

Динамика установления сильной связи лазерных солитонов

Н.Н.Розанов, С.В.Федоров, А.Н.Шацев

Для широкоапертурного лазера класса А с насыщающимся поглощением подробно исследована динамика формирования сильной связи двух солитонов с топологическим зарядом, равным единице. Продемонстрирована последовательность бифуркаций векторного поля энергетических потоков в поперечной плоскости в процессе формирования солитонного комплекса.

Ключевые слова: солитоны, нелинейная динамика, бифуркация.

Солитоны в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением, предсказанные в работе [1] и детально исследованные теоретически и численно в [2–4] (см. также важные результаты экспериментов и расчетов, приведенные в [5]) принадлежат к числу диссипативных (в отличие от консервативных) оптических солитонов. Свойства солитонов этих двух типов – консервативных и диссипативных – принципиально различны, причем существенное подавление шумов и дрейфа параметров диссипативных солитонов делает их перспективными для оптической обработки информации.

Большое значение в теории и потенциальных приложениях солитонов имеют характер и закономерности их взаимодействия. Более простым для анализа является случай слабой связи солитонов со слабым перекрытием полей индивидуальных солитонов [6]. Для лазерных солитонов, однако, в работе [7] (см. также [2–4]) были найдены и более сложные, сильно связанные структуры, которые нельзя разложить на отдельные солитоны. Еще более необычна полученная в расчетах [8] локализованная структура лазерного излучения, в которой связь разных ее частей является слабой и сильной, причем их вращение происходит с разными угловыми скоростями. Количественный критерий сильной или слабой связи согласно [9] связан с бифуркациями топологической структуры поперечных энергетических потоков излучения. Некоторые примеры таких бифуркаций приведены в [9]. Задача настоящей работы – более детальный анализ бифуркаций топологической структуры вектора Пойнтинга в процессе формирования сильно связанной пары вихревых лазерных солитонов с совпадающими (единичными) топологическими зарядами.

Как и в [2–4, 9], будем рассматривать широкоапертурный (с достаточно большим числом Френеля) лазер класса А (времена релаксации среды много меньше времени установления поля в резонаторе) с плоскопарал-

лельными зеркалами и внутрирезонаторным насыщающимся поглощением. В приближении среднего поля уравнение для огибающей электрической напряженности поля E имеет следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d)\Delta_{\perp}E + Ef(|E|^2). \quad (1)$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – поперечный оператор Лапласа; d – эффективный коэффициент диффузии, отражающий слабую пространственную дисперсию среды ($0 < d \ll 1$); время нормировано на время жизни фотона в пустом резонаторе. Функция $f(I)$ интенсивности излучения $I = |E|^2$ описывает безынерционное насыщение усиления и поглощения. В пренебрежении частотными расстройками эта функция вещественна и имеет вид

$$f(|E|^2) = -1 + \frac{g_0}{1 + |E|^2} - \frac{a_0}{1 + b|E|^2}. \quad (2)$$

В расчетах использовались следующие значения параметров: коэффициент усиления слабого сигнала $g_0 = 2.11$, коэффициент поглощения слабого сигнала $a_0 = 2$, отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения $b = 10$, коэффициент диффузии $d = 0.06$. Для рассматриваемых локализованных структур поле на бесконечности должно обращаться в нуль.

Простейшие двумерные лазерные солитоны обладают осесимметричным распределением интенсивности. В полярных координатах r, φ имеем

$$E = A(r) \exp(im\varphi) \exp(-ivt). \quad (3)$$

Целое число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ называют топологическим индексом. Волновой фронт излучения при $m = 0$ регулярен, а при $m \neq 0$ обладает винтовыми дислокациями (оптические вихри). Частотный сдвиг v и комплексная радиальная функция $A(r)$, играющие роль собственного значения и собственной функции, определяются численным решением вытекающего из (1) радиального уравнения [2, 3]. Устойчивость осесимметричных локализованных структур относительно малых возмущений анализируется стандартным образом [2]; выбранные для расчетов параметры отвечают области устойчивости осесимметрич-

Н.Н.Розанов, С.В.Федоров, А.Н.Шацев. НИИ лазерной физики, Россия, 199034 С.-Петербург, Биржевая л., 12; e-mail: rosanov@ilph.spb.su

Поступила в редакцию 12 июля 2004 г., после доработки – 16 декабря 2004 г.

