гармоника возникает в четвертом порядке теории возмущений, поэтому в данной работе мы ограничились разложением нелинейного поглощения до четвертого порядка.

2. Уравнения для матрицы плотности

Уравнение, описывающее поведение трехуровневой системы в присутствии сильного и пробного световых полей с волновыми векторами $k \| k_\mu$, взаимодействие ко-

О.В.Белай, Д.А.Шапиро, С.Н.Яковенко. Институт автоматизации и электротехники СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. акад. Коптюга, 1; e-mail: shapiro@iae.nsk.su

Поступила в редакцию 11 июля 2005 г.

торых с системой рассматривается как возмущение $\hat{V} = -\mathbf{E}\hat{\mathbf{d}}/(2\hbar)$, получается из уравнения для матрицы плотности [8]

$$i\left(\Gamma_{ij} + \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_{ij} = [\hat{V}, \rho]_{ij}. \quad (1)$$

Здесь x – координата вдоль направления волновых векторов; v – компонента скорости в направлении волновых векторов; индексы i, j принимают значения l, m, n ; Γ_{ij} – радиационные константы уровней и переходов; ρ_{ij} – элементы матрицы плотности ρ ; \mathbf{E} – напряженность поля в световой волне; $\hat{\mathbf{d}}$ – оператор дипольного момента; квадратными скобками обозначен коммутатор. Выпишем уравнения для поляризацій ρ_{ml} и ρ_{nl} разрешенного и запрещенного переходов:

$$i\left(\Gamma_{ml} + \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_{ml} = V_{ml}\rho_{ll} + V_{mn}\rho_{nl} - \rho_{mm}V_{ml}, \quad (2)$$

$$i\left(\Gamma_{nl} + \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_{nl} = V_{nm}\rho_{ml} - \rho_{nn}V_{nl} - \rho_{mm}V_{ml}.$$

Пренебрегаем населенностями уровней m и n , которые были малыми в условиях эксперимента. Населенность уровня l имеет равновесное распределение: $\rho_{ll} = N_l(v) = N_l v_T^{-1} \pi^{-1/2} \exp(-v^2/v_T^2)$, где v_T – тепловая скорость. Зададим поля бегущей и стоячей волн в виде

$$\mathbf{E}_\mu(x, t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}_\mu \exp(ik_\mu x - i\omega_\mu t) + \text{компл. сопр.}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E} \cos kx \exp(-i\omega t) + \text{компл. сопр.},$$

частоты Раби пробного и сильного полей обозначим $G_\mu = \mathbf{E}_\mu \mathbf{d}_{ml}/(2\hbar)$ и $G_\pm = \mathbf{E} \mathbf{d}_{mn}/(2\hbar)$, где \mathbf{E} и \mathbf{E}_μ – амплитуды напряженности сильного и пробного полей, а \mathbf{d}_{ij} – матричные элементы дипольного момента.

Выполняя замену

$$\rho_{ml} = \rho_\mu(x, v) \exp(ik_\mu x - i\Omega_\mu t),$$

$$\rho_{nl} = \rho_\nu(x, v) \exp(ik_\nu x + i\Omega t - i\Omega_\nu t),$$

получаем из (2) замкнутую систему уравнений для амплитуд ρ_μ и ρ_ν поляризацій разрешенного и запрещенного переходов:

$$\begin{aligned} &\left(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu + ik_\mu v + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_\mu \\ &= -i[G_+ \exp(ikx) + G_- \exp(-ikx)]\rho_\nu + iG_\mu N_l(v), \\ &\left(\Gamma_\nu + i\Omega - i\Omega_\nu + ik_\nu v + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho_\nu \\ &= i[G_+^* \exp(-ikx) + G_-^* \exp(ikx)]\rho_\nu, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Gamma_\mu = \Gamma_{ml}$; $\Gamma_\nu = \Gamma_{nl}$. В этих уравнениях учитывается только взаимодействие ионов со световым полем, однако в условиях рассматриваемой задачи существенное влияние оказывают ион-ионные кулоновские столкновения с изменением скорости. Поскольку кулоновское рассеяние происходит на малые углы, его можно описать как

диффузию в пространстве скоростей с помощью добавления в левые части уравнений (4) оператора $-D\partial^2/\partial v^2$, где $D = v_c v_T^2/2$ – коэффициент диффузии;

$$v_c = \frac{16\sqrt{\pi}NZ^2 e^4 A}{3M^2 v_T^3}$$

– эффективная частота ион-ионных кулоновских столкновений; Ze – заряд иона; M – масса иона; A – кулоновский логарифм; N – полная ионная плотность [9]. В выражение для частоты столкновений используется полная ионная плотность, поскольку возбужденных ионов мало, и они рассеиваются почти исключительно на ионах в основном состоянии.

