

# К теории фильтрации сигналов в бистабильной колебательной системе с умеренной диссипацией

А.Н.Домбровский, С.А.Решетняк, В.А.Щеглов

*Теоретически исследуется взаимодействие слабого периодического сигнала и шума в бистабильных системах. На основе обобщенного уравнения Смолуховского показано, что в зависимости от соотношения между коэффициентом трения и собственной частотой колебания решение данного уравнения имеет апериодический или колебательный характер. В рамках теории линейного отклика на сигнал дано объяснение эффекта стохастического резонанса, а также найдено оптимальное значение коэффициента трения, при котором отношение сигнал/шум на выходе бистабильной системы превышает аналогичное отношение на входе.*

**Ключевые слова:** стохастический резонанс, бистабильная система, умеренная диссипация.

## 1. Введение

В настоящее время повышенный интерес [1–3] вызывают оптические бистабильные системы, которые весьма удобны для исследования процессов нелинейного взаимодействия сигнала и шума. В частности, кольцевой лазер с акустооптическим модулятором [1] – первая экспериментальная установка, на которой был обнаружен аномальный рост отношения сигнал/шум с увеличением интенсивности шума, названный эффектом стохастического резонанса (СР). Направления распространения излучения генерации либо по часовой стрелке, либо против неё соответствуют двум устойчивым положениям равновесия в бистабильной системе. Взаимодействие между сигналом и шумом осуществлялось путём детерминированного и случайного изменений параметров акустооптического модулятора. Обзор работ по эффекту СР дан в [4, 5].

Однако, как показывают теоретические исследования [6–9], кроме эффекта СР в оптических бистабильных системах можно обнаружить другое аномальное явление, заключающееся в том, что отношение сигнал/шум на выходе бистабильной системы превышает аналогичное отношение на её входе только за счёт передачи энергии от шума к сигналу. Следуя [10], данное явление мы называем эффектом стохастической фильтрации. Настоящая работа является продолжением теоретического исследования, проведенного в [9]. При этом, если в [9] была проанализирована система первого порядка, то здесь указанные эффекты изучаются в системе второго порядка,

которая до сих пор исследовалась главным образом с помощью численных методов [11–13].

Не привязываясь к конкретной оптической бистабильной системе, рассмотрим поведение некоторой отвлечённой физической величины  $\eta$ , подчиняющейся следующей системе ланжевеновских уравнений:

$$\frac{d\eta}{dt} + \gamma\eta + W'(\eta) = h \cos(\omega_s t) + \xi(t), \quad (1)$$

$$v = \frac{d\eta}{dt}, \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle = 2\varepsilon\delta(t - t_1),$$

где бистабильный потенциал  $W(\eta) = -\alpha\eta^2/2 + \beta\eta^4/4$ ;  $\gamma$  – коэффициент трения. Видно, что (1) является системой уравнений нелинейных колебаний, вызываемых действием на входе бистабильной системы сигнала  $h \cos(\omega_s t)$  и белого шума  $\xi(t)$  с интенсивностью  $\varepsilon$ . Угловые скобки в (1) означают усреднение по времени или по ансамблю реализаций случайной силы  $\xi(t)$ . Потенциальная функция  $W(\eta)$  имеет два минимума или устойчивых положения равновесия в точках  $\pm\eta_0$ , где  $\eta_0 = (\alpha/\beta)^{1/2}$ . Между положениями равновесия расположен потенциальный барьер, высота которого  $W_0 = \alpha^2/(4\beta)$ .

Хорошо известно [14], что в зависимости от величины коэффициента трения (или диссипации) поведение систем, описываемых ланжевеновскими уравнениями второго порядка, имеет разный характер. В предельном случае больших коэффициентов трения релаксация к состоянию равновесия является апериодической и описывается уравнением Смолуховского. В предельном случае малых коэффициентов трения релаксация носит колебательный характер и описывается уравнением диффузии по энергии. В настоящей работе показано, что для умеренных диссипаций можно ввести описание, которое имеет черты как апериодического, так и колебательного характера. В рамках такого подхода и теории линейного отклика дано объяснение эффектов стохастического резонанса и стохастической фильтрации, а также найдены оптимальные коэффициенты трения, при которых улучшаются условия выделения слабых сигналов на фоне помех.