ных солитонов. Полная мгновенная фаза $\Psi = \arg E$ состоит из радиальной фазы $\Psi_0(r) = \arg A$ и угловой компоненты:

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(r) + m\varphi. \quad (4)$$

Ввиду несущественности постоянной составляющей фазы можно считать, что $\Psi_0(0) = 0$.

Начальное (в момент времени $t = 0$) распределение поля в данной работе выбиралось в виде суперпозиции полей двух осесимметричных солитонов с топологическими индексами $m_1 = m_2 = 1$:

$$E = A(r_1) \exp[i\Psi_0(r_1) + i\varphi_1] + A(r_2) \exp[i\Psi_0(r_2) + i\varphi_2 + i\vartheta]. \quad (5)$$

Здесь ϑ – постоянная разность фаз; r_n и φ_n ($n = 1, 2$) – два набора полярных координат, центры которых совпадают с центрами n -го солитона, а расстояние между центрами координат равно L :

$$r_n^2 = \left(x \pm \frac{L}{2}\right)^2 + y^2, \quad \cos \varphi_n = \left(x \pm \frac{L}{2}\right) \frac{1}{r_n}, \quad \sin \varphi_n = \frac{y}{r_n}. \quad (6)$$

Численное решение уравнения (1) с начальным условием (5) методом расщепления с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье позволяет найти эволюцию структуры поля.

В рамках принятого квазиоптического подхода и фиксированной (линейной) поляризации излучения поперечные компоненты среднего за период оптических колебаний вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_\perp = \{S_x, S_y\}$ в каждый момент времени t определяются медленно меняющейся комплексной амплитудой (огibaющей) E или же вещественной амплитудой $A = |E|$ и фазой $\Psi = \arg E$:

$$\mathbf{S}_\perp = A^2 \nabla_\perp \Psi = \text{Im}(E^* \nabla_\perp E). \quad (7)$$

Линии тока для этих компонент – кривые, касательная к которым в каждой точке с координатами x, y совпадает по направлению с вектором \mathbf{S}_\perp , – определяются уравнениями

$$\frac{dx}{S_x(x, y)} = \frac{dy}{S_y(x, y)}, \quad (8)$$

которые удобнее переписать, введя параметр τ , меняющийся вдоль кривой вместе с ее длиной:

$$\frac{dx}{d\tau} = S_x(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = S_y(x, y). \quad (9)$$

Поперечные распределения вектора Пойнтинга и интенсивности дают однозначное описание поля (с точностью до несущественной постоянной фазы).

Уравнения вида (9) детально изучены в теории нелинейных колебаний [10]. Для определения структуры разбиения их фазовой плоскости на ячейки с однотипным характером траекторий $x(\tau), y(\tau)$ следует сначала найти особые (неподвижные) точки (x_0, y_0) , в которых одновременно $S_x(x_0, y_0) = 0$ и $S_y(x_0, y_0) = 0$. Затем линеаризацией выражений (9) около этих точек определяется характер

их «устойчивости». Кавычки указывают на то, что речь идет не о временной устойчивости (момент времени t фиксирован), а о характере решений при $\tau \rightarrow \infty$. В общем случае для разбиения фазовой плоскости на ячейки нужно знать еще и нелокальные элементы – предельные циклы (замкнутые траектории с периодическим изменением x и y при изменении τ) и расположение сепаратрис седел [10]. Они находятся численным решением (9). Тогда уже топологическая структура энергетических потоков в момент времени t определяется однозначно. Но с изменением времени могут возникать качественные изменения этой структуры, что отвечает ее бифуркациям. Для уравнений вида (9) в невырожденных случаях бифуркации соответствуют следующим четырем типам негрубых элементов [10]: 1) сложному состоянию равновесия, получающемуся при слиянии двух простых особых точек; 2) вырожденному фокусу или центру; 3) двойному предельному циклу (возникающему, например, при слиянии «устойчивого» и «неустойчивого» предельных циклов); 4) сепаратрису, идущей из одного седла в другое или возвращающейся в него же. Далее мы проследим бифуркации структуры энергетических потоков, указывая соответствующие номера их типов. Временная перестройка топологической структуры потоков показана на рис.1.