3. Разложение в ряд по теории возмущений

Сначала рассмотрим для простоты уравнения без учета столкновений (4) и запишем их в матричном виде:

$$\hat{L}\rho = r, \quad (5)$$

где

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_\mu \\ \rho_\nu \end{pmatrix}; \quad r = -\frac{iG_\mu N_l}{\sqrt{\pi}v_T} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{L} = \hat{L}_0 + \Delta\hat{L};$$

$$\hat{L}_0 = v\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \Gamma_\mu - i(\Omega_\mu - k_\mu v) & 0 \\ 0 & \Gamma_\nu - i(\Omega_\nu - \Omega - k_\nu v) \end{pmatrix};$$

$$\Delta\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & iG_+ e^{ikx} + iG_- e^{-ikx} \\ iG_+^* e^{-ikx} + iG_-^* e^{ikx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо вычислить работу пробного поля

$$P_\mu(\Omega_\mu) = -2\hbar\omega_\mu \text{Re}\langle iG_\mu^* \rho_\mu(x, v) \rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки означают усреднение по фазовому пространству (x, v) .

Воспользуемся малостью взаимодействия иона с сильным полем и запишем обратный оператор в виде ряда:

$$\begin{aligned} \hat{L}^{-1} &= (\hat{L}_0 + \Delta\hat{L})^{-1} = (1 + \hat{L}_0^{-1}\Delta\hat{L})^{-1}\hat{L}_0^{-1} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-\hat{L}_0^{-1}\Delta\hat{L})^m \right] \hat{L}_0^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разложим функции ρ и r по базису

$$|n, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \delta_{p\mu} \\ \delta_{p\nu} \end{pmatrix} \exp(in kx), \quad (8)$$

где n – номер пространственной гармоники; $\lambda = 2\pi/k$. Соотношение ортогональности для базисных функций имеет вид

$$\langle n', p' | n, p \rangle = \delta_{n'n} \delta_{pp'}. \quad (9)$$

Оператор \hat{L}_0 диагонален в этом базисе, поэтому диагонален и обратный оператор $\hat{K}_0 = \hat{L}_0^{-1}$, который имеет собственные значения K_{np} :

$$\langle n', p' | \hat{L}_0^{-1} | n, p \rangle = \delta_{n'n} \delta_{pp'} K_{np},$$

$$K_{np} = \{ivnk + \delta_{p\mu}(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu + ik_\mu v) + \delta_{pv}[\Gamma_v + i(\Omega - \Omega_\mu + k_\mu v)]\}^{-1}, \quad (10)$$

где $p = \mu, v$. Обратный оператор удобно записать в виде разложения по проекторам:

$$L_0^{-1} = \sum_{n,p} |n, p\rangle K_{np} \langle n, p|. \quad (11)$$

Введем дополнительные обозначения

$$a^+ |n, p\rangle = |n+1, p\rangle, \quad a^- |n, p\rangle = |n-1, p\rangle, \quad (12)$$

$$\hat{U} |n, p\rangle = \delta_{pv} |n, \mu\rangle, \quad \hat{\mathcal{D}} |n, p\rangle = \delta_{p\mu} |n, v\rangle, \quad (13)$$

чтобы выразить $\Delta \hat{L}$ через повышающий и понижающий операторы a^+ и a^- :

$$\Delta \hat{L} = i\hat{U}(G_+ a^+ + G_- a^-) + i\hat{\mathcal{D}}(G_+^* a^- + G_-^* a^+). \quad (14)$$

Для вычисления работы пробного поля необходимо усреднить матричный элемент обратного оператора (7)

$$\langle 0, \mu | \hat{L}^{-1} | 0, \mu \rangle = \langle 0, \mu | \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-\hat{L}_0^{-1} \Delta \hat{L})^m \right] \hat{L}_0^{-1} | 0, \mu \rangle \quad (15)$$

по скоростям с максвелловским распределением. Оператор $\Delta \hat{L}$ меняет четность n , поскольку он состоит из операторов a^+ и a^- , соответственно повышающих и понижающих номер гармоники n на единицу.