**А.Н.Домбровский.** Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78; e-mail: dmbr@gambler.ru  
**С.А.Решетняк.** Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78; Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53  
**В.А.Щеглов.** Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53

Прежде чем перейти к анализу системы (1), найдём условия, при которых она переходит в исследованное ранее [9] уравнение первого порядка для величины  $\eta$ . Представляя потенциал вблизи одного из положений равновесия в виде

$$W(\eta) = -W_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\eta - \eta_0)^2 + \dots, \quad (2)$$

где  $\omega_0 = (2\alpha)^{1/2}$  – собственная частота колебаний около положения равновесия, находим установившуюся со временем реакцию системы на сигнал в отсутствие шума, описываемую выражением

$$\eta = \eta_0 + \frac{h \cos(\omega_s t - \varphi)}{[(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + (\gamma \omega_s)^2]^{1/2}}, \quad \tan \varphi = \frac{\gamma \omega_s}{\omega_0^2 - \omega_s^2}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (3) для сигнальных частот  $\omega_s \ll \omega_0$  и собственных частот  $\omega_0 \ll \gamma$  совпадает с исследованным в [9] решением ланжевеновского уравнения первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt} + u'(\eta) = A \cos(\omega_s t), \quad (4)$$

где  $u(\eta) = W(\eta)/\gamma$ ;  $A = h/\gamma$ .

Отсюда следует, что в пределе низких сигнальных частот  $\omega_s$  основанная на системе уравнений (1) теория обязана содержать полученные ранее результаты [9]. Однако остаются открытыми вопросы, связанные с поведением бистабильной системы в области частот  $\omega_s \sim \omega_0$  и зависимостью отношения сигнал/шум от коэффициента трения  $\gamma$ . Рассмотрению именно этих вопросов и посвящена настоящая работа. При этом аналитические результаты удаётся получить лишь для малых амплитуд сигнала  $h$ .

## 2. Кинетическое уравнение для небольших коэффициентов трения

Отметим, что система уравнений (1) является универсальной и используется во многих областях физики. При  $h = 0$  она лежит в основе построения теории движения броуновских частиц с единичной массой в потенциальном поле  $W(\eta)$ . Перейдём от системы (1) к кинетическому уравнению для функции распределения плотности вероятности  $F$  [10]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial \eta} - W' \frac{\partial F}{\partial v} + h \cos(\omega_s t) \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \gamma v F + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial v} \right), \quad (5)$$

$$F|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*) \delta(v - v_*), \quad \int F d\eta dv = 1,$$

где  $\eta_*$  и  $v_*$  – начальные значения величины  $\eta$  и её производной. Считаем также, что сигнал начинает воздействовать на систему в момент времени  $t = 0$ .

Рассматривая вытекающие из уравнения (5) уравнения для первых двух моментов

$$\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \eta} + [W' - h \cos(\omega_s t)] \mathcal{M}_0 = -\gamma \mathcal{M}_1,$$

где  $\mathcal{M}_n = \int v^n F dv$ , получаем следующее точное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial t} + h \cos(\omega_s t) \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( W' \mathcal{M}_0 + \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \eta} \right). \quad (6)$$

Для обрывания цепочки уравнений для моментов найдём связь между  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{M}_0$ . В отсутствие сигнала уравнение (5) описывает процесс установления максвелл-больцмановской функции распределения. При этом время установления равновесного по скорости  $v$  максвелловского распределения составляет порядка  $\gamma^{-1}$  [10], что существенно меньше времени установления больцмановского распределения по  $\eta$ , которое определяется величиной, обратной частоте Крамерса [14], или средним значением времени перехода броуновской частицы через потенциальный барьер. Учитывая быстрый процесс перехода функции распределения по скоростям к равновесной, рассматриваем релаксацию для моментов времени  $t > \gamma^{-1}$ . Тогда связь между  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{M}_0$  можно считать такой же, как и в случае установившейся со временем функции распределения уравнения (5). Мы полагаем, что при этом для сигнальных частот  $\omega_s < \gamma$  теория будет приводить к правильным количественным результатам, а для  $\omega_s > \gamma$  – к правильным качественным результатам. Для рассматриваемых малых амплитуд сигналов установившееся со временем решение уравнения (5) с учётом (2) имеет вид

