

Поляризационные зависимости генерации гармоник в плазме, образуемой при ионизации водородоподобных атомов в возбужденном состоянии

В.П.Силин, П.В.Силин

Рассмотрена аналитическая теория генерации гармоник достаточно мощного излучения в плазме, получаемой из газа водородоподобных атомов, находящихся в возбужденных состояниях. Учет l -вырождения электронов таких возбужденных состояний позволил получить зависимость эффективности генерации от главного квантового числа. В модели Бете ионизации газа показана пороговая нелинейная зависимость максимума эффективности генерации от степени круговой поляризации поля накачки при его заданной интенсивности. Аналитические расчеты проведены для пятой и седьмой гармоник. Результаты этих расчетов позволили обобщить на случай возбужденных атомов полученные ранее данные для третьей гармоники плазмы, возникающей из водородоподобных атомов в основном состоянии.

Ключевые слова: генерация гармоник, плазма, водородоподобные атомы.

1. В работе [1] теоретически было установлено, что для фотоионизованной плазмы, образующейся при подавлении барьера ионизации в режиме Бете [2], важную роль играет предварительная населенность возбужденных состояний ионизирующихся атомов. Хотя не очевидно, что режим Бете реализовался в экспериментальных условиях работы [3], однако необходимо отметить, что в этой работе обнаружено чрезвычайно эффективное увеличение интенсивности генерации третьей гармоники в фотоионизованной плазме, возникающей из газа возбужденных атомов, по сравнению с интенсивностью генерации третьей гармоники в фотоионизованной плазме, возникающей из газа невозбужденных атомов. В [1] использовалась аналитически решаемая модель водородоподобного атома, позволяющая получить исчерпывающую информацию о генерации гармоник лазерного излучения в фотоионизованной плазме. При этом влияние предварительной населенности возбужденных состояний было установлено без учета возможности кулоновского l -вырождения энергетических уровней. Роль такого вырождения обсуждалась в работе [4], где были получены приближенные скейлинговые зависимости эффективности генерации первых пяти нечетных гармоник возбуждающего поля накачки от их номера и напряженности поля. При этом считалось, что поле накачки линейно поляризовано. В отличие от работы [4], ниже будет рассмотрен случай эллиптически поляризованного поля накачки, для которого найдены закономерности поведения эффективности генерации пятой гармоники.

Для дальнейшего будет важен полученный в работе [4] вид нормированной на единицу функции распределе-

ния электронов водородоподобного атома, находящихся на n -м энергетическом уровне:

$$f_n(V) = \frac{1}{\pi^2 (V_Z/n)^3 [1 + (nV/V_Z)^2]^4}. \quad (1)$$

Здесь n – главное квантовое число; $V_Z = Ze^2/\hbar$ – кулоновская единица скорости [5]. Функция (1) зависит от модуля скорости V электрона фотоионизованной плазмы. Эта функция в режиме фотоионизации Бете повторяет распределение электронов в водородоподобном атоме. Однако существенно то, что данная функция записана в системе координат, осциллирующей вместе с электроном.

Сделаем здесь некоторые замечания, существенные для понимания нашей модели. Согласно [2] для осуществления режима Бете необходимо, чтобы напряженность E ионизирующего электрического поля удовлетворяла условию

$$E > \frac{I_Z^2}{4Z|e|^3}, \quad (2)$$

где I_Z – ионизационный потенциал. Для водородоподобного атома с электронами на n -м энергетическом уровне неравенство (2) принимает вид

$$E > \frac{1}{4Ze^2} \left(\frac{Z^2 m_e e^4}{2n^2 \hbar^2} \right)^2, \quad (3)$$

где m_e – масса электрона. Подчеркнем, что при выполнении условия (3) газ возбужденных атомов не имеет связанных состояний электронов, т. е. превращается в плазму. Помимо условия сильного поля (2) для практической реализации режима Бете при ионизации атомов необходимо, чтобы сильное поле возникало достаточно

В.П.Силин, П.В.Силин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53

Поступила в редакцию 30 июня 2004 г.

