

Непрерывное стоксово саморассеяние оптического импульса в одноосном кристалле при условиях резонанса Захарова – Бенни

С.В.Сазонов, А.Ф.Соболевский

Предложен новый механизм непрерывного преобразования частоты вниз импульса, распространяющегося в одноосном кристалле, при выполнении условий резонанса Захарова – Бенни между его обыкновенной и необыкновенной составляющими. В отличие от эффекта вынужденного комбинационного саморассеяния здесь красный частотный сдвиг обыкновенной компоненты испытывает насыщение, достигая на некоторой длине распространения максимального значения, пропорционального входной интенсивности импульса. При этом обыкновенная составляющая генерирует предельно короткий одиночный импульс необыкновенной волны, распространяясь с последним в солитонном режиме. Показано, что данное явление возможно только в кристалле с положительным двулучепреломлением.

Ключевые слова: стоксово саморассеяние, резонанс Захарова – Бенни, одноосный кристалл, солитон.

1. Введение

Открытие различных механизмов нелинейного частотного преобразования когерентных оптических импульсов стимулировало создание лазеров с динамической перестройкой частоты [1]. Одним из наиболее эффективных механизмов непрерывного частотного преобразования является вынужденное комбинационное саморассеяние (ВКС) [2–5]. Данный эффект проявляется при подаче на комбинационно-активную среду фемтосекундных лазерных импульсов, из-за малой длительности которых τ_p их спектр шириной $\delta\omega \sim 1/\tau_p$ уже на входе содержит несущую частоту ω , а также стоксов компоненту $\omega - \omega_v$, где ω_v – частота оптической колебательной моды комбинационно-активных молекул. В результате по мере распространения фемтосекундных импульсов происходит когерентное раскачивание колебательных оптических мод среды, сопровождающееся непрерывным изменением спектрального состава оптических сигналов. Когда роль дисперсии существенна, реализуется солитонный режим ВКС, при котором спектр импульса как единое целое смещается в красную область. Величина данного смещения растет с увеличением импульсной интенсивности [5] и может значительно превышать ω_v . Таким образом, ВКС есть результат нелинейного взаимодействия между полем короткого светового импульса и колебательными модами молекул среды. Воздействие этого поля на моды определяется, как известно, квадратом напряженности поля.

В оптически одноосных кристаллах поле светового импульса имеет две компоненты – обыкновенную (E_o) и необыкновенную (E_e), между которыми из-за квадратичной нелинейности при определенных условиях может происходить эффективное взаимодействие. Для импульсов пикосекундной длительности, рассматриваемых в настоящей работе, основной вклад в квадратичную нелинейность в оптически одноосных кристаллах вносят нерезонансные электронно-оптические переходы [6]. В этом случае говорят, что спектр импульса лежит в области оптической прозрачности кристалла.

Квадратичная нелинейность была с успехом использована в процессах параметрического непрерывного преобразования частоты при выполнении условий синхронизма для трехволнового взаимодействия [7–10], определяемых законами сохранения энергии и импульса,

$$\omega_1 = \omega_2 + \Omega, \quad \mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)}, \quad (1)$$

где ω_1 – частота оптической волны, подаваемой на кристалл (накачки), которая распадается внутри кристалла на две волны с частотами ω_2 и Ω (сигнальная и холостая компоненты соответственно); $\mathbf{k}^{(1)}$, $\mathbf{k}^{(2)}$, $\mathbf{k}^{(3)}$ – волновые векторы, отвечающие данным частотам.

Изменяя угол между $\mathbf{k}^{(1)}$ и оптической осью, можно непрерывно варьировать частоты ω_2 и Ω , для которых справедливы условия синхронизма (1). Для коротких падающих на кристалл импульсов частоты ω_1 и ω_2 могут изначально содержаться в их спектре при условии, что эти частоты достаточно близки друг к другу: $\omega_1 - \omega_2 \sim 1/\tau_p \ll \omega_1, \omega_2$. На этом основан черенковский механизм генерации импульса длительностью в один период колебаний (видеоимпульс) ИК диапазона, предложенный в [11] и реализованный экспериментально в [12]. В данных работах квазимонохроматические импульсы, порождающие видеоимпульс, были достаточно мощными, так что их поле считалось заданным. При самосогласованном же подходе к решению данной задачи необходимо учитывать обратное воздействие видеоимпульса на

С.В.Сазонов. Калининградский государственный университет, Россия, 236041 Калининград, ул. Александра Невского, 14; e-mail: barab@newmail.ru

А.Ф.Соболевский. Балтийская государственная академия, Россия, 236029 Калининград, ул. Молодежная, 6; e-mail: sobolewskii@newmail.ru

Поступила в редакцию 18 апреля 2005 г., после доработки – 13 июля 2005 г.

порождающий его импульс. Таким образом, можно говорить о саморассеянии квазимонохроматического импульса в среде с квадратичной оптической нелинейностью.

Здесь напрашивается аналогия с упомянутым выше взаимодействием между колебательными молекулярными модами и оптическим импульсом. При этом роль порождаемого видеоимпульса аналогична роли оптической ветви колебаний молекул при ВКС. Принципиальное отличие заключается в том, что групповая скорость колебательных мод практически равна нулю (т. е. они не способны распространяться сами по себе), в то время как групповая скорость необыкновенной волны лишь незначительно отличается от скорости обыкновенной. По этой причине условия эффективной перекачки энергии из обыкновенной компоненты в необыкновенную должны отличаться от условий реализации ВКС. В то же время отмеченное выше сходство между двумя типами нелинейного взаимодействия наводит на мысль о принципиальной возможности перестраивания частоты (или спектра) импульса, распространяющегося в нелинейном одноосном кристалле. Нелинейность при этом имеет не комбинационную, а электронно-оптическую природу. В свою очередь причиной, по которой импульс разбивается на две различные взаимодействующие между собой компоненты, является анизотропия среды.