$$F_0 \sim \exp \left[ - \frac{(v - \bar{v})^2 + \omega_0^2 (x - \bar{x})^2}{2\theta} \right], \quad (7)$$

где  $x = \eta - \eta_0$ ;  $\theta = \varepsilon/\gamma$  – аналог температуры движения броуновских частиц;  $\bar{x}$  и  $\bar{v}$  – средние значения  $x$  и  $v$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \gamma \bar{v} + \omega_0^2 \bar{x} = h \cos(\omega_s t), \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}. \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что решение уравнения (8) для средних значений в точности совпадает с решением (3) линеаризованного уравнения (1), которое описывает вынужденные колебания в отсутствие шума.

Используя (7) и рассматривая сигналы с амплитудами  $h \ll (\varepsilon\gamma)^{1/2}$ , находим

$$\mathcal{M}_2 = (\theta + \bar{v}^2) \mathcal{M}_0 \simeq \theta \mathcal{M}_0.$$

При этом уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} + h \cos(\omega_s t) \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( W' f + \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right), \quad (9)$$

где  $f = \mathcal{M}_0$ .

В случае низких сигнальных частот ( $\omega_s \ll \omega_0$ ) второй производной по времени от функции распределения можно пренебречь и уравнение (9) переходит в известное уравнение Смолуховского, эквивалентное ланжевеновскому уравнению первого порядка (4). При  $\omega_s \sim \omega_0$  вторую производную следует учитывать. Отметим, что уравнение (9) получено для параметров бистабильной системы, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega_s < \gamma, \quad h \ll (\varepsilon\gamma)^{1/2}. \quad (10)$$

### 3. Анализ кинетического уравнения для сигналов с малыми амплитудами

Пусть амплитуды сигналов удовлетворяют более жёсткому по сравнению с (10) условию  $h \ll \omega_0 \sqrt{\theta}$ . Тогда решение уравнения (9) можно найти в первом порядке нестационарной теории возмущений по малому параметру  $h$ . Поскольку это решение строится аналогично [9], то здесь мы приведём основные результаты расчёта.

Функция распределения ищется в виде ряда

$$f = \rho + \tilde{\rho} + \tilde{\tilde{\rho}} + \dots, \quad (11)$$

где  $\rho$  – решение невозмущённого уравнения (9), которое принимает вид

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( W' \rho + \theta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right), \quad (12)$$

$$\rho|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*), \quad \int \rho d\eta = 1;$$

$\tilde{\rho}$  – пропорциональная  $h$  возмущённая часть функции распределения, определяемая уравнением

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( W' \tilde{\rho} + \theta \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \eta} \right) - h \cos(\omega_s t) \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \quad (13)$$

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = 0, \quad \int \tilde{\rho} d\eta = 0;$$

$\tilde{\tilde{\rho}}$  – часть функции распределения, пропорциональная  $h^2$  и т. д. Для рассматриваемых малых амплитуд сигнала  $h$  достаточно найти решение (9) в виде суммы первых двух членов ряда (11). С физической точки зрения слагаемое  $\rho$  в (11) отвечает за реакцию системы на шум, а  $\tilde{\rho}$  – за реакцию на сигнал.