быстро. Иными словами, время нарастания поля должно быть меньше

$$\tau = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^4} = n^2 \times 2.5 \times 10^{-17} \text{ с}, \quad (4)$$

что отвечает времени обращения электрона по орбите возбужденного состояния. Для возбужденных состояний τ (4) находится в фемтосекундном диапазоне.

2. Кратко сформулируем некоторые основные положения теории генерации гармоник поля накачки в слабо-столкновительной плазме. Прежде всего для электрической компоненты поля накачки примем, что

$$E_x = e_x E \cos(\omega t - kz), \quad E_y = -e_y E \sin(\omega t - kz). \quad (5)$$

Здесь поперечная плоская волна поля накачки зависит от координаты z . Зависимость амплитуды E напряженности электрического поля от координаты считаем слабой и при получении последующих формул пренебрегаем ею, хотя в нашем рассмотрении такую зависимость можно описывать параметрически. В (5) величины e_x и e_y – компоненты поляризационного вектора, для которых $e_x^2 + e_y^2 = 1$. Эти компоненты определяют максимальную степень линейной поляризации ρ :

$$\rho = (e_x^2 - e_y^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Соответственно этому степень круговой поляризации поля накачки A определяется формулой

$$A = (1 - \rho^4)^{1/2}. \quad (7)$$

Частоты и волновой вектор поля накачки связаны соотношением

$$\omega^2 = \omega_{\text{Le}}^2 + c^2 k^2, \quad (8)$$

где c – скорость света; $\omega_{\text{Le}} = (4\pi e^2 N_e / m_e)^{1/2}$ – электронная ленгмюровская частота; N_e – плотность электронов плазмы.

Для компонент электрического поля гармоник согласно уравнениям Максвелла имеем выражения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\text{Le}}^2 - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x^{(2N+1)} \\ &= 4\pi \sigma_{xx}^{(2N+1)} (2N+1) \omega e_x E \sin[(2N+1)(\omega t - kz)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\text{Le}}^2 - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y^{(2N+1)} \\ &= 4\pi \sigma_{yy}^{(2N+1)} (2N+1) \omega e_y E \cos[(2N+1)(\omega t - kz)]. \end{aligned}$$

Нелинейные эффективные высокочастотные проводимости σ могут быть представлены через эффективные частоты столкновений $\nu^{(2N+1)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(2N+1)} &= \frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2} \nu_{xx}^{(2N+1)}(n, E, \rho), \\ \sigma_{yy}^{(2N+1)} &= \frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2} \nu_{yy}^{(2N+1)}(n, E, \rho). \end{aligned} \quad (10)$$

Определяя эффективность генерации $2N+1$ -й гармоники как отношение средних по времени квадратов напряженностей полей гармоник и поля накачки,

$$\eta^{(2N+1)} = \frac{\langle [E^{(2N+1)}]^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle}, \quad (11)$$

с помощью соотношений (9) и (11) можем записать

$$\eta^{(2N+1)} = \left[\frac{2N+1}{4N(N+1)} \right]^2 \{ [e_x \nu_{xx}^{(2N+1)}]^2 + [e_y \nu_{yy}^{(2N+1)}]^2 \} \omega^{-2}. \quad (12)$$

Описывая эффективные частоты столкновений с помощью уравнения Больцмана с интегралом столкновений Ландау при использовании формулы (1) для распределения сталкивающихся с ионами электронов, получаем

$$\nu_{xx}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{\rho^3 m_e^2 V_E^3} D \alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho) \Big|_{b=1}, \quad (13)$$

$$\nu_{yy}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{\rho^3 m_e^2 V_E^3} D \alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho) \Big|_{b=1}$$

и соответственно

$$\alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{Q_{2N+1}(z) + Q_{2N-1}(z)}{z+1}, \quad (14)$$

$$\alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{Q_{2N+1}(z) - Q_{2N-1}(z)}{z-1},$$

где A – кулоновский логарифм интеграла столкновений Ландау; $V_E = |eE|/(m\omega)$ – амплитуда скорости осциллирующей электрона в поле накачки; Z_{eff} – эффективный заряд ионов, определяемый формулой

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_i e_i^2 N_i}{e^2 N_e};$$

e_i и N_i – соответственно заряд и плотность числа ионов i -го сорта; Q_ν – функция Лежандра;

$$D = 1 - \frac{d}{db} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{db^2}$$