Исследованию процесса саморассеяния квазимонохроматических импульсов на порождаемых ими видеоимпульсах в квадратично-нелинейных оптически одноосных кристаллах и посвящена настоящая работа.

2. Нелинейные волновые уравнения и солитонный режим стоковского саморассеяния

Будем считать, что на вход кристалла подается обыкновенная волна. Прежде чем приступить к выводу нелинейных волновых уравнений, рассмотрим подробнее соотношения (1). Обозначив через θ угол между $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$, из второго соотношения получим

$$k^{(3)2} = (k^{(1)} - k^{(2)})^2 + 4k^{(1)}k^{(2)} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{2}$$

Как было сказано во Введении, будем считать, что частоты ω_1 и ω_2 достаточно близки и содержатся в спектре исходного импульса. Тогда можно записать

$$k^{(1)} - k^{(2)} \approx \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_1} (\omega_1 - \omega_2) = \frac{\Omega}{v_g},$$

где v_g – групповая скорость данного импульса. Учитывая также, что $k^{(1)} = n_1 \omega_1 / c$, $k^{(3)} = n_3 \Omega / c$ (c – скорость света в вакууме, $n_1 = n_1(\omega_1)$ и $n_3 = n_3(\Omega)$ – показатели преломления на соответствующих частотах), перепишем (2) в виде

$$\left(\frac{n_3^2}{c^2} - \frac{1}{v_g^2} \right) \Omega^2 = 4 \frac{n_1 \omega_1}{c} \left(\frac{n_1 \omega_1}{c} - \frac{\Omega}{v_g} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{3}$$

В силу сказанного выше $\Omega \ll \omega_1$.

Выражение (3) можно рассматривать как уравнение, определяющее Ω в зависимости от угла θ и от несущей частоты ω_1 падающего импульса. Заметим, что в коллинеарном режиме ($\theta = 0$) и при условии

$$v_g = \frac{c}{n_3} \tag{4}$$

уравнение (3) обращается в тождество и Ω может принимать любое значение, т. е. становится свободным параметром. Таким образом, в данных условиях величина Ω не может быть определена из законов сохранения при элементарных процессах рассеяния. Очевидно, Ω имеет смысл смещения в красную область частоты ω_1 исходного импульса при его распространении в нелинейной среде.

Условие (4) соответствует предельному случаю трехволнового взаимодействия, когда $\omega_1, \omega_2 \gg \Omega$ и $k^{(1)}, k^{(2)} \gg k^{(3)}$. Действительно, при данных условиях из (3) находим

$$\frac{\Omega}{k^{(3)}} = \frac{c}{n_3} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k^{(1)} - k^{(2)}} \approx \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega=\omega_1} = v_g,$$

т. е. фазовая скорость низкочастотной волны равна групповой скорости высокочастотной волны. В теории нелинейных волн такое условие называют резонансом Захарова – Бенни (РЗБ) [13, 14].

Будем считать, что лазерный импульс, плоскость поляризации которого совпадает с плоскостью поляризации обыкновенной волны, подается на кристалл вдоль оси z , образующей некоторый угол φ с оптической осью c (рис. 1). Будем считать также, что спектр импульса лежит в области оптической прозрачности кристалла, где дисперсию можно полагать относительно малой [15]. По этой причине дисперсию будем учитывать только в линейной части отклика среды. Квадратичную же нелинейность учтем безынерционным образом с помощью тензоров нелинейной восприимчивости второго порядка. Волновые уравнения запишем в виде

$$\Delta E_{e,o} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{e,o}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{e,o}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Для поляризаций P_o и P_e запишем:

$$P_o = \int_0^\infty \tilde{\chi}_o(\tau) E_o(t - \tau) d\tau + 2\chi_{eo} E_e E_o, \tag{6}$$

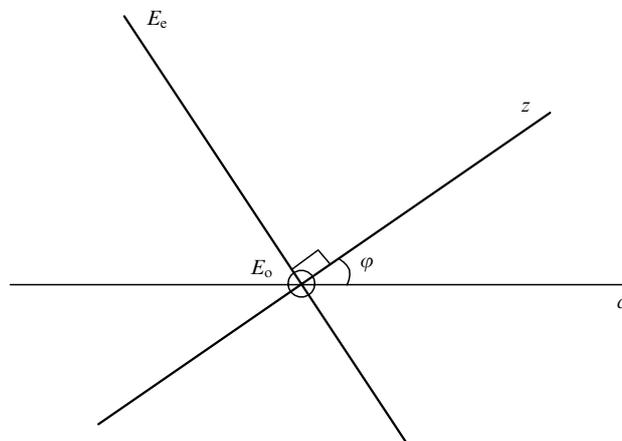


Рис.1. Геометрия распространения оптического импульса в одноосном кристалле; c – оптическая ось, z – направление распространения импульса.

$$P_e = \int_0^\infty \tilde{\chi}_e(\tau) E_e(t - \tau) d\tau + \chi_{eo} E_o^2 + \chi_{ee} E_e^2, \quad (7)$$

где $\tilde{\chi}_o(\tau) = \chi_{xx}^{(1)}(\tau)$, $\tilde{\chi}_e(\tau) = \chi_{yy}^{(1)}(\tau)$ – обыкновенная и необыкновенная компоненты тензора линейной электронной восприимчивости, учитывающие временное запаздывание отклика (дисперсию); $\chi_{eo} = \chi_{xy}^{(2)} = \chi_{yx}^{(2)} = \chi_{yx}^{(2)}$, $\chi_{ee} = \chi_{yy}^{(2)}$ – ненулевые компоненты тензора безынерционной квадратичной восприимчивости.