Вернемся к общим уравнениям, учитывающим столкновения ионов с изменением их скорости. По сравнению с рассмотренным выше бесстолкновительным случаем изменится только оператор \hat{L}_0^{-1} , обратный к невозмущенному. Чтобы найти его, выполним преобразование Фурье от поляризации $\rho_\mu(v)$ и правой части уравнения (5):

$$-(kn + k_\mu) \frac{dz(q)}{dq} + (\Gamma_\mu - i\Omega_\mu + Dq^2)z(q) = r(q), \quad (16)$$

где $z(q)$ – фурье-образ поляризации $\rho_\mu(v)$; $r(q)$ – фурье-образ правой части $r(v)$ уравнения (5).

Решение этого уравнения запишем в виде

$$z(q) = -\frac{E_{n\mu}(q)}{kn + k_\mu} \int_C E_{n\mu}^{-1}(q_1) r(q_1) dq_1, \quad (17)$$

где

$$E_{n\mu}(q) = \exp\left(\frac{Dq^3/3 + q\Gamma_\mu - iq\Omega_\mu}{kn + k_\mu}\right); \quad (18)$$

C – константа, которая определяется из граничных условий. Граничным условием для $z(q)$ является требование $z(\pm\infty) \rightarrow 0$. Учитывая поведение $E(q)$ на бесконечности, можно заключить, что если $kn + k_\mu > 0$, то C нужно положить равным $+\infty$, чтобы интеграл в (17) сходил. Соответственно в противоположном случае ($kn + k_\mu < 0$) нужно выбрать $C = -\infty$. Заметим, что $E_{n\mu}(-q) = E_{n\mu}^{-1}(q)$, поэтому общее решение имеет вид

$$z(q) = -\frac{1}{kn + k_\mu} \int_C E_{n\mu}(q) E_{n\mu}(-q_1) r(q_1) dq_1, \quad (19)$$

где $C = \text{sign}(kn + k_\mu) \times \infty$;

$$\text{sign } x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Из уравнений (4) заключаем, что общее решение аналогичного уравнения для v -компоненты получается из решения для μ -компоненты (18) заменой $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_v$, $\Omega_\mu \rightarrow \Omega_v - \Omega$, т. е.

$$E_{nv}(q) = \exp\left[\frac{Dq^3/3 + q\Gamma_v - iq(\Omega_\mu - \Omega)}{kn + k_\mu}\right]. \quad (20)$$

Тогда

$$\rho(q) = -\int_C \left[\sum_{n,p} \frac{|n, p\rangle E_{np}(q) E_{np}(-q_1) \langle n, p|}{nk + k_\mu} \right] r(q_1) dq_1. \quad (21)$$

Результат действия обратного оператора на правую часть уравнения (5) будет s -кратным интегралом, где s – порядок теории возмущений.

4. Нелинейный спектр поглощения

В доплеровском пределе ($v_T \rightarrow \infty$) фурье-образ правой части уравнения (5) представляет собой дельта-функцию:

$$r(q) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |0, \mu\rangle \exp(-iqv) dv = i\sqrt{2\pi} \delta(q) |0, \mu\rangle. \quad (22)$$

В выражении для нулевого порядка теории возмущений содержится ступенчатая функция $\Theta(q)$:

$$(\hat{L}_0 + Dq^2)^{-1} r(q) = ik_\mu^{-1} \sqrt{2\pi} \Theta(-q) E_{0\mu}(q) |0, \mu\rangle. \quad (23)$$

Под действием оператора $\Delta \hat{L}$ нулевая гармоника $|0, \mu\rangle$ переходит в две соседние $-|1, v\rangle$ и $|-1, v\rangle$. Действие оператора $(\hat{L}_0 + Dq^2)^{-1}$ на линейную комбинацию гармоник меняет только коэффициенты перед ними, но не добавляет новых гармоник. Последующее действие оператора $\Delta \hat{L}$ опять добавляет соседние гармоники $|2, \mu\rangle$, $|0, \mu\rangle$, $|-2, \mu\rangle$. В выражение для искомой величины P_μ входит $\rho_\mu(x, v)$, усредненное по x , что эквивалентно скалярному умножению образовавшейся суммы гармоник на нулевую гармонику $\langle 0, \mu|$. В силу ортогональности отлично от нуля будет только слагаемое $\langle 0, \mu|0, \mu\rangle = 1$.