– дифференциальный оператор, после применения которого в (13) полагается $b=1$. Наконец, в интегралах (14) θ и z связаны соотношением

$$z = \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad (15)$$

где $\alpha = V_Z b / (V_E n)$. Соответственно этому вычисление эффективных частот столкновений сводится к вычислению двух интегралов:

$$\begin{aligned} \alpha^{(\pm)}(2N+1, \alpha, \rho) &= \frac{\alpha \sqrt{2}}{\pi \rho} \\ &= \int_{(1+2\alpha^2)/\rho^2}^{+\infty} dz \frac{Q_{N+1/2}(z) \pm Q_{N-1/2}(z)}{(z \pm 1)(z - 1/\rho^2)[z - (1+2\alpha^2)/\rho^2]}^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользовавшись формулой (8.712) из справочника [6] (с. 1015)

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(z-t)^{\nu+1}} (1-t^2)^\nu,$$

можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} Q_{(2N+1)/2}(z) \pm Q_{(2N-1)/2}(z) \\ = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(z-t)^{1/2}} \Theta_{2N+1}^{(\pm)}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где, например,

$$\Theta_5^{(+)} = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} (4t^2 - 2t - 1), \quad (18)$$

$$\Theta_5^{(-)} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} (4t^2 + 2t - 1),$$

$$\Theta_7^{(+)} = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} (8t^3 - 4t^2 - 4t + 1), \quad (19)$$

$$\Theta_7^{(-)} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} (8t^3 + 4t^2 - 4t - 1).$$

Формула (17) позволяет записать (16) в виде

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho) = \frac{2\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)} \\ \times \int_{-1}^{+1} dt \Theta_{2N+1}^{(+)} \left\{ \frac{\rho^2 \arctan[(1-\rho^2 t)/(2\alpha^2)]^{1/2}}{[2\alpha^2(1-\rho^2 t)]^{1/2}} \right. \\ \left. - \frac{\rho}{2[(1+t)(1+\rho^2+2\alpha^2)]^{1/2}} \right. \\ \left. \times \ln \frac{(1+\rho^2+2\alpha^2)^{1/2} + \rho(1+t)^{1/2}}{(1+\rho^2+2\alpha^2)^{1/2} - \rho(1+t)^{1/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho) = \frac{2\alpha\rho}{\pi(1-\rho^2)} \\ \times \int_{-1}^{+1} dt \Theta_{2N+1}^{(-)} \left\{ \frac{\rho^2 \arctan[(1-\rho^2 t)/(2\alpha^2)]^{1/2}}{[2\alpha^2(1-\rho^2 t)]^{1/2}} \right. \\ \left. - \frac{\rho}{2[(1-t)(1-\rho^2+2\alpha^2)]^{1/2}} \arctan \frac{\rho(1-t)^{1/2}}{(1-\rho^2+2\alpha^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсутствие сингулярности в формуле (21) при $\rho = 1$ следует из того, что при этом обращается в нуль выражение в фигурных скобках в правой части подынтегрального выражения (21). Формулы (20) и (21) позволяют записать явные аналитические выражения для величин $\alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho)$ и $\alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho)$.