Отметим, что в (6) и (7) учитываются свойства симметрии одноосной среды: инвариантность относительно пространственных отражений, нормальных к оптической оси. Поскольку компоненты E_o и P_o перпендикулярны этой оси и являются полярными векторами, то при данных отражениях $P_o \rightarrow -P_o$, $E_o \rightarrow -E_o$. При пространственной же инверсии в любых других направлениях данная инвариантность нарушается, поэтому выражения (6) и (7) не инвариантны относительно преобразования $P_e \rightarrow -P_e$, $E_e \rightarrow -E_e$ (см. рис.1).

Оптически одноосными являются кристаллы средней категории симметрии. К этой категории относятся три сингонии: тригональная, тетрагональная и гексагональная. Кристаллы данных сингоний имеют одинаковую структуру тензора линейной восприимчивости, приведенного к главным осям [16]. Для примитивных ячеек цилиндрическая симметрия отсутствует, а существует лишь симметрия при повороте на углы 120°, 90° и 60°. Однако для описания оптических свойств этих кристаллов достаточно рассматривать их как аксиально симметричные среды. При этом количество ненулевых компонент нелинейной восприимчивости нечувствительно к виду сингонии, поскольку длина волны оптического диапазона значительно превышает межатомные расстояния.

Подставив (6) и (7) в (5), придём к системе нелинейных волновых уравнений

$$\Delta E_o - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty \tilde{\chi}_o(\tau) E_o(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau + 2\chi_{eo} E_e E_o \right], \quad (8)$$

$$\Delta E_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty \tilde{\chi}_e(\tau) E_e(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau + \chi_{eo} E_o^2 + \chi_{ee} E_e^2 \right]. \quad (9)$$

Поскольку компонента E_o обладает несущей частотой ω , она может быть представлена в виде

$$E_o(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega t - kz)] + \text{компл. сопр.}, \quad (10)$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$ – медленно меняющаяся огибающая; k – волновое число.

Как уже отмечено, на вход кристалла подаётся обыкновенная компонента. В этом случае, как видно из (6) и (7), необыкновенная компонента E_e может быть центрирована либо на частоте 2ω , либо на нулевой частоте. Первый случай соответствует известному эффекту генерации второй гармоники, а второй – при определенных условиях – генерации видеоимпульса [7, 17]. Именно во втором случае просматривается некоторое сходство с те-

орией эффекта ВКС [5], где нормальные оптические колебательные моды, в отличие от светового поля, не имеют несущей частоты. Различие заключается в том, что групповая скорость оптических колебательных мод молекулы практически равна нулю, в то время как у компоненты E_e она близка к скорости обыкновенной волны E_o .

Следуя [18], в силу медленного изменения огибающей ψ на временах порядка τ используем разложение в ряд Тейлора по τ :

$$\int_0^\infty \tilde{\chi}_o(\tau) E_o(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau = \left[\chi_o(\omega) \psi - i \left(\frac{\partial \chi_o}{\partial \omega} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi_o}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \exp[i(\omega t - kz)] + \text{компл. сопр.}, \quad (11)$$

где частотная восприимчивость

$$\chi_o(\omega) = \int_0^\infty \tilde{\chi}_o(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Из-за отмеченной выше относительной слабости дисперсии в подинтегральном выражении правой части (9) также справедливо разложение по τ

$$\int_0^\infty \tilde{\chi}_e(\tau) E_e(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau = \chi_e(0) E_e(\mathbf{r}, t) - \chi_e'(0) \frac{\partial E_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\chi_e''(0)}{2} \frac{\partial^2 E_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (12)$$

где

$$\chi_e(0) = \int_0^\infty \chi_e(\tau) d\tau$$

– безынерционная часть восприимчивости;

$$\chi_e'(0) = \int_0^\infty \tau \chi_e(\tau) d\tau; \quad \chi_e''(0) = -2 \int_0^\infty \tau^2 \chi_e(\tau) d\tau.$$

В (12) членом $\sim \partial E_e / \partial t$ описывается затухание поляризационного отклика среды за счет процессов необратимой релаксации с характерным временем T_2 , которое определяется коэффициентом $\chi_e'(0)$. Для пикосекундного импульса и широкого класса кристаллов с хорошим запасом выполняется условие $\tau_p \ll T_2$, поэтому слагаемым $\sim \partial E_e / \partial t$ в (12) можно пренебречь. В подтверждение сказанного обратимся к формуле Селлмейера

$$\chi_e = \chi_e(0) \frac{\omega_e^2}{\omega_e^2 - i\gamma\omega - \tilde{\omega}^2},$$

где ω_e – характерная частота электронно-оптических переходов, возбуждаемых необыкновенной волной; $\gamma = 1/T_2$; $\tilde{\omega}$ – характерная частота в спектре E_e .

Для области прозрачности ($\tilde{\omega}^2 \ll \omega_e^2$) справедливо разложение

$$\chi_e = \chi_e(0) \left(1 + i\gamma \frac{\tilde{\omega}}{\omega_e^2} + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_e^2} \right).$$

Совершая замену $\tilde{\omega} \rightarrow i\partial/\partial t$ и используя соотношение $P_e = \chi_e E_e$, придём к (12).

Ещё раз подчеркнём, что разложения (11) и (12) имеют различное физическое обоснование, т. к. в (11) ψ – огибающая обыкновенной волны, а в (12) E_e – само поле необыкновенной компоненты.