Решения для  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$  представляются в виде рядов по базисным функциям  $\varphi_n$ :

$$\rho = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \varphi_n(\eta), \quad \tilde{\rho} = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(t) \varphi_n(\eta), \quad (14)$$

где  $\rho_0 = N_0^{-1} \exp(-W/\theta)$  – нормированная на единицу равновесная функция распределения уравнения (12);  $N_0$  – постоянная нормировки. Базисные функции  $\varphi_n$  являются собственными функциями (СФ) следующей краевой задачи:

$$\theta \frac{d}{d\eta} \left( \rho_0 \frac{d\varphi_n}{d\eta} \right) = -v_n^2 \rho_0 \varphi_n, \quad (15)$$

где положительные собственные значения (СЗ) имеют размерность квадрата частоты и обозначены  $v_n^2$ . Их удобно нумеровать в порядке возрастания по величине:  $v_0 = 0, v_1 < v_2 < v_3 \dots$

СФ  $\varphi_n$  обладают свойствами ортогональности и полноты [9]. Для рассматриваемого симметричного потенциала  $W$  все  $\varphi_{2n}$  – чётные, а  $\varphi_{2n+1}$  – нечётные функции переменной  $\eta$ . Существует метод [15] последовательного расчёта всех СФ и СЗ, начиная с  $\varphi_1$  и  $v_1^2$ . Первый член ряда для  $\rho$  в (14) является равновесной функцией распределения плотности вероятности в отсутствие сигнала и соответствует  $v_0 = 0, \varphi_0 \equiv 1$ . Как показывают расчёты [15], в

отличие от более высоких СЗ первое не равное нулю СЗ  $v_1^2$  имеет экспоненциальную зависимость от интенсивности шума:

$$v_1^2 \simeq \frac{\omega_0^2}{\pi \sqrt{2}} \exp\left(-\frac{W_0}{\theta}\right). \quad (16)$$

Величина  $v_1^2/\gamma$  задаёт частоту Крамерса переходов броуновской частицы из одной потенциальной ямы в другую в результате действия шума на бистабильную систему. Величина, обратная частоте Крамерса, определяет также характерное время установления больцмановского распределения по переменной  $\eta$ . Частоты  $v_2$  и  $v_3$  по порядку величины совпадают с частотой  $\omega_0$  собственных колебаний бистабильной системы вблизи одного из положений равновесия и слабо зависят от температуры  $\theta$ . Высшие СЗ  $v_n^2$  описывают детали поведения бистабильной системы в процессе релаксации к стационарному состоянию и играют второстепенную роль.

Подстановка (14) в (12) с учётом свойства ортогональности СФ  $\varphi_n$  приводит к уравнениям для коэффициентов  $C_n$  разложения (14):

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \gamma \frac{dC_n}{dt} + v_n^2 C_n = 0, \quad (17)$$

$$C_n|_{t=0} = \varphi_n(\eta_*), \quad \left. \frac{dC_n}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Легко видеть, что с учётом свойства полноты СФ начальные условия в (17) соответствуют следующему начальному условию для  $\rho$ :

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) \varphi_n(\eta) = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta_*) \varphi_n(\eta) = \delta(\eta - \eta_*).$$

Из уравнения (17) находим, что

$$C_n(t) = \varphi_n(\eta_*) \frac{k_{n1} \exp(k_{n2}t) - k_{n2} \exp(k_{n1}t)}{k_{n1} - k_{n2}}, \quad (18)$$

где  $k_{n1}$  и  $k_{n2}$  – корни характеристического уравнения  $k_n^2 + \gamma k_n + v_n^2 = 0$ . Из (18) следует, что  $C_0 = 1$ , а остальные  $C_n$  со временем экспоненциально убывают, т. к. здесь корни  $k_{n1}$  и  $k_{n2}$  – либо вещественные и отрицательные, либо комплексные с отрицательными вещественными частями.

С помощью найденного решения для  $\rho$  находится корреляционная функция  $k(\tau)$  стационарного случайного процесса  $\eta(\tau)$  на выходе бистабильной системы:

$$k(\tau) = \langle \eta(t + \tau) \eta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1 \rho(t + \tau, \eta_1, \eta) \times \eta \rho(t, \eta, \eta_*) \rho_0(\eta_*) d\eta_* d\eta d\eta_1, \quad (19)$$

где  $\rho(t + \tau, \eta_1, \eta)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  случайная величина имеет значение  $\eta$ , а в момент  $t + \tau$  она принимает значение  $\eta_1$ ;  $\rho_0(\eta_*)$  – равновесная функция распределения в начальный момент времени.

