

Статистические и когерентные свойства рассеянных световых полей при различных геометрических параметрах шероховатых поверхностей

П.А.Бакут, В.И.Мандросов

Анализируется взаимосвязь между корреляционными и когерентными свойствами рассеянных шероховатыми поверхностями световых полей и геометрическими характеристиками этих поверхностей. Показано, что если время когерентности подсвечивающего поверхности излучения $\tau_c > 10/\omega_0$ (где ω_0 – центральная частота спектра излучения), то с помощью усредненного по времени $T > 10\tau_c$ распределения интенсивности поля, рассеянного шероховатой поверхностью, можно определить области стационарности и когерентные характеристики рассеянного поля, а также условия, накладываемые на узкополосные и хроматические (спектральные) характеристики подсвечивающего излучения. Эти области, характеристики и условия задаются следующими параметрами: длиной когерентности подсвечивающего излучения $L_c = \tau_c c$, поперечным размером области обратного рассеяния поверхности d , глубиной области обратного рассеяния L_s , расстоянием от приемной апертуры до поверхности r_c , размером приемной апертуры d_p , центральной длиной волны подсвечивающего излучения $\lambda_0 = c/\omega_0$ и среднеквадратичным отклонением высот неровностей поверхности σ . Полученные результаты позволяют найти соотношения между L_c , L_s и σ , при которых подсвечивающее излучение ведет себя как монохроматическое, квазимонохроматическое или полихроматическое, а рассеянное поле – как когерентное, частично когерентное или некогерентное.

Ключевые слова: рассеяние на шероховатых поверхностях, стационарность и когерентность рассеянных полей, спеклы в рассеянном поле, узкополосные и хроматические характеристики подсвечивающего излучения.

1. Введение

Понятие когерентности волновых процессов уже давно активно используется в радиофизике и оптике [1–7]. В настоящей работе речь идет о когерентности световых полей, рассеянных шероховатыми поверхностями при их подсветке излучением, которое имеет ширину спектра $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau_c \ll \omega_0$ (где τ_c , $\Delta\omega$ и ω_0 – время когерентности излучения, ширина и центральная частота спектра) и, как правило, считается узкополосным [1]. Однако до сих пор существуют некоторые неточности в определении понятия когерентности, например в случае регистрации интенсивности рассеянного исследуемыми поверхностями излучения за время $T > 10\tau_c$ (обычно $T > 10^{-6}$ с). Не отслеживается также влияние геометрических характеристик рассеивающих поверхностей и спектральных характеристик подсвечивающего шероховатые поверхности излучения на взаимосвязь между статистическими, корреляционными (пространственными) и когерентными (временными) свойствами рассеянных полей. Не ясно, например, как эти характеристики влияют на такие свойства рассеянных полей, как контраст и радиус корреляции распределения интенсивности в этих полях, которые определяют пятнистую картину (спекл-картину) рассеянного поля. В частности, для случая неплоских рассеивающих поверхностей, как правило, отсутствует анализ зависимости контраста и радиуса корреляции от $\Delta\omega$, мак-

роскопических параметров формы поверхностей, среднеквадратичного отклонения σ и радиуса корреляции l высот неровностей рассеивающей поверхности. Следует отметить, что и сами границы узкополосности подсвечивающего излучения также недостаточно четко определены.

В данной работе ставится задача нахождения зависимости статистических и когерентных свойств рассеянного шероховатыми поверхностями поля и соответствующих им узкополосных и хроматических (спектральных) характеристик подсвечивающего излучения от геометрических характеристик этих поверхностей. Для этого вместо комплексной степени взаимной когерентности рассеянных полей, традиционно используемой для анализа когерентных свойств рассеянного поля [1, 2], вводятся нормированная корреляционная функция и контраст усредненной за время $T \geq 10\tau_c$ интенсивности рассеянного поля.

Выявленные в настоящей работе особенности введенных функций, в которых наиболее заметную роль играют размер d и глубина L_s области обратного рассеяния поверхности, позволяют решить поставленную задачу. В частности, они дают возможность установить четкую границу узкополосности подсвечивающего излучения, которая оказалась тесно связанной со стационарностью (однородностью) усредненной интенсивности рассеянного поля. Ранее эта граница не была установлена. Найденные особенности позволяют также сформулировать достаточно четкие и удобные на практике геометрические условия, определяющие области существования, в пределах которых рассеянные шероховатыми поверхностями поля при подсветке поверхностей узкополосным излучением проявляют себя как когерентные, частично когерентные или некогерентные.

Получен контраст усредненной интенсивности рассе-

П.А.Бакут, В.И.Мандросов. Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9;
e-mail: bakut@astroinform.ru, mandrosov@mail.ru

янных полей в пределах каждой из этих областей и показано, что он уменьшается до практически нулевого контраста при трансформации когерентного рассеянного поля в некогерентное. Соответствующее этим областям подсвечивающее излучение может быть монохроматическим, квазимонохроматическим и полихроматическим. Подобное подразделение было недавно проведено в предположении, что поверхность подсвечивается излучением импульсного лазера с модулированной добротностью [8]. В настоящей работе оно выполнено при условии, что шероховатые поверхности подсвечиваются узкополосным излучением источников различной природы, включая импульсные и непрерывные лазеры, а также тепловые источники. С помощью известной в литературе [1] комплексной функции взаимной когерентности этого сделать не удается.