Подставляя (11), (12) в (8), (9) и пренебрегая относительно быстро осциллирующими слагаемыми, получаем

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \beta_{eo}E_e\psi + \frac{c}{2n_o\omega}\Delta_{\perp}\psi, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha_{eo}|\psi|^2 + \alpha_{ee}E_e^2) - \delta_e\frac{\partial^4 E_e}{\partial t^4} - \Delta_{\perp}E_e, \quad (14)$$

где $v_g = c/[n_o + \omega(\partial n_o/\partial\omega)]$ – групповая скорость обыкновенной волны; $n_o = n_o(\omega) = [1 + 4\pi\chi_o(\omega)]^{1/2}$ и $n = [1 + 4\pi\chi_e(0)]^{1/2}$ – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления соответственно; $k_2 = \partial(1/v_g)/\partial\omega$ – параметр дисперсии групповой скорости (ДГС) обыкновенной волны; $\beta_{eo} = 2\pi\omega\chi_{eo}/c$, $\alpha_{eo} = 8\pi\chi_{eo}/c^2$, $\alpha_{ee} = 4\pi\chi_{ee}/c^2$ – коэффициенты нелинейности; $\delta_e = 2\pi\chi_e''(0)/c^2$ – параметр дисперсии необыкновенной волны; Δ_{\perp} – поперечный лапласиан.

Из системы (13), (14) видно, что огибающая ψ обыкновенной волны играет доминирующую роль: если на вход в среду подать импульс, поляризованный в плоскости обыкновенной волны, то за счет нелинейности (второе слагаемое в скобках правой части (14)) в среде начнет генерироваться видеоимпульс необыкновенной волны; в то же время из (13) следует, что необыкновенная волна неспособна породить обыкновенную при отсутствии последней на входе в среду. Данная асимметрия присуща именно оптически одноосным кристаллам и обусловлена отмеченной выше инвариантностью уравнений относительно операции $E_o \rightarrow -E_o$ и ее нарушением при $E_e \rightarrow -E_e$. По этой причине в системе уравнений (13), (14) пренебрежем собственными дисперсией и нелинейностью необыкновенной волны как эффектами более высокого порядка малости.

Основной вклад в дисперсию вносится обыкновенной волной (последнее слагаемое в левой части (13)). В правой части (14) оставим только нелинейность, создаваемую обыкновенной волной (слагаемое $\partial^2(\alpha_{eo}|\psi|^2)/\partial t^2$). Для дальнейшего анализа в (14), кроме того, удобно перейти к приближению квазиоднонаправленного распространения [14]. Это возможно в силу того, что нелинейность в данном случае имеет характер разложения по степеням напряженности поля. Таким образом, в правой части (14) имеем члены более высокого порядка малости, что дает основание пренебречь волной, отраженной от неоднородностей среды, создаваемых за счет нелинейности. Суммируя сказанное, преобразуем (13) и (14) в систему

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} = \beta_{eo}E_e\psi + \frac{c}{2n_o\omega}\Delta_{\perp}\psi, \quad (15)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial z} = -\alpha\frac{\partial}{\partial \tau}(|\psi|^2) + \frac{c}{2n}\Delta_{\perp}\int_{-\infty}^{\tau} E_e d\tau',$$

где $\alpha = c\alpha_{eo}/(2n)$, $\tau = t - nz/c = t - z/v_g$. Здесь принято во внимание условие (4).

В отсутствие поперечных возмущений система (15) переходит в интегрируемую систему Ядзимы–Ойкавы [19], которая имеет односолитонное решение вида

$$\psi = \psi_m \exp[-i(\Omega t - qz)] \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \quad (16)$$

$$E_e = E_{em} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right),$$

где

$$\psi_m = \frac{|k_2|}{\tau_p} \left(\frac{\Omega}{\alpha\beta_{eo}}\right)^{1/2}; \quad (17)$$

$E_{em} = -k_2/(\beta_{eo}\tau_p^2)$; скорость распространения v определяется соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n_e}{c} - k_2\Omega.$$

Решение (16) зависит от двух свободных параметров: длительности τ_p и нелинейного сдвига Ω частоты обыкновенной компоненты солитона. Из выражения для ψ_m (17) следует, что $\Omega \geq 0$. Отсюда, а также из (16) и (10) приходим к выводу о сдвиге частоты обыкновенной составляющей в красную область спектра: $\omega \rightarrow \omega - \Omega$. Данный сдвиг можно трактовать как непрерывное «покраснение» фотонов обыкновенной компоненты при передаче части своей энергии необыкновенной волне, представляющей собой однополярный видеоимпульс (см. второе выражение (16)). В конце концов этот процесс стабилизируется, и формируется солитон вида (16) с постоянным сдвигом частоты Ω . Можно сказать, что в процессе формирования обыкновенно-необыкновенного солитона наступает насыщение сдвига частоты в стоксову область. С физической точки зрения данное насыщение объясняется тем, что при частотном сдвиге начинает нарушаться условие (4) и, как следствие, падает эффективность перекачки энергии из обыкновенной волны в необыкновенную.