После подстановки (14) в (19) имеем

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \eta_1 \rho(t + \tau, \eta_1, \eta) \rho_0(\eta) d\eta d\eta_1.$$

Теперь заметим, что вероятность перехода  $\rho(t + \tau, \eta_1, \eta)$  определяется уравнением (12), в котором следует заменить  $t$  на  $\tau$ ,  $\eta$  на  $\eta_1$  и  $\eta_*$  на  $\eta$ . Поэтому с учётом указанных замен эта вероятность задаётся формулами (14) и (18). Отсюда выражение для корреляционной функции принимает вид

$$k(\tau) = \langle \eta(\tau)\eta(0) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1}(\tau) M_{2k+1}^2, \quad (20)$$

где  $M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \rho_0 \varphi_n d\eta$ . В силу нечётности подынтегральной функции  $M_{2n} = 0$ . В первом приближении [15]  $\varphi_1$  определяется интегралом ошибок, поэтому  $M_1 = \eta_0$ .

Вычисляя фурье-образ корреляционной функции, находим спектральную плотность шума

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2}{(v_{2n+1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (21)$$

где были учтены следующие очевидные равенства:  $k_{n1} + k_{n2} = -\gamma$  и  $k_{n1}k_{n2} = v_n^2$ .

Перейдём к расчёту отклика бистабильной системы на сигнал, который определяется возмущённой частью  $\tilde{\rho}$  функции распределения:

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \tilde{\rho}(t, \eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(t) M_n. \quad (22)$$

Уравнение для  $\tilde{C}_n$  получается в результате подстановки (14) в (13):

$$\frac{d^2 \tilde{C}_n}{dt^2} + \gamma \frac{d \tilde{C}_n}{dt} + v_n^2 \tilde{C}_n = h \cos(\omega_s t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n' \rho d\eta, \quad (23)$$

$$\tilde{C}_n|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d \tilde{C}_n}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Отметим, что  $\tilde{C}_{2n} = 0$ , т.к. правая часть уравнения (23) обращается в нуль для чётных индексов.

Для определения стационарного отклика системы на сигнал достаточно найти только решение неоднородного уравнения (23), которое имеет вид

$$\tilde{C}_{2n+1}(t) = \frac{h \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \varphi_{2n+1}' d\eta}{[(v_{2n+1}^2 - \omega_s^2)^2 + (\gamma\omega_s)^2]^{1/2}} \times \cos(\omega_s t - \psi_{2n+1}), \quad (24)$$

$$\tan \psi_{2n+1} = \frac{\gamma\omega_s}{v_{2n+1}^2 - \omega_s^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \varphi_{2n+1}' d\eta = \frac{v_{2n+1}^2}{\theta} M_{2n+1}.$$

В результате подстановки (24) в (22) получаем

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \frac{h}{\theta} [a_s \cos(\omega_s t) + b_s \sin(\omega_s t)], \quad (25)$$

$$a_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{2n+1}^2 (v_{2n+1}^2 - \omega_s^2)}{(v_{2n+1}^2 - \omega_s^2)^2 + (\gamma\omega_s)^2} M_{2n+1}^2, \quad (26)$$

$$b_s = \gamma\omega_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{2n+1}^2}{(v_{2n+1}^2 - \omega_s^2)^2 + (\gamma\omega_s)^2} M_{2n+1}^2. \quad (27)$$