Исходная (при $t = 0$) структура поля описывается линейной суперпозицией полей двух солитонов (5) с $L = 26$ и $\vartheta = \pi$. На соответствующей уравнению (5) фазовой плоскости энергетических потоков (рис.1) имеются три особые точки: два фокуса (центры солитонов, отвечающих дислокациям волнового фронта) и седло S_0 между этими фокусами. Фокусы являются «устойчивыми» (при возрастании τ траектории наматываются на них). Каждый из фокусов окружен тремя предельными циклами: «неустойчивым» (ближайшим к соответствующему фокусу), «устойчивым» (промежуточным) и «неустойчивым» (внешним). «Устойчивые» предельные циклы на рис.1 изображены сплошными линиями, а «неустойчивые» – штриховыми. В начальный момент времени предельные циклы близки к концентрическому окружностям. Исходящие из седла сепаратрисы уходят на бесконечность (на рис.1 они показаны пунктирными линиями со стрелками), а входящие в седло сматываются с внешних предельных циклов.

При $t = 0$ сепаратрисы седла и предельные циклы разбивают фазовую плоскость на восемь ячеек ($N_c = 8$) с топологически эквивалентным характером траекторий линий тока. Из этих ячеек шесть имеют конечную площадь (по три слева и справа) и две – бесконечную (последние разграничиваются между собой исходящими из седла сепаратрисами). В окрестности седла S_0 линий тока энергии распределение интенсивности также имеет седлообразный характер. Отметим также, что на всех рисунках траектории сливаются только в неподвижных точках или же асимптотически (при $\tau \rightarrow \pm\infty$). В остальных случаях кажущееся слияние объясняется графической точностью.

Как видно из сравнения рис.1.1 ($t = 0$) и 1.2 ($t = 5.6$), первой по времени ($t < 5.6$) является бифуркация 3-го типа со слиянием и последующим уничтожением внешнего «неустойчивого» и промежуточного «устойчивого» предельных циклов левого солитона ($N_c = 6$).

Характер следующей бифуркации ($5.6 < t < 6$) можно выявить из сравнения рис.1.2 и 1.3. Тип особых точек на этом временном интервале не меняется. Из предельных