Величина Ω зависит от входных параметров оптического импульса и может быть определена из соответствующей обратной спектральной задачи рассеяния. Другой способ определения частотного сдвига состоит в непосредственном численном интегрировании (13), (14) или (15). Здесь же отметим, что, как следует из выражения (17), $\Omega \sim \psi_m^2 \sim I_o$ где I_o – интенсивность обыкновенной компоненты. Отсюда можно сделать вывод, что величина красного сдвига пропорциональна интенсивности входного импульса, поляризованного в плоскости обыкновенной волны. Как было отмечено в разд.2, при $\theta = 0$ и условии (4) величина Ω не может быть определена из законов сохранения энергии и импульса при элементарных актах рассеяния фотона на фотоне. Поскольку $I_o \sim n_{ph}$, где n_{ph} – концентрация фотонов, образующих обыкновенную компоненту импульса, то можно сказать, что сдвиг Ω в данных условиях определяется не элементарными, а коллективными актами рассеяния. Аналогичная ситуация имеет место при ВКС [2–5, 20]. Используя формулу (17), выражения для α , β_{eo} и оценку $k_2 \sim (c\omega)^{-1}$, находим

$$\frac{\Omega}{\omega} \sim \frac{32\pi^3}{c} I_o \chi_{eo}^2(\omega\tau_p)^2. \quad (18)$$

Взяв $\tau_p \sim 1$ пс, $I_0 \sim 10^{11}$ Вт/см², $\omega \sim 10^{15}$ с⁻¹, а для кристалла типа KDP $\chi_{co} \sim 10^{-9}$ СГСЭ [21], найдем $\Omega/\omega \sim 0.1$. Таким образом, при РЗБ в одноосном кристалле можно ожидать достаточно эффективного преобразования частоты входного импульса в красную область.

Оценим в этих условиях интенсивность видеоимпульса необыкновенной волны:

$$I_e \cong \frac{E_{em}^2 I_0}{\psi_m^2} \sim \frac{I_0}{\omega \Omega \tau_p^2}.$$

При вышеприведенных параметрах имеем $I_e \sim 10^{-5} I_0 \sim 10^6$ Вт/см², т. е. интенсивность необыкновенной составляющей значительно меньше интенсивности обыкновенной компоненты. Этим, кстати, хорошо оправдывается то обстоятельство, что в (13), (14) мы пренебрегли собственной нелинейностью необыкновенной волны и ее дисперсией.

Определим области значений несущих частот подаваемых на кристалл импульсов, при которых может выполняться условие (4). Заметим, что (4) можно переписать в виде

$$n(0, \varphi) = n_o(\omega) + \omega \frac{\partial n_o}{\partial \omega}. \quad (19)$$

В то же время зависимость n от φ определяется выражением [22]

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n_e^2}, \quad (20)$$

где n_e – необыкновенный показатель преломления, равный n при $\varphi = 90^\circ$. Уравнения (19) и (20) в общем случае определяют зависимость несущей частоты входного импульса от угла φ , при выполнении которой проявится рассмотренное здесь его стоксово саморасcеяние.

Заметим вначале, что в области прозрачности среды $\partial n_o / \partial \omega > 0$. Следовательно, стоксово саморасcеяние, как видно из (19), возможно лишь в кристаллах с положительным двулучепреломлением ($n_e > n_o$). Кроме того, в области прозрачности справедливо разложение [15]

$$n_o^2(\omega) - 1 = A \left[1 + a \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dots - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^2 a' \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \dots \right],$$

где A – постоянная, связанная с безынерционной частью \tilde{n}_o показателя преломления выражением $A = \tilde{n}_o^2 - 1$; ω_{pe} и ω_{pi} – электронная и ионная плазменные частоты соответственно; ω_0 – характерная частота электронно-оптических переходов; $a, a' \dots$ – эмпирические постоянные порядка единицы. Группа слагаемых, входящих в правую часть со знаком «+», описывает электронный отклик кристалла, со знаком «-» – ионный.

Так как последнее выражение имеет характер разложения, то $a\omega^2/\omega_0^2, (\omega_{pi}/\omega_{pe})^2 a' \omega_0^2/\omega^2, \dots \ll 1$. Тогда его можно приближенно переписать в виде

$$n_o(\omega) = \tilde{n}_o + \frac{\tilde{n}_o^2 - 1}{2\tilde{n}_o} \left[3a \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^2 a' \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19) переписем условие РЗБ в виде

$$n(0) - \tilde{n}_o = \frac{\tilde{n}_o^2 - 1}{2\tilde{n}_o} \left[9a \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^2 a' \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]. \quad (22)$$

Разрешая данное уравнение относительно ω , найдем несущие частоты импульсов, подвергаемые в кристалле преобразованию в красную область:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\tilde{n}_o^2 \omega_0^2}{9a(\tilde{n}_o^2 - 1)} \left\{ n - \tilde{n}_o \pm \left[(n - \tilde{n}_o)^2 - 9aa' \times \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{\tilde{n}_o^2 - 1}{\tilde{n}_o} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (23)$$

Из условия положительности выражения в квадратных скобках приходим к ограничению

$$n - \tilde{n}_o > 3 \frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \frac{\tilde{n}_o^2 - 1}{\tilde{n}_o} (aa')^{1/2}. \quad (24)$$

Используя (20), переписем (24) в виде

$$\sin^2 \varphi > \sin^2 \varphi_{\min} = 3 \frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \frac{\tilde{n}_o^2 - 1}{\tilde{n}_o (n_e - \tilde{n}_o)} (aa')^{1/2}. \quad (25)$$

Таким образом, мы имеем ограничение снизу на угол между оптической осью и направлением распространения импульса. По этой причине в (6) и (7) оправданно отбрасывание кубических по полю нелинейностей, которые могут быть доминирующими при малых значениях φ (при $\varphi = 0$ квадратичные восприимчивости строго равны нулю в силу аксиальной симметрии).

Кроме того, из (23) следует зависимость значений ω_{\pm} от φ . Следовательно, выполнения условия РЗБ можно добиться, изменяя φ , а также несущую частоту входного импульса обыкновенной волны. Поскольку в кристаллах с положительным двулучепреломлением зависимость $n(\varphi)$ является монотонно возрастающей, то с увеличением φ частота ω_+ растет, достигая при $\varphi = 90^\circ$ максимального значения, определяемого (18) с учетом замены $n \rightarrow n_e$. В то же время, как легко видеть, ω_- уменьшается с увеличением φ (рис.2).