Процесс возникновения гармоник иллюстрирует рис.2. Для того чтобы гармоника дала вклад в $P_\mu^{(s)}$, надо сделать s шагов от $|0, \mu\rangle$ до $|0, \mu\rangle$ по одному из маршрутов, представленных на рис.2, перемещаясь каждый раз вправо-вверх или вправо-вниз в соседний узел. Всего таких маршрутов в s -м порядке теории возмущений

$$N = C_s^{s/2} = s! \left(\frac{s}{2}\right)^{-2}$$

(если s – нечетное, то $N = 0$, поскольку за нечетное число шагов невозможно вернуться к нулевой гармонике). Для $s = 2, 4$ и 6 число маршрутов N составляет 2, 6 и 20.

В стоковом случае, когда $k_\mu < k$, часть интегралов обращается в нуль. Во втором порядке теории возмуще-

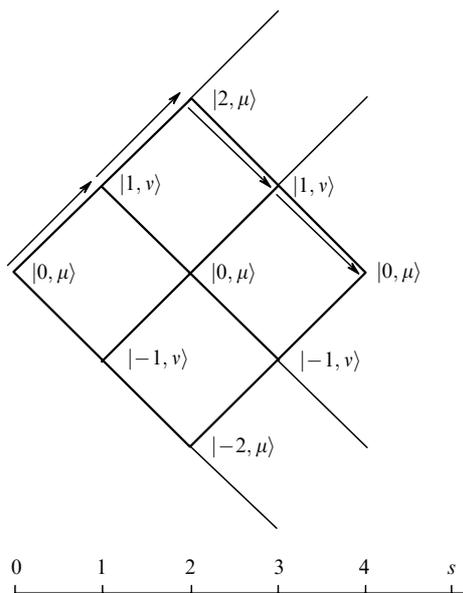


Рис.2. Увеличение числа гармоник в результате s-кратного действия оператора $\Delta\hat{L}$. Стрелками выделен маршрут, для которого вклад гармоник в работу пробного поля обращается в нуль.

ний оказывается равным нулю интеграл, содержащий множитель $|G_-|^2$, который соответствует маршруту $|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle$. В четвертом порядке также обращается в нуль интеграл при $|G_-|^4$, а остаются один интеграл при $|G_+|^2$ и четыре при $|G_+G_-|^2$. Из этих четырех интегралов один тоже равен нулю, а именно интеграл для маршрута $|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |2, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle$, который выделен на схеме стрелками. Во втором порядке теории возмущений остается только один интеграл, а в четвертом – четыре. Им соответствуют следующие маршруты на рис.2:

$$\begin{aligned}
 &|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle, \\
 &|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |2, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle, \\
 &|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle, \\
 &|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle, \\
 &|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle \rightarrow |1, \nu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Выпишем получающиеся многократные интегралы при $G_+ = G_- = G$:

$$\Delta P_\mu = \delta P_\mu^{(2)} + \delta P_\mu^{(4)}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \delta P_\mu^{(2)} &= \frac{-G^2}{k_\mu^2(k_\mu - k)} \int_\infty^0 dq_4 F_{0,-1}(q_4) \\
 &\times \int_{-\infty}^{q_4} dq_3 F_{-1,0}(q_3) \Theta(-q_3),
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\delta P_\mu^{(4)} = \frac{G^4}{k_\mu^2(k_\mu - k)^2(k_\mu - 2k)} \int_\infty^0 dq_4 F_{0,-1}(q_4)$$