3. Применим полученные выше общие соотношения для описания генерации пятой гармоники ($2N+1=5$). Тогда формулы (20) и (21) позволяют получить соответственно следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)}\left(5, \frac{b}{x}, \rho\right) = \frac{4b}{x\rho} \left[-\frac{2}{5} + \frac{8}{5\rho^2} + \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} \right. \\ \left. + \left(-\frac{2}{15} - \frac{8}{5\rho^2} - \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} \right) \left(\frac{2b^2+x^2-x^2\rho^2}{2b^2+x^2+x^2\rho^2} \right)^{1/2} \right] + \\ + \frac{1}{(1+\rho^2)^{1/2}} 2^{3/2} \rho \left[\left(\frac{3}{10} - \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{3\rho^2} \right) \right. \\ \left. \times E \left(\arctan \left[\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left(\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) + \left(-\frac{1}{6} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{5\rho^2} \right) F \left(\arctan \left[\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left(\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)}\left(5, \frac{b}{x}, \rho\right) = \frac{1}{15\rho^3(1-\rho^2)} \left\{ \frac{8b}{x} (1-\rho^2) \right. \\ \left. \times \left(12 + 3\rho^2 + \frac{8b^2}{x^2} \right) + \left[\frac{6b}{x} \left(\frac{2b^2+x^2+x^2\rho^2}{2b^2+x^2-x^2\rho^2} \right)^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(4 - 2\rho^2 - \rho^4 - \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{16b^2}{x^2} + \frac{16b^4}{x^4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2b}{x} \left(\frac{2b^2+x^2-x^2\rho^2}{2b^2+x^2+x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left(60 - 2\rho^2 - 19\rho^4 + \frac{80b^2}{x^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{48b^4}{x^4} \right) \right] + \sqrt{2}(1+\rho^2)^{1/2} (-32 + 20\rho^2 + 9\rho^4) \right. \\ \left. \times E \left(\arctan \left[\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left(\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^{1/2}} (-32 - 12\rho^2 + 5\rho^4) \right. \\ \left. \times F \left(\arctan \left[\frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left(\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $E(\varphi, k)$ и $F(\varphi, k)$ – эллиптические функции, определенные согласно [6], а $x = nV_E/V_Z$.

Подставляя (22) и (23) в формулу (13), получаем в соответствии с (12) выражение

$$\eta^{(5)}(x, A) = \left(\frac{10e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{3m_e^2 V_Z^3 \omega} \right)^2 n^6 \Phi \left(5, \frac{nV_E}{V_Z}, A \right), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(5, x, A) = \frac{1}{2\rho^6 x^6} \left\{ (1+\rho^2) \left[D\alpha^{(+)} \left(5, \frac{b}{x}, \rho \right) \right] \right. \\ \left. + (1-\rho^2) \left[D\alpha^{(-)} \left(5, \frac{b}{x}, \rho \right) \right] \right\} \Big|_{b=1}. \end{aligned} \quad (25)$$

При этом максимальная степень линейной поляризации ρ в правой части формулы (25) выражается через степень круговой поляризации A согласно формуле (7). Явное выражение (25) довольно громоздко, поэтому описываемые им закономерности иллюстрируются на рис. 1 и 2. Из

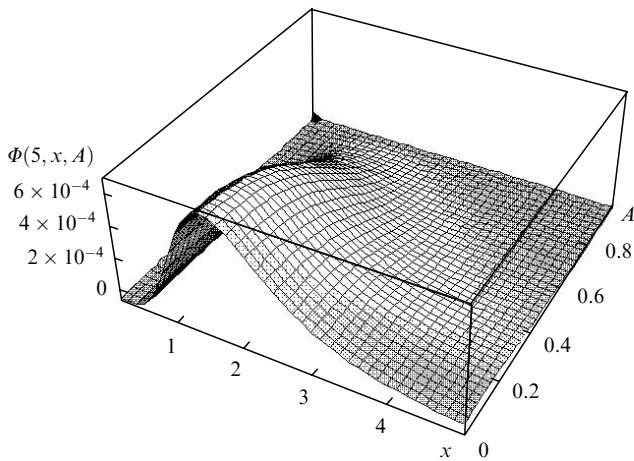


Рис.1. Зависимость безразмерной функции $\Phi(5, x, A)$, зависящей от напряженности электрического поля накачки ($x = nV_E/V_Z$) и степени его круговой поляризации.

рис.1 следует, что эффективность генерации пятой гармоники сначала быстро нарастает при увеличении напряженности электрического поля накачки в соответствии с ростом скейлингового аргумента $x = nV_E/V_Z$, а затем резко убывает как его шестая степень. Отметим, что формула (24) дает зависимость эффективности пятой гармоники от главного квантового числа при заданном значении x . На рис.1 хорошо просматривается сравнительно быстрое убывание эффективности генерации с ростом степени круговой поляризации, что отвечает общему случаю отсутствия генерации гармоник для поля накачки с круговой поляризацией. Однако своеобразие зависимости эффективности третьей гармоники от степени круговой поляризации яснее проступает на рис.2, где приведено отношение

$$\frac{\eta^{(5)}(x, A)}{\eta^{(5)}(x, 0)} = \frac{\Phi(5, nV_E/V_Z, A)}{\Phi(5, nV_E/V_Z, 0)}. \tag{26}$$