Считая, что $a, a' \sim 1, \omega_{pi}/\omega_{pe} \sim 10^{-2}, (\omega/\omega_0)^2 \sim 10^{-2}$ и $\tilde{n}_o^2 \cong 2$, получаем $n_e - n_o > 10^{-2} - 10^{-3}$, что реализуется для широкого класса одноосных кристаллов [23].

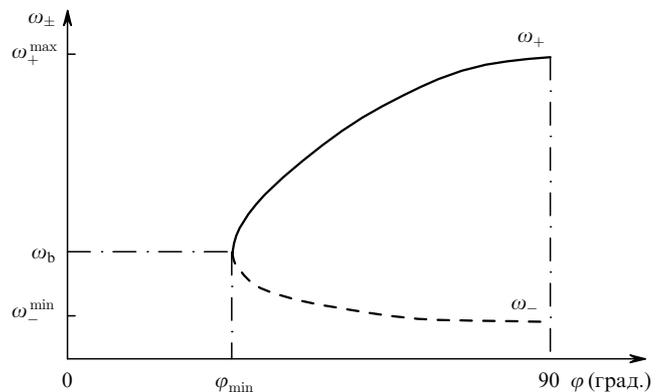


Рис.2. Связь между несущей частотой входного импульса ω_{\pm} и углом φ его распространения по отношению к оптической оси при эффективном стоксовом преобразовании в режиме РЗБ. Ветвь ω_+ (сплошная линия) соответствует положительной ДГС, ω_- (штриховая линия) – отрицательной; в спектральном интервале $\omega_b < \omega < \omega_+^{\max}$ нелинейность имеет дефокусирующий характер, а в интервале $\omega_-^{\min} < \omega < \omega_b$ – фокусирующий, где граничная частота $\omega_b = \omega_0 \tilde{n}_o / 3 [(n - \tilde{n}_o) / a(\tilde{n}_o^2 - 1)]^{1/2}$.

Несущие частоты ω_+ и ω_- , определяемые (23), будем называть соответственно высокой и низкой. Оценки показывают, что $\omega_+ \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\omega_- \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$, т.е. высокая частота принадлежит видимому диапазону, а низкая – ближнему ИК диапазону. Кроме того, для параметра k_2 ДГС имеем

$$k_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = 3a\omega \frac{\tilde{n}_0^2 - 1}{\tilde{n}_0} \left[1 - \frac{a'}{a} \left(\frac{\omega_{\text{pi}}}{\omega_{\text{pe}}} \right)^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \right]. \quad (26)$$

Отсюда и из (23) следует важный вывод о том, что при ω_+ ДГС в среде положительна ($k_2 > 0$), а при ω_- – отрицательна ($k_2 < 0$). Это обстоятельство, как будет показано ниже, имеет важное значение в вопросе влияния поперечных возмущений.

3. Учет поперечных возмущений

С точки зрения возможных экспериментов важен вопрос устойчивости солитона (16) по отношению к поперечным возмущениям. Учтем последние с помощью метода «усредненного лагранжиана» типа Уизема [24].

Системе (15) соответствует плотность лагранжиана

$$L = \frac{i}{2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{k_2}{2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|^2 - \beta_{\text{eo}} |\psi|^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{c}{2n_0\omega} |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \frac{\beta_{\text{eo}}}{2\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{c}{2n} (\nabla_{\perp} u)^2 \right], \quad (27)$$

где переменная u связана с напряженностью поля не обыкновенной волны соотношением $E_e = \partial u / \partial \tau$.

Отталкиваясь от одномерных солитонов (16), в качестве пробных решений, в которых учитываются поперечные возмущения, выберем выражения

$$\psi = |k_2| \left(\frac{\Omega}{\alpha \beta_{\text{eo}}} \right)^2 \rho \exp \left[-i\Omega \left(t - \frac{nz}{c} \right) - \frac{n_0\omega}{c} \Phi \right] \text{sech} \left[\rho \left(t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad (28)$$

$$u = -\frac{k_2}{\beta_{\text{eo}}} \rho \tanh \left[\rho \left(t - \frac{z}{v} \right) \right].$$

Здесь новые динамические параметры ρ и Φ , имеющие смысл обратной длительности солитона и эйконала его обыкновенной компоненты соответственно, являются подлежащими определению функциями координат, а параметр Ω по-прежнему предполагается постоянным в уже сформировавшемся солитоне.

Подставляя (28) в (27) и интегрируя по «быстрой» переменной τ , подобно тому, как это проделано в [25] для других нелинейных уравнений, получим «усредненный лагранжиан» вида

$$A \equiv \frac{c\alpha\beta_{\text{eo}}}{2n_0\omega\Omega k_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} L d\tau = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{2} \rho (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + \frac{ck_2}{2n_0\omega} (\Omega^2 \rho - \rho^3/3) - b \frac{(\nabla_{\perp} \rho)^2}{4\rho}, \quad (29)$$

где

$$b = \frac{c}{3n_0\omega} \left[\left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) \frac{c}{n_0\omega} + \frac{c}{2\Omega n} \right] \approx \frac{c^2}{6n_0\omega\Omega}. \quad (30)$$

Записывая с использованием (29) уравнения Эйлера – Лагранжа для ρ и Φ , приходим к системе «гидродинамического» типа

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp} (\rho \nabla_{\perp} \Phi) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \Phi)^2}{2} + \frac{ck_2}{2n_0\omega} (\rho^2 - \Omega^2) = b \frac{\Delta_{\perp} \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$

В одномерном случае система (31) имеет решения $\rho = 1/\tau_p = \text{const}$, $\Phi = \Phi_0(z) = (ck_2/2n_0\omega)(\Omega^2 - 1/\tau_p^2)z$, в точности соответствующие солитонному решению (16). Это является существенным аргументом в пользу метода «усредненного лагранжиана».