$$\begin{aligned}
 &\times \int_{-\infty}^{q_4} dq_3 F_{-1,-2}(q_3) \int_{-\infty}^{q_3} dq_2 F_{-2,-1}(q_2) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{q_2} dq_1 F_{-1,0}(q_1) \Theta(-q_1) + \frac{G^4}{k_\mu^3(k_\mu - k)^2} \\
 &\times \int_\infty^0 dq_4 F_{0,-1}(q_4) \int_{-\infty}^{q_4} dq_3 F_{-1,0}(q_3) \\
 &\times \int_\infty^{q_3} dq_2 F_{0,-1}(q_2) \int_{-\infty}^{q_2} dq_1 F_{-1,0}(q_1) \Theta(-q_1) \\
 &+ \frac{G^4}{k_\mu^3(k_\mu - k)(k_\mu + k)} \int_\infty^0 dq_4 F_{0,-1}(q_4) \int_\infty^{q_4} dq_3 F_{-1,0}(q_3) \\
 &\times \int_\infty^{q_3} dq_2 F_{0,1}(q_2) \int_\infty^{q_2} dq_1 F_{1,0}(q_1) \Theta(-q_1) \\
 &+ \frac{G^4}{k_\mu^3(k_\mu - k)(k_\mu + k)} \int_\infty^0 dq_4 F_{0,1}(q_4) \int_\infty^{q_4} dq_3 F_{1,0}(q_3) \\
 &\times \int_\infty^{q_3} dq_2 F_{0,1}(q_2) \int_\infty^{q_2} dq_1 F_{-1,0}(q_1) \Theta(-q_1),
 \end{aligned} \tag{27}$$