Для расчёта сумм, содержащихся в формулах (21), (26) и (27), заметим [9], что весовые множители  $M_{2n+1}^2$  убывают с ростом индекса  $n$  быстрее, чем  $(2n+1)^{-3}$  и, следовательно, основной вклад в эти суммы дают члены с двумя первыми СЗ. Поэтому в данных суммах выделяем первый член ряда, соответствующий СЗ  $v_1^2$ , а отвечающие высшим СЗ остаточные суммы рядов заменяем следующими выражениями, описывающими эффективные резонансные кривые:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2}{(v_{2n+1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \simeq \frac{v_{\text{eff}}^2}{(v_{\text{eff}}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \frac{\theta}{2\alpha}, \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{2n+1} (v_{2n+1}^2 - \omega^2) M_{2n+1}^2}{(v_{2n+1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \simeq \frac{v_{\text{eff}}^2 (v_{\text{eff}}^2 - \omega^2)}{(v_{\text{eff}}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \frac{\theta}{2\alpha}, \quad (29)$$

где  $v_{\text{eff}}^2$  – эффективное высшее СЗ и для температур  $\theta \leq W_0$  принята во внимание оценка [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2 \simeq \frac{\theta}{2\alpha}.$$

Найдём эффективное СЗ  $v_{\text{eff}}^2$  из условий равенства площадей под резонансными кривыми, описываемыми левыми и правыми частями равенств (28) и (29). Рассматривая небольшие по сравнению с  $W_0$  температуры, после интегрирования по частоте и аналогичных [9] вычислений возникающих при этом сумм находим  $v_{\text{eff}} \simeq \omega_0$ . Отметим, что асимптотики эффективных резонансных кривых для больших и малых частот  $\omega$  совпадают с асимптотиками частичных сумм (28) и (29). Кроме того, оценка  $v_2$  в первом приближении по методике [15] с точностью до численного множителя порядка единицы приводит к значению  $v_{\text{eff}}$ . Поэтому аппроксимация данных сумм эффективными резонансными кривыми приводит к небольшой погрешности вследствие быстрого убывания членов сумм с ростом индекса суммирования. Учтёт основного и эффективного высшего СЗ можно назвать приближением двух времён релаксации, т.к.  $\gamma/v_1^2$  и  $\gamma/\omega_0^2$  определяют соответственно кинетическое и динамическое времена релаксации бистабильной системы. И наконец, обращаем внимание на то, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  полученное решение (25)–(29) совпадает с реакцией (3) системы на слабый сигнал в отсутствие шума, а в пределе низких частот  $\omega_s$  сигнала – с результатами анализа [9] ланжевеновского уравнения (4). Заметим, что более точная оценка величины  $v_{\text{eff}}$  приведёт к слабой зависимости её от температуры  $\theta$ .

#### 4. Отношение сигнал/шум и коэффициент передачи

Для слабых сигналов отношение сигнал/шум S/N определим как отношение квадрата амплитуды сигнала к спектральной плотности шума на частоте сигнала. На входе и выходе бистабильной системы выражения для отношений сигнал/шум имеют вид

$$(S/N)_{\text{in}} = \frac{\pi h^2}{2\varepsilon}, \quad (S/N)_{\text{out}} = \frac{h^2 (a_s^2 + b_s^2)}{\theta^2 N(\omega_s)}. \quad (30)$$

Фильтрующие свойства рассматриваемой системы можно характеризовать коэффициентом передачи

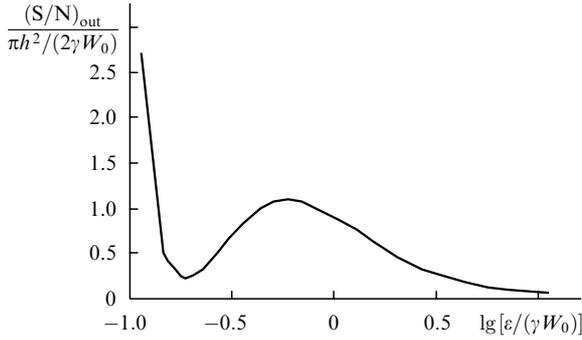


Рис.1. Зависимость нормированного отношения сигнал/шум от интенсивности шума при  $\gamma/v_{\text{eff}} = 1$ ,  $\omega_s/v_{\text{eff}} = 0.017$ .

$$q = \frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}}$$

выражение для которого после несложных преобразований с учётом (28) и (29) принимает вид

$$q = \frac{(pA_2 + A_1)^2 + (\gamma\omega_s)^2(p + 1)^2}{pA_2^2 + A_1^2 + (\gamma\omega_s)^2(p + 1)}, \quad (31)$$

где  $p = 8W_0v_1^2/(\theta\omega_0^2)$ ;  $A_1 = v_1^2 - \omega_s^2$ ;  $A_2 = \omega_0^2 - \omega_s^2$ .