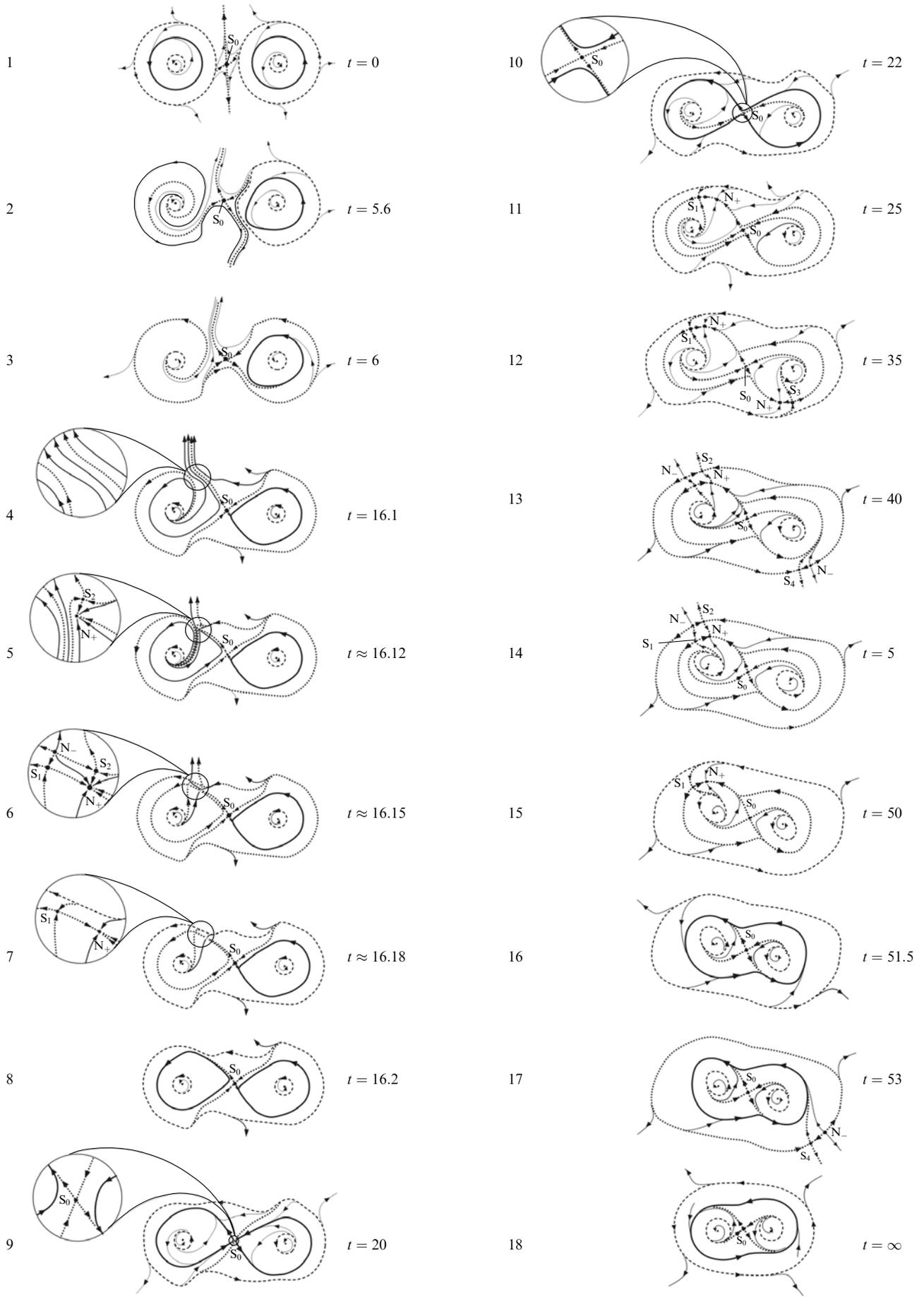


Рис.1. Серия фазовых портретов энергетических потоков (см. текст).

циклов в момент бифуркации исчезает только один внешний «неустойчивый», отвечающий правому солитону. Одновременно исходящая из седла петля сепаратрисы, которая ранее (см. рис.1.2) уходила вниз, охватывает предельные циклы левого солитона и возвращается снова в седло. После бифуркации эта сепаратриса навивается на «устойчивый» предельный цикл правого солитона. Это бифуркация 4-го типа. Здесь $N_c = 5$, причем одна из ячеек имеет бесконечную площадь.

При переходе к рис.1.9 ($t = 20$) наблюдается бифуркация с образованием двух предельных циклов – «устойчивого» левого и «неустойчивого», охватывающего «устойчивые» левый и правый циклы. Фактически этот переход происходит в узком промежутке времени $16.1 < t < 16.2$. В отличие от других вариантов, в данном случае не удается классифицировать эту бифуркацию как одну из элементарных. Возможно, однако, ее представление в виде последовательности нескольких элементарных бифуркаций 1-го типа, прямых и обратных, протекающих на малых временном и пространственном масштабах, что и не дает возможности разрешить их по отдельности. На рис.1.4–1.8 мы показываем эту предполагаемую последовательность с некоторым искажением пространственных масштабов и вставками для наглядности.