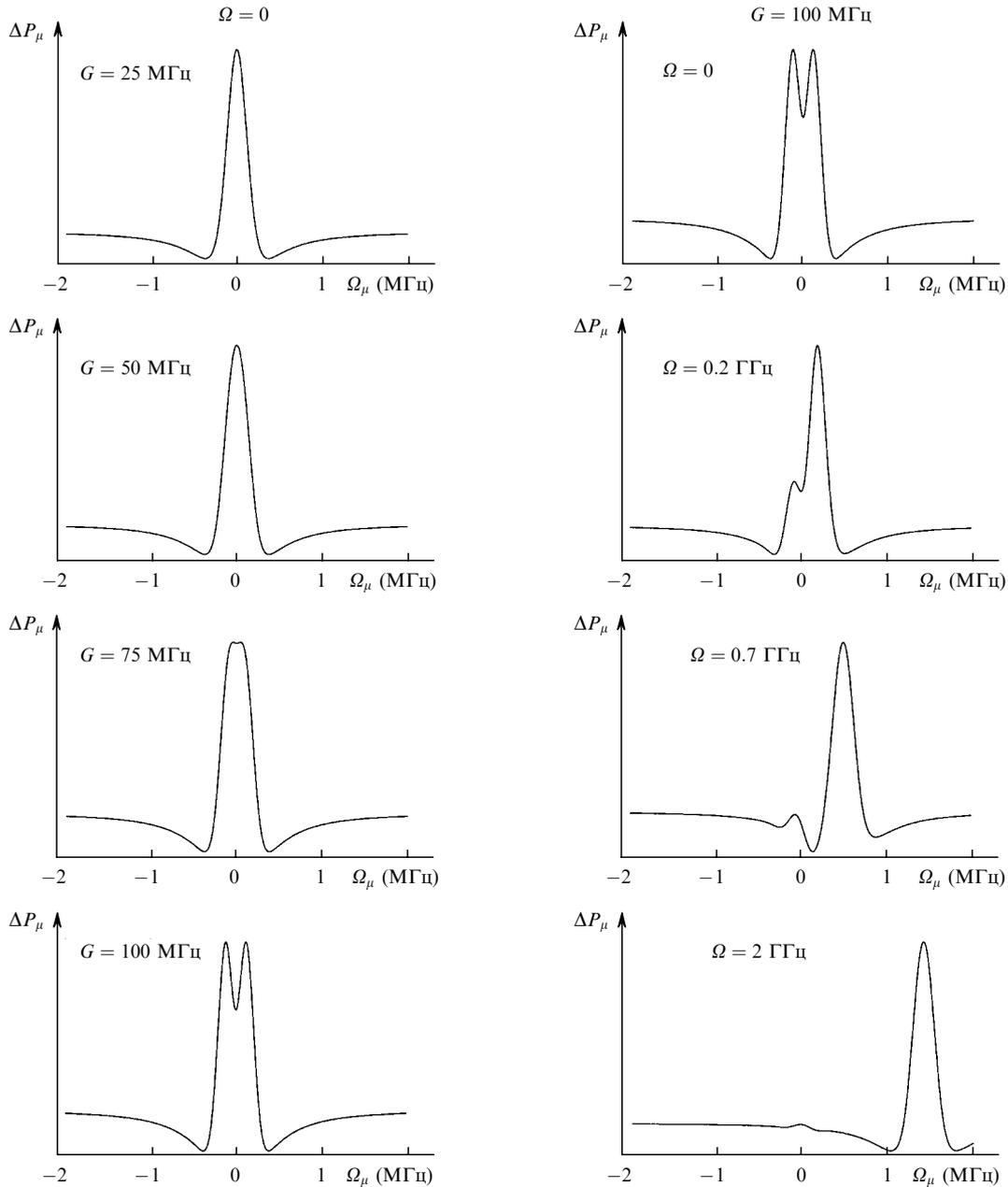
где

$$F_{mn}(q) = E_{mp_1}(-q)E_{np_2}(q); \quad F_{mn}(q) = F_{nm}(-q);$$

$p_1 = \mu$, если m – четное, и $p_1 = \nu$ в противном случае; p_2 определяется через n аналогичным образом, а величины E_{np} даются формулами (18), (20). Можно показать, что интегралы четвертого порядка теории возмущений можно упростить и свести к интегралам меньшей кратности, т.е. к произведениям однократных, двукратных и трехкратных интегралов. Благодаря такому упрощению интегралы можно сравнительно легко рассчитать численно. Порядок следования интегралов в сумме (27) соответствует порядку следования маршрутов в (24). За резонанс высших пространственных гармоник отвечает то слагаемое в (27), которое соответствует единственному маршруту, проходящему через вторую гармонику: $|0, \mu\rangle \rightarrow |1, \mu\rangle \rightarrow |2, \mu\rangle \rightarrow |1, \mu\rangle \rightarrow |0, \mu\rangle$.

Зависимости $\Delta P_\mu(\Omega_\mu)$ при различных G и Ω представлены на рис.3. Параметры для расчета были выбраны близкими к экспериментальным. В левом столбце показаны зависимости для $\Omega = 0$ с растущей сверху вниз амплитудой стоячей волны. Начиная с некоторой амплитуды вершина резонанса полевого расщепления становится полой, а затем появляется провал, соответствующий второй пространственной гармонике. Провал получается более широким, чем в случае $D = 0$. Во втором столбце приведены зависимости, полученные при одинаковой амплитуде стоячей волны, но различных ее расстройках, которые увеличиваются сверху вниз. Видно, как провал превращается в пик, расположенный в центре линии и не меняющий положения при изменении расстройки. Амплитуда пика падает с увеличением расстройки. Такое поведение качественно согласуется с экспериментальным.

Чтобы выяснить физический смысл отдельных слагаемых в (25), вычислим интегралы в (26), (27) при $D = 0$:

Рис.3. Зависимости $\Delta P_\mu(\Omega_\mu)$ при различных G (слева) и Ω (справа).

$$\delta P_\mu^{(2)} = \frac{2G_+^2(k_\mu - k)}{[k_\mu(-\Gamma_\mu + \Gamma_v + i\Omega) + k(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)]^2}, \quad (28)$$

$$\delta P_\mu^{(4)} = \frac{6G_+^4(k - k_\mu)^2 k_\mu}{[k_\mu(-\Gamma_\mu + \Gamma_v + i\Omega) + k(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)]^4}$$

$$+ \frac{G_-^2 G_+^2 k_\mu^2 [k_\mu^2(\Gamma_\mu - \Gamma_v - i\Omega) + 6k^2(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)]}{2k^2 [k_\mu(-\Gamma_\mu + \Gamma_v + i\Omega) + k(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)]^3 (\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)^2}$$

$$+ \frac{G_-^2 G_+^2 k_\mu^2 [k k_\mu(-7\Gamma_\mu + 2\Gamma_v + 2i\Omega + 5i\Omega_\mu)]}{2k^2 [k_\mu(-\Gamma_\mu + \Gamma_v + i\Omega) + k(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)]^3 (\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)^2}$$

$$- \frac{2iG_-^2 G_+^2 (k - k_\mu)^3}{k[\Gamma_v + i(\Omega - \Omega_\mu)]\{i[k\Gamma_\mu + k_\mu(-\Gamma_\mu + \Gamma_v + i\Omega)] + k\Omega_\mu\}^3}. \quad (29)$$

Подобное выражение получено ранее в работах [5, 10].