Полученные формулы были использованы для расчёта  $(S/N)_{\text{out}}$  и  $q$  в зависимости от параметров задачи. В области низких частот сигнала ( $\omega_s \ll \omega_0$ ) в рассматриваемой системе второго порядка, как и в системе первого порядка, имеет место эффект СР, который проявляется в виде локального максимума зависимости отношения сигнал/шум от интенсивности шума, приведённой на рис.1. Наблюдаемый максимум соответствует условию  $\omega_s \simeq v_1^2/\gamma$ . С точки зрения фильтрации слабых сигналов данный эффект малоинтересен, т. к. для параметров системы, при которых он наблюдается, коэффициент передачи всегда меньше единицы.

Частотная зависимость интенсивности выходного сигнала представлена на рис.2. Для выбранного небольшого по сравнению с  $\omega_0$  коэффициента трения зависимость имеет два характерных максимума и плато в области низких частот. Первый максимум (в области низких частот) наблюдается только при наличии шума и соответствует частоте сигнала  $\omega_s = v_1^2/\gamma$ . Второй максимум (на высоких частотах) отвечает собственным колебаниям вблизи дна потенциальной ямы, происходящим с частотой  $\omega_0$ . С уменьшением интенсивности шума  $\epsilon$  первый максимум сдвигается в область низких частот с

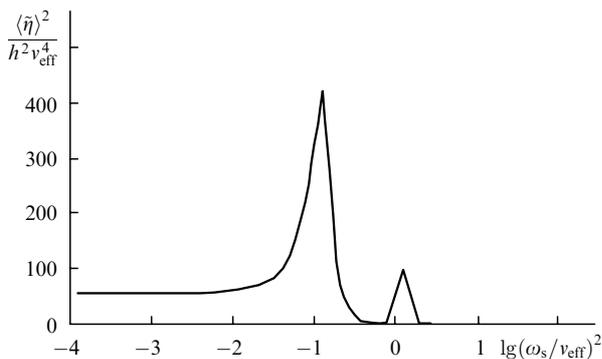


Рис.2. Зависимость нормированной интенсивности выходного сигнала от его частоты при  $\gamma/v_{\text{eff}} = 0.1$ ,  $W_0/\theta = 0.8$ .

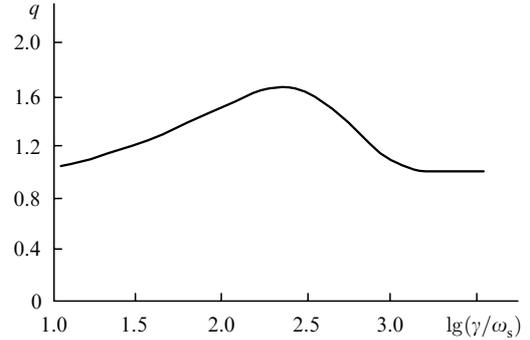


Рис.3. Зависимость коэффициента передачи от коэффициента трения при  $\omega_s/v_{\text{eff}} = 1$ ,  $\omega_s W_0/\epsilon = 0.005$ .

одновременным ростом плато, а высота второго максимума уменьшается вплоть до его исчезновения. При дальнейшем уменьшении  $\epsilon$  второй максимум снова появляется, высота его растёт с одновременным уменьшением высоты первого максимума. В отсутствие шума остаётся только второй максимум на частоте  $\omega_0$ .