На рис.1.4, топологически эквивалентном рис.1.3, показана схематизированная диаграмма вектора Пойнтинга при $t = 16.1$, $N_c = 5$. При переходе к рис.1.5 реализуется обратная бифуркация 1-го типа: возникают седло S_2 и «устойчивый» узел N_+ ($N_c = 7$). Затем, при переходе к рис.1.6, из-за обратной бифуркации 1-го типа возникают седло S_1 и «неустойчивый» узел N_- ($N_c = 9$). При следующей бифуркации 1-го типа сливаются седло S_2 и узел N_- ($N_c = 8$) (рис.1.7). Здесь мы имеем дело с возникновением предельного цикла из петли сепаратрисы седло – узел аналогично ситуациям, отраженным на рис.1.8, 1.15, 1.16, 1.18. Наконец, к моменту времени $t = 16.2$ (рис.1.8) в результате бифуркации 1-го типа сливаются седло S_1 и узел N_+ и мы получаем конфигурацию, топологически эквивалентную приведенной на рис.1.9 ($N_c = 7$).

Примечательно, что после возникновения двух седел и двух узлов в результате двух обратных бифуркаций 1-го типа (вставка к рис.1.6) образуется характерный «четырёхугольник сепаратрис». В данном случае он очень мал, его размер меньше шага расчетной сетки. Такой же характерный четырёхугольник возникает далее при $t = 40$ и 45 как некая флуктуация (см. рис.1.13 и 1.14, где он хорошо разрешается как по пространству, так и по времени). Но при $t = 16.2$ (рис.1.7 и 1.8), в отличие от $t = 50$ (переход от рис.1.15 к рис.1.16), каждое из двух седел сливается снова уже не со своим «родным» узлом (ранее родившимся при бифуркации 1-го типа одновременно с этим седлом), а с «чужим», что радикально меняет ситуацию. Такое «перезамыкание» сепаратрис и обеспечивает качественное изменение топологической структуры потоков вектора Пойнтинга.

При переходе к рис.1.10 ($t = 22$) наблюдаются сразу две обратные бифуркации 4-го типа и справа и слева (ср. с переходом от рис.3.5в к 3.5а в [10]). «Устойчивые» предельные циклы разрушаются, а внутренние «неустойчивые» предельные циклы на рис.1.10 сопоставляются с «неустойчивым» фокусом на рис.3.5а из [10]. В момент бифуркации одновременно существуют две петли сепаратрис седла с одной общей точкой, как на рис.132 в [11] (п.29). Число ячеек $N_c = 6$ (здесь и далее одна ячейка име-

ет бесконечную площадь). Эта конфигурация уже топологически эквивалентна конечной конфигурации, однако солитонный комплекс еще не установился.

На рис.1.11 ($t = 25$) наблюдается обратная бифуркация 1-го типа – возникновение «устойчивого» узла N_+ и седла S_1 во внутреннем «устойчивом» цикле слева вверх. Здесь предельный цикл разрушается, превращаясь в момент бифуркации в петлю сепаратрисы седло – узел; аналогичная ситуация изображена далее на рис.1.12, 1.13, 1.17 ($N_c = 7$).

Из сравнения рис.1.12 ($t = 35$) и 1.11 ($t = 25$) следует наличие обратной бифуркации 1-го типа – возникновение «устойчивого» узла N_+ и седла S_3 во внешнем «неустойчивом» цикле справа вниз ($N_c = 9$).

На рис.1.13 ($t = 40$) наблюдаются три близкие по времени бифуркации: обратная бифуркация 1-го типа – возникновение «неустойчивого» узла N_- и седла S_2 во внешнем «неустойчивом» цикле слева вверх, та же бифуркация справа вниз и бифуркация 1-го типа – слияние «устойчивого» узла N_+ и седла S_3 во внутреннем «устойчивом» цикле справа вниз. Общее число ячеек N_c максимально и равно 10. При переходе к рис.1.14 ($t = 45$) наблюдается бифуркация 1-го типа – слияние «неустойчивого» узла N_- и седла S_4 в точке внешнего «неустойчивого» цикла ($N_c = 8$). На рис.1.15 ($t = 50$) показана бифуркация 1-го типа – слияние «неустойчивого» узла и седла S_2 во внешнем «неустойчивом» цикле слева вверх ($N_c = 7$). При переходе к рис.1.16 ($t = 51.5$) наблюдается бифуркация 1-го типа – слияние «устойчивого» узла и седла S_1 в точке внутреннего «устойчивого» цикла ($N_c = 6$). Эта конфигурация топологически эквивалентна конечной конфигурации. На рис.1.17 ($t = 53$) показана обратная бифуркация 1-го типа – возникновение «неустойчивого» узла и седла в точке внешнего «неустойчивого» цикла справа вниз ($N_c = 6$). Конечная ($t = \infty$) установившаяся конфигурация представлена на рис.1.18. Топологическая структура устанавливается уже при $t \approx 65$, а ее форма – после нескольких сотен единиц времени. Общее число ячеек $N_c = 6$.