Слагаемое (28) второго порядка по амплитуде стоячей волны описывает резонанс с центром на частоте $\Omega_\mu = k_\mu \Omega / k$. Резонансы на других частотах появляются только в четвертом порядке. Первое слагаемое в (29) сходно с членом второго порядка (28) и описывает увеличение полевого расщепления с ростом G_+^2 . Второе и третье слагаемые в (29) описывают нелинейную структуру с шириной Γ_μ в центре линии с $\Omega_\mu = 0$. Это видно из множителя $(\Gamma_\mu - i\Omega_\mu)^{-2}$, который содержится только в этих слагаемых. Последнее слагаемое в (29) возникает из-за пространственной модуляции когерентности запрещенного перехода nl , что приводит к появлению в спектре нелинейной структуры с шириной запрещенного перехода Γ_v на частоте двухфотонного резонанса $\Omega_\mu = \Omega$.

В антистоксовом случае выражение для работы пробного поля в среде с большим доплеровским уширением упрощается, поскольку остается только один интеграл, отвечающий нижнему маршруту на рис.2:

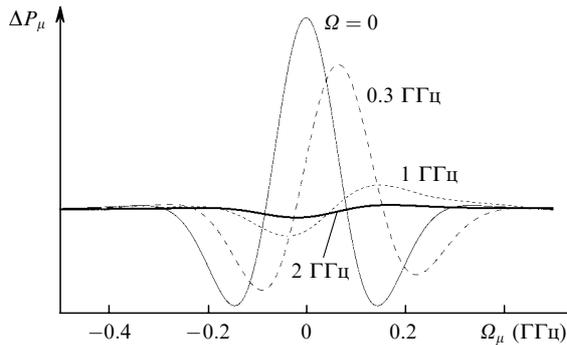


Рис.4. Зависимости $\Delta P_\mu(\Omega_\mu)$ при $k_\mu/k = 1.4$ и различных Ω .

$$\Delta P_\mu^{(4)} \propto \int_{-\infty}^0 dq_4 F_{0,-1}(q_4) \int_{-\infty}^{q_4} dq_3 F_{-1,-2}(q_3) \times \int_{-\infty}^{q_3} dq_2 F_{-2,-1}(q_2) \int_{-\infty}^{q_2} dq_1 F_{-1,0}(q_1) \Theta(-q_1), \quad (30)$$

где $C = \text{sign}(k_\mu - 2k) \times \infty$.

Нелинейный спектр поглощения изображен на рис.4. Видно, что амплитуда резонанса так же, как и в стоксовом случае, уменьшается с ростом расстройки. Профиль нелинейного резонанса получился знакопеременным. Можно показать, что площадь под контуром нелинейного резонанса высших пространственных гармоник (27) или (30) равна нулю.

5. Обсуждение результатов

Формулы (26), (27) для спектра получились довольно громоздкими, но они имеют простую структуру. Подынтегральные выражения представляют собой произведение функций Грина, описывающих диффузию в пространстве скоростей и релаксацию поляризаций разрешенного и запрещенного переходов. Эти формулы дают возможность оценить ширину резонанса высших пространственных гармоник и найти зависимость ΔP_μ от параметров в предельном случае времени диффузии, малого по сравнению с временем релаксации: $(Dk^2)^{-1/3} \ll \Gamma_{\mu,v}^{-1}$.

Рассмотрим случай с нулевой расстройкой $\Omega = 0$. Если в интегралах (26), (27), через которые выражается $\Delta P_\mu(\Omega_\mu)$, сделать замену переменных интегрирования $t_i = (D/k)^{1/3} q_i$ ($i = 1 - 4$), то зависимость ΔP_μ от D будет иметь следующий вид:

$$\Delta P_\mu(\Omega_\mu) = D^{-4/3} f\left(\frac{\Omega_\mu}{k^{2/3} D^{1/3}}, \frac{k_\mu}{k}\right), \quad (31)$$

где f – функция двух безразмерных переменных. Поскольку Ω_μ входит в (31) только в указанной комбинации, ширина пика высших пространственных гармоник на полувысоте $\delta\Omega_\mu = C_1 D^{1/3} k^{2/3}$. Для проверки этой оценки была построена серия кривых $\Delta P_\mu(\Omega_\mu)$ (рис.5) и найдена ширина пика вблизи $\Omega_\mu = 0$ при разных D . Ширина пика на полувысоте как функция от D показана на вставке. Тангенс угла наклона составил 0.31, что согласуется с оценкой. Коэффициент C_1 оказался равным 0.15. Такая зависимость имеет простое качественное объяснение.