Здесь отчетливо видна немонотонная зависимость, когда максимум выражения (26) реализуется при конечном значении степени круговой поляризации ($A \neq 0$). Такое явление было экспериментально обнаружено при генерации гармоник в газе [7]. В работе [7] указано на противо-

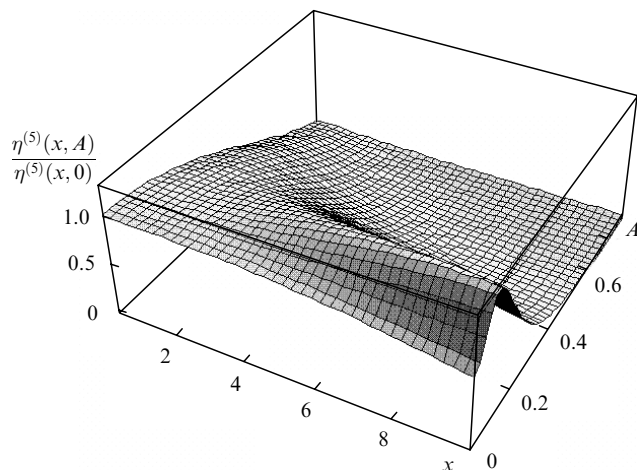


Рис.2. Зависимость от степени круговой поляризации и поля накачки относительной эффективности генерации пятой гармоники $\eta^{(5)}(x, A)/\eta^{(5)}(x, 0)$.

речие данного явления с имеющимися в то время представлениями о наибольшей эффективности генерации гармоник электронами, возвращающимися к атому, из которого они были удалены полем накачки. Для плазменной модели генерации гармоник в случае заранее приготовленной плазмы с максвелловским распределением теоретически эффект, подобный наблюдавшемуся в [7], был установлен в работе [8]. В результате стала формироваться точка зрения, суть которой заключается в том, что максимум эффективности гармоник появляется не для некоторых гармоник, как в эксперименте [7], а для всех гармоник, причем это явление имеет пороговый характер. Для разных гармоник пороги будут различными, поэтому обнаружение на опыте подобного явления для каких-то гармоник связано с ограниченностью интенсивности излучения используемого лазера. То, что обсуждаемое явление – пороговое, отчетливо видно из рис.3: максимум, как и в [7], возникает при $x = nV_E/V_Z > 2.65$. Однако своеобразие данного явления согласно рис.3 заключается также в том, что с ростом скейлингового параметра x уменьшается степень круговой поляризации A , при которой эффективность генерации пятой гармоники имеет ярко выраженный максимум. В связи с этим рассматриваемое явление может не быть обнаружено, когда точность определения параметра A недостаточно высока. В таком случае указанное явление [7] может экспериментально наблюдаться в области $x_{th} < x < x_{error}$.

4. Обратимся теперь к рассмотрению эффективности генерации седьмой гармоники ($2N + 1 = 7$). С помощью формул (20) и (21) соответственно находим

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)}\left(7, \frac{b}{x}, \rho\right) &= \frac{1}{1 + \rho^2} \left\{ -\frac{2b\rho}{7x} \left[1 - \frac{4}{\rho^2} - \frac{4}{\rho^4} + \frac{8}{\rho^6} \right] \right. \\ &+ \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left(-8 - \frac{16}{\rho^2} + \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left(-16 + \frac{96}{\rho^2} \right) \\ &+ 64 \frac{b^6}{x^6\rho^6} + \left(\frac{x^2 + 2b^2 - x^2\rho^2}{x^2 + 2b^2 + x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{4}{\rho^4} \right. \\ &\left. \left. - \frac{8}{\rho^6} + \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left(8 - \frac{16}{\rho^2} - \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left(-16 - \frac{96}{\rho^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