Поперечные возмущения учтены в левой и правой частях второго уравнения (31). Из определения коэффициента b видно, что он стремится к нулю при $\omega \sim 1/\lambda \rightarrow \infty$, где λ – длина волны обыкновенной компоненты солитона. Устремление к нулю длины волны соответствует эйкональному приближению (приближению геометрической оптики). Значит, слагаемое $b\Delta_{\perp}\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho}$ в правой части второго уравнения (31) описывает волновые свойства в поперечной динамике солитона (эффекты дифракции), а слагаемое $(\nabla_{\perp} \Phi)^2/2$ в левой части – поперечную динамику в эйкональном приближении, т.е. нелинейную рефракцию.

Вначале рассмотрим вопрос устойчивости солитона по отношению к мелкомасштабным возмущениям. Для этого запишем $\rho = 1/\tau_p + \rho_1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где $\rho_1 \ll 1/\tau_p$, $\Phi_1 \ll \Phi_0$. Линеаризуя затем (31) относительно ρ_1 , Φ_1 и полагая $\rho_1, \Phi_1 \sim \exp[i(q_{\parallel}z + \mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp})]$, получаем «дисперсионное» уравнение

$$q_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ck_2}{n_0\omega\tau_p^2} + bq_{\perp}^2 \right) q_{\perp}^2. \quad (32)$$

Первое слагаемое в скобках (32) соответствует нелинейной рефракции, второе – дифракции. При $q_{\parallel}^2 > 0$ солитонное решение устойчиво. Из (32) видно, что если несущая частота ω обыкновенной компоненты солитона принадлежит области положительной ДГС, т.е. $\omega = \omega_+$ (см.(23)), то солитон всегда устойчив по отношению к мелкомасштабной самофокусировке.

При несущей частоте обыкновенной компоненты солитона $\omega = \omega_-$ имеем $k_2 < 0$ (см.выше). В этом случае $q_{\parallel}^2 > 0$, если

$$q_{\perp}^2 > q_{\perp m}^2 = \frac{c|k_2|}{n_0\omega b\tau_p^2} = \frac{6n|k_2|\Omega}{c\tau_p^2}. \quad (33)$$

Таким образом, дифракция способна компенсировать самофокусировку, если размер мелкомасштабных возмущений $l \sim 1/q_{\perp}$ достаточно мал ($l < l_m = 1/q_{\perp m}$).

Следуя [26], установим интегральный критерий самофокусировки солитона. Система (31), как нетрудно показать, эквивалентна нелинейному уравнению Шредингера с нелинейностью пятого порядка

$$i \frac{\partial Q}{\partial z} = -g\Delta_{\perp} Q + \frac{\eta}{g} |Q|^4 Q, \quad (34)$$

где $g = \pm(b/2)^{1/2}$, $\eta = ck_2/(4n_o\omega)$, а комплекснозначная функция Q связана с ρ и Φ соотношением

$$Q = \sqrt{\rho} \exp \left[\frac{i}{2g} \left(\frac{ck_2\Omega^2}{n_o\omega} z + \Phi \right) \right]. \quad (35)$$

В результате вопрос устойчивости солитонов свелся к анализу устойчивости некоего нелинейного пространственного пучка, описываемого (34).

Уравнению (34) соответствует «гамильтониан»

$$H = \int (g^2 |\nabla_{\perp} Q|^2 + \frac{\eta}{3} |Q|^6) dS. \quad (36)$$

Кроме того, из (34) следует закон сохранения величины

$$N = \int |Q|^2 dS.$$

Интегрирование здесь ведется по всей поперечной плоскости x, y .

Определим квадрат поперечного радиуса солитона как момент второго порядка [26]:

$$R^2 = \frac{1}{N} \int r^2 |Q|^2 dS, \quad (37)$$

где r – радиальная компонента цилиндрической системы координат. Следуя методу, изложенному в [26], найдем отсюда и из (34)

$$\frac{dR^2}{dz} = \frac{2}{N} \int \mathbf{j} r dS, \quad (38)$$

где $\mathbf{j} = \text{ig}[Q(\nabla_{\perp} Q^*) - Q^*(\nabla_{\perp} Q)] = \rho \nabla_{\perp} \varphi$.

Дифференцируя (38) еще раз, получаем

$$\frac{d^2 R^2}{dz^2} = \frac{16}{N} H = \text{const}. \quad (39)$$

Будем считать, что на входе в среду, при $z = 0$, волновые фронты обыкновенной компоненты являются плоскими, т. е. $\nabla_{\perp} \varphi|_{z=0} = 0$. Отсюда, из (38) и выражения для \mathbf{j} найдем $(dR^2/dz)|_{z=0} = 0$. Тогда после интегрирования (39) будем иметь

$$R^2 = R_0^2 + \frac{8H}{N} z^2, \quad (40)$$

где R_0 – входной радиус солитона. Из (40) следует, что при $H > 0$ солитон дефокусируется, а при $H < 0$ испытывает самофокусировку.