Уширение пика происходит за счет изменения скорости при кулоновском рассеянии. За время t ион рассеивается на случайный угол ϑ так, что $\langle \vartheta \rangle = 0$ и $\langle \vartheta^2 \rangle = v_c t$.

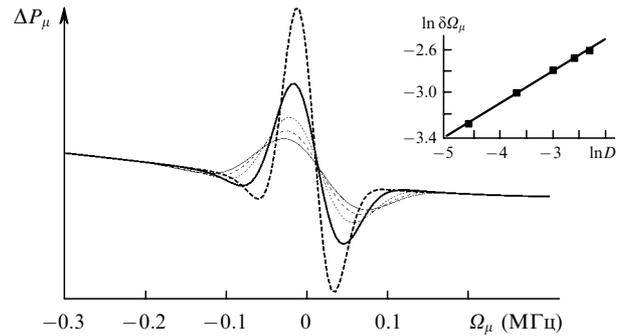


Рис.5. Пики высших пространственных гармоник при $\Gamma_v = \Gamma_\mu = 1$ ГГц, $D/D_0 = 0.1, 0.075, 0.05, 0.025, 0.001$ (в порядке увеличения амплитуды пика) и $D_0 = 10^{13} \text{ м}^2/\text{с}^3$. На вставке – зависимость ширины пика от коэффициента диффузии.

Ион, первоначально находившийся в пучности стоячей волны и имевший нулевую проекцию скорости на направление волнового вектора и поперечную скорость порядка тепловой, за время t приобретает продольную скорость $\delta u \sim (v_c t)^{1/2} v_T$ и проходит расстояние $\delta x \sim v_c^{1/2} \times t^{3/2} v_T$. Когда набег фазы из-за доплеровского сдвига частоты n -й гармоники $nk\delta x$ становится равным π , фаза сбивается и эффект данной гармоники пропадает. Характерное время такого процесса $t \sim (nk v_T)^{-2/3} v_c^{-1/3}$. Резонанс в центре возникает из-за наличия высших четных пространственных гармоник с $n = 2, 4, \dots$, поэтому для оценки надо рассматривать влияние гармоник с $n = 2$, при этом ширина пика по полувысоте $\delta\Omega_\mu \sim D^{1/3} k^{2/3}$. При $\delta\Omega_\mu \sim \Gamma_\mu$ провал в случае резонанса «замывается», а ширина пика в отсутствие резонанса увеличивается примерно в два раза.

6. Заключение

Таким образом, получены аналитические формулы для спектра нелинейного поглощения с учетом диффузии в пространстве скоростей. Рассчитаны контуры нелинейного резонанса высших пространственных гармоник для экспериментальной ситуации и антистоксова случая. Найдено уширение резонанса за счет кулоновского рассеяния. Формулы теории возмущений согласуются с известным предельным случаем [5] и с результатами численного расчета [7]. Показано, что учет кулоновского рассеяния в плазме позволяет качественно объяснить экспериментальные данные.

Авторы благодарны М.Г.Степанову за полезные обсуждения. Работа частично поддержана Государственной программой «Ведущие научные школы» (грант № НШ-439.2003.2).

1. Stenholm S., Lamb W.E. *Phys. Rev.*, **181**, 618 (1969).
2. Feldman B.J., Feld M.S. *Phys. Rev. A*, **1**, 1375 (1970).
3. Раутиан С.Г., Собельман И.И. *ЖЭТФ*, **44**, 934 (1963).
4. Feldman B.J., Feld M.S. *Phys. Rev. A*, **5**, 899 (1972).
5. Бабин С.А., Подвилов Е.В., Потапов В.В., Чуркин Д.В., Шапиро Д.А. *ЖЭТФ*, **121**, 807 (2002).
6. Бабин С.А., Степанов М.Г., Чуркин Д.В., Шапиро Д.А. *ЖЭТФ*, **125**, 1092 (2004).
7. Белай О.В., Шапиро Д.А. *Письма в ЖЭТФ*, **79**, 257 (2004).
8. Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М. *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул* (Новосибирск: Наука, 1979).
9. Babin S.A., Shapiro D.A. *Phys. Rep.*, **241**, 119 (1994).
10. Попов А.К. *Введение в нелинейную спектроскопию* (Новосибирск: Наука, 1983).