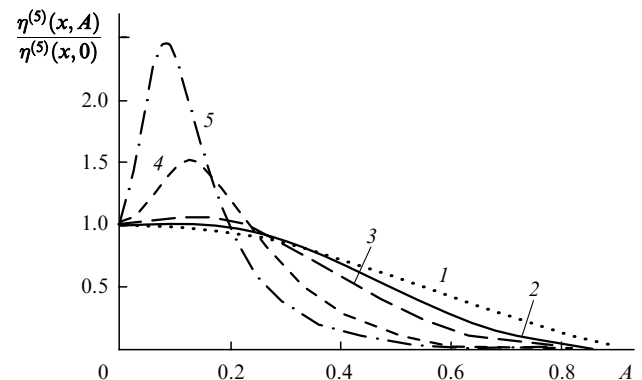


Рис.3. Зависимости нормировочного отношения (26) от степени круговой поляризации для различных полей накачки. Кривая 1 отвечает $x = 0.5$, что реализуется до порога сдвига положения максимума эффективности генерации от значения $A = 0$ (плоская поляризация), кривая 2 – пороговому случаю, когда $x = 2.65$, кривые 3, 4, 5 – надпороговым случаям, когда $x = 4$ (3), 8 (4), и 11 (5).

$$\begin{aligned}
& -64 \frac{b^6}{x^6 \rho^6} \left. \right\} + \left\{ 2\rho \left[\left(\frac{64b^7}{7\rho^6 x^7} + \frac{96b^5}{5\rho^6 x^5} + \frac{16b^5}{5\rho^4 x^5} \right. \right. \right. \\
& + \frac{48b^3}{\rho^6 x^3} + \frac{16b^3}{3\rho^4 x^3} - \frac{8b^3}{3\rho^2 x^3} + \frac{8b}{\rho^6 x} + \frac{4b}{\rho^4 x} - \frac{4b}{\rho^2 x} - \frac{b}{x} \left. \right) + \\
& + \frac{1}{105x^7} \left\{ b \left(\frac{x^2 + 2b^2 - x^2 \rho^2}{x^2 + 2b^2 + x^2 \rho^2} \right)^{1/2} \left[-\frac{960b^6}{\rho^6} + x^6 \right. \right. \\
& \times \left(143 + \frac{92}{\rho^2} - \frac{876}{\rho^4} - \frac{840}{\rho^6} \right) - 48b^4 x^2 \left(\frac{42}{\rho^6} + \frac{1}{\rho^4} \right) \\
& - 8b^2 x^4 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{210}{\rho^6} + \frac{166}{\rho^4} \right) \left. \right\} + \left(63 + \frac{208}{\rho^2} \right. \\
& - \frac{224}{\rho^4} - \frac{384}{\rho^6} \left. \right) \frac{(1 + \rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}} \\
& \times E \left(\arctan \frac{x(1 + \rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left(\frac{2\rho^2}{1 + \rho^2} \right)^{1/2} \right) \\
& + \left(25 - \frac{144}{\rho^2} - \frac{160}{\rho^4} + \frac{384}{\rho^6} \right) \frac{(1 + \rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}} \\
& \times F \left(\arctan \frac{x(1 + \rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left(\frac{2\rho^2}{1 + \rho^2} \right)^{1/2} \right) \left. \right\} \left. \right\}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\alpha^{(+)} \left(7, \frac{b}{x}, \rho \right) \approx \frac{\rho^9 x^9}{1008b^9} + O(x^{10}),$$

$$\alpha^{(-)} \left(7, \frac{b}{x}, \rho \right) \approx -\frac{\rho^9 x^9}{1008b^9} + O(x^{10}).$$

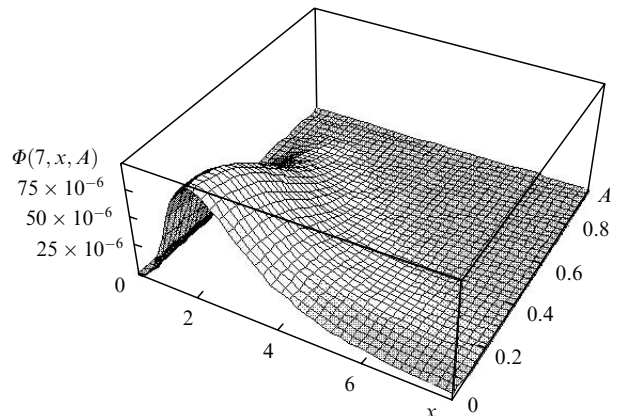
При малых аргументах x функции (27) и (28) соответственно имеют следующий вид:

$$\eta^{(7)}(x, A) = \left(\frac{7e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{3m_e^2 V_Z^2 \omega} \right)^2 n^6 \Phi \left(7, \frac{nV_E}{V_Z}, A \right), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi(7, x, A) = & \frac{1}{2\rho^6 x^6} \left\{ (1 + \rho^2) \left[D\alpha^{(+)} \left(7, \frac{b}{x}, \rho \right) \right] \right. \\
& \left. + (1 - \rho^2) \left[D\alpha^{(-)} \left(7, \frac{b}{x}, \rho \right) \right] \right\} \Big|_{b=1}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Здесь, как и в (25), максимальная степень линейной поляризации ρ выражается через степень круговой поляризации A из формулы (7). Явное выражение (30), как и (25), сравнительно громоздко, поэтому описываемые формулы (29) и (30) закономерности иллюстрируются на рис.4 и 5. На рис.4 показано поведение эффективности генерации гармоник с ростом x : быстрое нарастание, достижение максимума и дальнейшее достаточно быстрое уменьшение. Скейлинговым параметром такой зависимости для любого главного квантового числа возбужденного состояния является $x = nV_E/V_Z$. Зависимость эффективности генерации седьмой гармоник пропорциональна шестой степени главного квантового числа, как и в случае пятой гармоник. Можно утверждать, что такая пропорциональность имеет место для любых

Рис.4. Зависимость $\Phi(7, x, A)$ от параметров x и A .

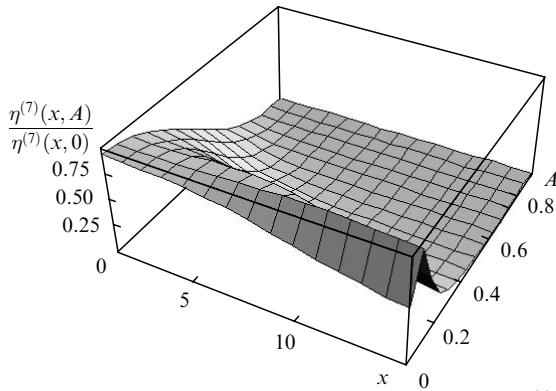


Рис.5. Картина двумерного распределения функции $\eta^{(7)}(x, A) \times [\eta^{(7)}(x, 0)]^{-1}$.

гармоник. Так же как и на рис.1 для пятой гармоники, на рис.4 ярко проявляется сравнительно быстрое уменьшение эффективности генерации гармоники с ростом степени круговой поляризации A . На рис.5 отчетливо видно своеобразие зависимости относительной эффективности от степени круговой поляризации, подобное продемонстрированному для пятой гармоники на рис.2. Для наглядности на рис.6 приведена иллюстрация зависимости

$$\frac{\eta^{(7)}(x, A)}{\eta^{(7)}(x, 0)} = \frac{\Phi(7, nV_E/V_Z, A)}{\Phi(7, nV_E/V_Z, 0)}. \quad (31)$$

Подобно (26), зависимость от степени поляризации A является немонотонной с максимумом при отличном от нуля значении A , которое зависит от скейлингового параметра x . Такая немонотонность является пороговой и для седьмой гармоники возникает при $x \approx 4$. С ростом параметра x область немонотонности сначала расширяется, а затем сужается, что при больших x делает наблюдение этой области затруднительным.

5. Для фотоионизированной плазмы в режиме Бете влияние эллиптичности поляризации поля накачки на эффективность генерации третьей гармоники было рассмотрено в работе [9]. Однако эта работа посвящена исследованию плазмы, возникающей из газа атомов с электронами в основном $1s$ -состоянии.