Таким образом, в настоящей работе прослежены бифуркации структуры энергетических потоков (усредненного за оптический период вектора Пойнтинга) в процессе установления сильно связанной пары двух лазерных вихрей с одинаковыми топологическими зарядами. Подчеркнем, что управляющим параметром здесь служит время t , в каждый момент которого траектории фазовой плоскости отвечают линиям тока энергии, параметризуемым величиной τ , пропорциональной длине линии.

Полученный каскад бифуркаций нетривиален, но каждая единичная бифуркация входит в число четырех известных (в рассмотренном случае наблюдались только негрубые элементы первого, третьего и четвертого типов). Нам представляется, что анализ бифуркаций полезен не только для интерпретации полученных результатов, но и для нахождения новых типов сильно связанных солитонных комплексов. Отметим, что именно анализ топологической структуры вектора Пойнтинга, в дополнение к более стандартному описанию пространственно-временной динамики огибающей электромагнитного поля, позволил выделить индивидуальные и коллективные элементы солитонов (предельные циклы) и проследить бифуркации, заключающиеся в преобразовании некоторых индивидуальных предельных циклов в коллективные в процессе формирования этого комплекса солитонов.

Экспериментально реализовать условия, в которых возникают такие структуры, можно было бы в полупроводниковых усилительных и лазерных системах [12], например в системах типа лазеров с вертикальным резонатором. При характерных поперечных размерах резонатора 100 мкм, продольном размере 10 мкм и эффективном коэффициенте отражения зеркал $R \sim 0.1 - 0.001$ характерный временной масштаб (безразмерная единица времени в уравнении (1)) будет равен $\sim 10^{-12} - 10^{-14}$ с. Отметим также, что родственные явления могут наблюдаться для дискретных диссипативных солитонов в перспективных для обработки информации двумерных сетях связанных световодов с нелинейными усилением и поглощением [13].

Работа поддержана грантами РФФИ № 04-02-16605-а и 04-02-81014 Бел.

1. Розанов Н.Н., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **72** (6), 1394 (1992).
2. Rosanov N.N. *Spatial Hysteresis and Optical Patterns* (Berlin: Springer, 2002).
3. Fedorov S.V., Rosanov N.N., Shatsev A.N., Veretenov N.A., Vladimirov A.G. *Trans. IEEE J. Quantum Electron.*, **39** (2), 1979 (2003).
4. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Шацев А.Н. *Оптика и спектроскопия*, **95** (6), 902 (2003).
5. Slekyš G., Staliūnas K., Weiss C.O. *Opt. Commun.*, **149**, 113 (1998).
6. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A. *Physica D*, **3**, 428 (1981).
7. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Федоров А.В., Ходова Г.В. *Оптика и спектроскопия*, **79** (5), 868 (1995).
8. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Шацев А.Н., Лойко Н.А. *Оптика и спектроскопия*, **97** (1), 96 (2004).
9. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Шацев А.Н. *ЖЭТФ*, **125** (3), 486 (2004).
10. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Введение в теорию нелинейных колебаний* (М.: Наука, 1976).
11. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости* (М.: Наука, 1967).
12. Ultanir E.A., Stegeman G.I., Michaelis D., Lange C.H., Lederer F. *Phys. Rev. Lett.*, **90** (25), 253903 (2003).
13. Ultanir E.A., Stegeman G.I., Christodoulides D.N. *Opt. Lett.*, **29** (8), 845 (2004).