Расчёты зависимости спектральной плотности шума от частоты показали, что она ведёт себя подобно кривой на рис.2, и, как следствие этого, отношение сигнал/шум и коэффициент передачи с ростом частоты сигнала увеличиваются и достигают насыщения при  $\omega_s \geq \omega_0$ , т. е. область высоких частот сигнала наиболее благоприятна для фильтрации. Действительно, как следует из (31), для  $\omega_s \geq \omega_0$  и  $\gamma \gg \omega_s$  коэффициент передачи  $q = 1 + p$ . На практике интенсивность шума  $\epsilon$  является заданной величиной, поэтому удобнее варьировать не  $\epsilon$ , а  $\gamma$ . На рис.3 приведена зависимость  $q$  от  $\gamma$  при  $\omega_s = \omega_0$ . Видно, что для выбранных параметров системы эта зависимость имеет локальный максимум, и, следовательно, существует оптимальный коэффициент трения  $\gamma$ , определяемый из условия  $\theta = W_0$ . При этом коэффициент передачи  $q$  принимает наибольшее значение, равное 1.66. Поскольку величина  $\epsilon$  задана, то аналогичную зависимость от  $\gamma$  имеет отношение сигнал/шум на выходе.

### 5. Заключение

Построенная теория применима для малых амплитуд сигналов и коэффициентов трения, удовлетворяющих неравенствам (10). Конечные формулы найдены в приближении двух времён релаксации, когда суммы (28) и (29) аппроксимируются эффективными резонансными кривыми. Мы считаем, что из-за быстрого убывания членов данных рядов с ростом их индекса суммирования возникающая при этой аппроксимации погрешность не превышает 20%. Полученные результаты приводят к правильному решению (3) ланжевеновского уравнения (1) при стремлении интенсивности шума к нулю. В пределе низких частот сигналов  $\omega_s$  формулы содержат результаты [9], полученные при решении ланжевеновского уравнения (4) первого порядка.

Проведённый анализ показал, что в рассмотренной нелинейной системе второго порядка так же, как и в системе первого порядка, реализуется эффект СР для  $\omega_s \ll \omega_0$ . В области высоких частот сигналов ( $\omega_s \gg \omega_0$ ) реализуется эффект стохастической фильтрации, т. е. коэффициент передачи превышает единицу. Для заданной интенсивности шума  $\epsilon$  в области высоких частот  $\omega_s$  существует оптимальный коэффициент трения  $\gamma_{\text{opt}} = \epsilon/W_0$ , при кото-

ром коэффициент передачи  $q$  принимает наибольшее значение, равное 1.66.

Таким образом, в системе второго порядка существуют оптимальные условия приёма слабых сигналов, и мы уверены, что теоретически предсказанный эффект стохастической фильтрации, как наиболее интересный с практической точки зрения, вполне может быть обнаружен в оптических бистабильных системах как первого, так и второго порядка.

1. McNamara B., Wiesenfeld K., Roy R. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 2626 (1988).
2. Bartussek R., Hanggi P., Jung P. *Phys. Rev. E.*, **49**, 3930 (1994).
3. Barbay S. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4652 (2000).
4. Gammaioni L. et al. *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223 (1998).
5. Анищенко В.С. и др. *УФН*, **169**, 7 (1999).
6. Hanggi P. et al. *Phys. Rev. E*, **62**, 6155 (2000).
7. Карташов В.М. и др. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 9, 19 (2000).
8. Карташов В.М. и др. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 9, 12 (2000).
9. Решетняк С.А., Щеглов В.А. *Квантовая электроника*, **33** (2), 142 (2003).
10. Климонтович Ю.Л. *УФН*, **169**, 39 (1999).
11. Alfonsi L. et al. *Phys. Rev. E*, **62**, 299 (2000).
12. Zhang Xue-Juan. *J. Phys. A*, **34**, 10859 (2001).
13. Kang Y.M., Xu J.X., Xie Y. *Phys. Rev. E*, **68**, 6123 (2003).
14. Kramers H.A. *Physika (The Hague)*, № 7, 284 (1940).
15. Решетняк С.А., Шелепин Л.А. *Квазистационарные распределения в кинетике* (М.: ИПО «Автор», 1996).