Прежде всего укажем, как результаты работы [9] на основании настоящей статьи могут быть распространены на плазму, состоящую из газа атомов с электронами, находящимися в энергетических состояниях с главным квантовым числом n . Это легко усмотреть из того факта,

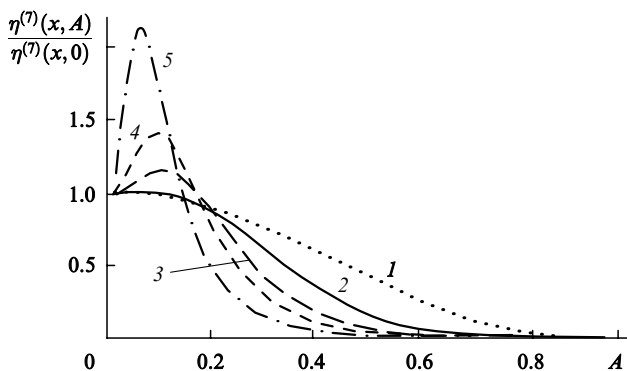


Рис.6. Зависимости отношения (31) от параметра A при $x = 1$ (1), $x \approx 4$ (2) (пороговая зависимость), $x = 7$ (3), 10 (4) и 18 (5).

что для $1s$ -состояния формула (1) верна при $n = 1$. В связи с этим все результаты работы [9] непосредственно распространяются на возбужденные состояния с помощью замены V_Z в формулах из [9] на комбинацию V_Z/n . Так, в частности, в формулах (19), (20) и (24) из [9] следует заменить $\alpha = b(V_Z/V_E)$ на $\alpha = b[V_Z/(nV_E)]$. Формула (23) из [9] для эффективности генерации третьей гармоники принимает вид

$$\eta^{(3)}(\rho) = \left(6 \frac{e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{m_e^2 V_Z^3 \omega}\right)^2 n^6 F^{(3)}\left(\frac{nV_E}{V_Z}, \rho\right). \quad (32)$$

Последнее соотношение отвечает скейлингу эффективности генерации гармоник $\sim n^6$ и скейлингу используемой в [9] функции $F^{(3)}$ от аргумента nV_E/V_Z для возбужденных состояний. Соответственно этому на рис.1 – 3 из работы [9] для случая возбужденных состояний следует вместо V_E/V_Z использовать nV_E/V_Z .

Все это позволяет применять результаты работы [9] не только для рассмотренного в ней случая плазмы, возникшей из газа атомов с электронами в основном $1s$ -состоянии, но и для интересующего нас в настоящей работе случая возбужденных состояний, отвечающих главному квантовому числу $n \neq 1$.

В заключение, подводя итог всему вышеизложенному, можно, во-первых, утверждать, что согласно рис.1 и 4 и обобщению результатов работы [9] зависимости эффективности генерации третьей, пятой и седьмой гармоник от напряженности поля накачки достигают максимума при значениях nV_E/V_Z , сравнимых по порядку величины с единицей. Во-вторых, при заданном значении nV_E/V_Z максимум эффективности имеет место в случае плоской поляризации, т.е. при $A = 0$, когда интенсивность поля накачки невелика (ниже пороговой). Если же она превышает пороговое значение (для каждой гармоники свое), то максимум эффективности генерации гармоник возникает при отличном от нуля значении степени круговой поляризации, которое зависит от интенсивности излучения. Можно полагать, что подобные закономерности выполняются и для высших гармоник. Тем самым создаются базовые представления об оптимальных условиях получения лучшей эффективности генерации гармоник излучения интенсивного и быстро включаемого поля накачки.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-02-16078), Федеральной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1385.2003.2) и программы INTAS (№ 03-51-5037).

1. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **117** (5), 926 (2000).
2. Бете Г. *Квантовая механика простейших систем* (М.-Л.: ОНТИ, 1935).
3. Fedotov A.B., Naumov A.N., Silin V.P., Uryupin S.A., Zheltikov A.M., Tarasevitch A.P., von der Linde D. *Phys. Lett. A*, **271**, 407 (2000).
4. Силин В.П., Силин П.В. *Квантовая электроника*, **33** (10), 897 (2003).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М.: Физматгиз, 1963).
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: ГИФМЛ, 1962).
7. Burnett N.H., Kan C., Corkum P.V. *Phys. Rev. A*, **51**, R3418 (1995).
8. Овчинников К.Н., Силин В.П. *Квантовая электроника*, **29** (2), 145 (1999).
9. Вагин К.Ю., Овчинников К.Н., Силин В.П. *Квантовая электроника*, **34** (3), 223 (2004).