Используя данный интегральный критерий, оценим критическую мощность P_{cs} солитона, выше которой должен наблюдаться режим самофокусировки. Ясно, что это обязательно произойдет, если подынтегральное выражение в (36) всюду отрицательно (для этого необходимо выполнение условия $\eta \sim k_2 < 0$, вследствие чего $\omega = \omega_-$). Полагая $|\nabla_{\perp} Q|^2 \sim |Q|^2/R^2 = \rho/R^2$ и выражая затем ρ через ψ_m , находим

$$\psi_m^2 R^2 > \frac{c^3 |k_2|}{8\pi^2 \chi_{eo}^2 \omega_-}.$$

Учитывая, что интенсивность обыкновенной компоненты $I_o = c\psi_m^2/4\pi n_o$, получаем для ее мощности

$$P_{os} > P_{cs} \cong \frac{c^4 |k_2|}{32\pi^2 n_o \chi_{eo}^2 \omega_-}. \quad (41)$$

Полагая, что $|k_2| \sim 1/c\omega_-$, $\chi_{eo} \sim 10^{-9}$, $n_o \sim 2$ и $\omega_- \cong 3 \times 10^{14} \text{ с}^{-1}$, получаем $P_{cs} \sim 10^{10} \text{ Вт}$. При интенсивности $I_o \sim 10^{11} \text{ Вт/см}^2$ данная мощность соответствует довольно большой апертуре солитона – порядка нескольких миллиметров. При апертурах 10–100 мкм критическое значение мощности недостижимо, и следует ожидать поэтому солитонного распространения в режиме самоканализирования.

4. Заключение

Проведенное в настоящей работе исследование выявляет возможность нового механизма непрерывного преобразования частоты вниз оптического импульса при его распространении в одноосном кристалле. «Покраснение» испытывает обыкновенная компонента импульса, синхронно порождая за счет нелинейности видеоимпульс необыкновенной волны. Для эффективности данного процесса необходимо выполнение условия вырожденного трехволнового взаимодействия, или резонанса Захарова–Бенни, формально выражаемого соотношениями (19) и (22). Как было показано выше, стоксово саморасcеяние за счет РЗБ возможно только в кристаллах с положительным двулучепреломлением. Кроме того, существует ограничение снизу на угол φ между направлением распространения импульса и оптической осью кристалла, а несущие частоты импульса ω_+ и ω_- (см. (23)) непрерывно зависят от φ . Поэтому для эффективного частотного преобразования каждому значению входной несущей частоты следует сопоставить определенное значение φ .

При $\omega = \omega_+$ распространение солитона со смещенной вниз частотой происходит в режиме дефокусировки, что может наблюдаться в видимом диапазоне входных частот. Если же $\omega = \omega_-$, то спектр обыкновенной составляющей принадлежит отрицательной дисперсии групповой скорости в ближнем ИК диапазоне. Следствием этого является возможность наблюдения стоксова саморасcеяния за счет РЗБ в режиме солитонного самоканализирования.

Важным отличием рассмотренного здесь механизма стоксова саморасcеяния от эффекта ВКС является то, что в нашем случае саморасcеяние сопровождается насыщением красного частотного сдвига, величина которого пропорциональна входной импульсной интенсивности. В условиях же солитонного режима ВКС насыщение не наблюдается, а стоксово смещение частоты растет пропорционально как входной интенсивности, так и пройденному импульсом пути [2–5]. Кроме того, в нашем случае можно говорить не только о преобразовании вниз несущей частоты обыкновенной компоненты, но и о генерации видеоимпульса необыкновенной волны, что также является отличительной особенностью проявлений механизма РЗБ в оптически одноосном кристалле.

Работа поддержана РФФИ (грант № 05-02-16422а).

1. Зветло О. *Принципы лазеров* (М.: Мир, 1984, § 8.4).
2. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В., Прохоров А.М., Серкин В.Н., Стельмах М.Ф., Фомичев А.А. *Письма в ЖЭТФ*, **41**, 242 (1985).
3. Dianov E.M., Prokhorov, A.M. Serkin V.N. *Opt. Lett.*, **11**, 168 (1986).
4. Mitschke F.M., Mollenauer L.F. *Opt. Lett.*, **11**, 659 (1986).
5. Серкин В.Н., Беляева Т.Л., Корро Г.Х., Гранадос М.А. *Квантовая электроника*, **33**, 325 (2003).
6. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *ЖЭТФ*, **123**, 1160 (2003).
7. Franken P.A., Hill A.E., Peters C.W., Weinreich G. *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 118 (1961).
8. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *ЖЭТФ*, **43**, 351 (1962).
9. Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.:Мир, 1966, с. 34).
10. Клышко Д.Н. *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986, гл. 6).
11. Абдуллин У.А., Ляхов Г.А., Руденко О.В., Чиркин А.С. *ЖЭТФ*, **39**, 633 (1974).
12. Auston D.H., Cheung K.P., Valdmanis J.A. Kleinman D.A. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1555 (1984).
13. Захаров В.Е. *ЖЭТФ*, **62**, 1745 (1972).
14. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М.: Мир, 1988, § 8.6).
15. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973, с. 105).
16. Шаскольская М.П. *Кристаллография* (М.: Высшая школа, 1976, § 45).
17. Сазонов С.В., Соболевский А.Ф. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 746 (2002).
18. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988, с. 20).
19. Yadjima N. Oikawa M. *Progr. Theor. Phys.*, **56**, 1719 (1976).
20. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996, гл. 5).
21. Ярив А., Юх П. *Оптические волны в кристаллах* (М.: Мир, 1987, с. 96).
22. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика* (М.: Наука, 2004).
23. Волькенштейн М.В. *Молекулярная оптика* (М.–Л: ГТТЛ, 1951, с. 159).
24. Жданов С.К., Трубников Б.А. *ЖЭТФ*, **92**, 1612 (1987).
25. Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **125**, 1409 (2004).
26. Власов С.Н., Таланов В.И., Петрищев В.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14**, 1353 (1971).