2. Корреляционные характеристики рассеянных полей

Выражение для случайного поля, рассеянного поверхностью, можно представить в приближении Кирхгофа в следующем виде [3, 4] (рис. 1):

$$E(\rho, t) = E_0 \frac{i}{r_c \lambda_0} \iint k(r_\Sigma) \exp \left[i\omega_0 \left(t - \frac{|r_\Sigma - \rho_s| + |r_\Sigma - \rho|}{c} \right) \right] \times U \left(t - \frac{|r_\Sigma - \rho_s| + |r_\Sigma - \rho|}{c} \right) dr_\Sigma,$$

где E_0 – амплитуда поля подсвечивающего излучения на поверхности; r_Σ – радиус-вектор шероховатого участка рассеивающей поверхности; $k(r_\Sigma)$ – распределение френелевских коэффициентов отражения на поверхности; r_c –

радиус-вектор ближайшей к приемной апертуре точки поверхности; ω_0 и $\lambda_0 = c/\omega_0$ – центральные частота и длина волны подсвечивающего излучения; c – скорость света; ρ – радиус-вектор на приемной апертуре; ρ_s – радиус-вектор источника; $U(t)$ – медленно меняющаяся по сравнению с $\exp(i\omega_0 t)$ безразмерная непериодическая функция модуляции подсвечивающего излучения с шириной спектра $\Delta\omega$.

Введем далее случайное распределение высот неровностей рассеивающей поверхности $\xi(r)$ (где r – радиус-вектор средней поверхности) как совокупность отклонений этой поверхности от средней. Тогда $r_\Sigma \approx r + N(r)\xi(r)$, где $N(r)$ – нормаль к средней поверхности; $r = r(u, v)$; u, v – ортогональные координаты на средней поверхности. Введем также одномерную ($w_1(\xi)$) и двумерную ($w_{12}(\xi_1, \xi_2)$) плотности вероятностей этого распределения, так что, например, дисперсия ξ определяется соотношением $\sigma^2 = \int \xi^2 w_1(\xi) d\xi$. Поместим источник подсвечивающего излучения в центре приемной апертуры ($\rho_s = 0$). Поскольку высоты неровностей небольшие ($\xi(r) \ll r$), то с точностью до несущественных множителей

$$E(\rho, t) \sim \exp(i\omega_0 t) \int k(r) \exp \left[-\frac{i\omega_0(r + |r - \rho|)}{c} \right] \times \exp \left[-\frac{iq_N \xi(r)\omega_0}{c} \right] U \left[t - \frac{r + |r - \rho| + q_N \xi(r)}{c} \right] dr,$$

где $q_N = qN$; $q \approx 2r_c/r_c$ – вектор рассеяния (т.е. сумма единичных векторов, направленных от источника к объекту и от объекта к приемной апертуре) [3, 4].

Далее будет определена функция корреляции $B_a(\rho_1, \rho_2)$ усредненного по времени распределения интенсивности рассеянного поля

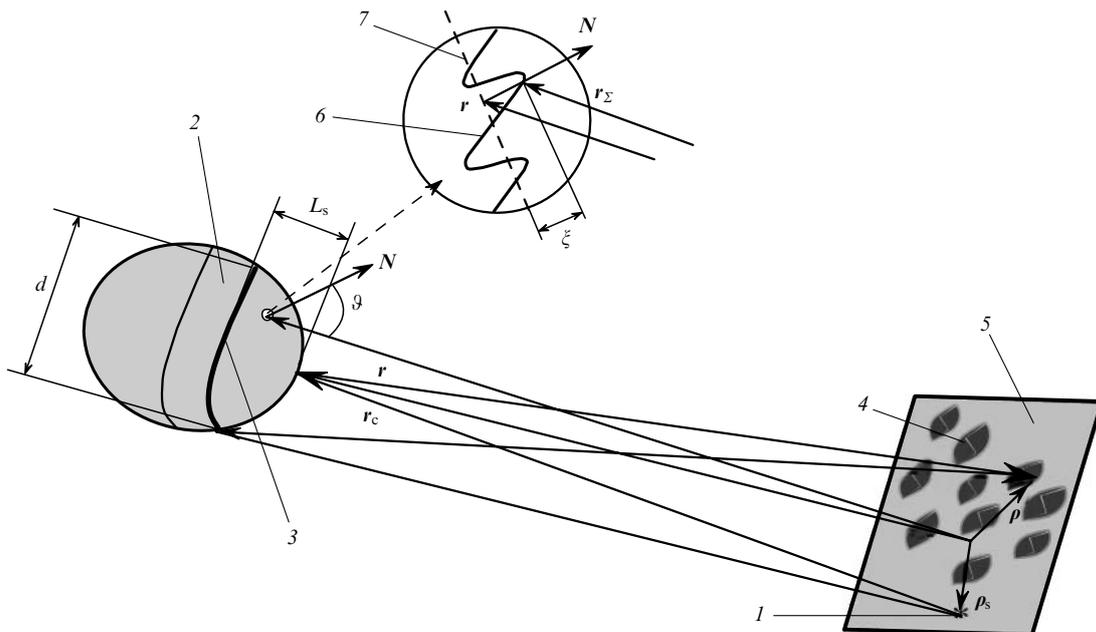


Рис. 1. Схема рассеяния светового поля шероховатой поверхностью (показаны лучи, идущие от источника к центру и периферии области обратного рассеяния):

1 – источник подсвечивающего излучения; 2 – поверхность; 3 – граница области обратного рассеяния; 4 – спектр-картина; 5 – приемная апертура (область наблюдения рассеянного поля $E(\rho, t)$); 6 – многократно увеличенный профиль небольшого участка шероховатой поверхности; 7 – средняя поверхность.

$$\bar{I}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I(\boldsymbol{\rho}, t) dt,$$

где $I(\boldsymbol{\rho}, t) = |E(\boldsymbol{\rho}, t)|^2$ – мгновенная интенсивность этого поля; t_0 – исходный момент усреднения. Как правило, поле $E(\boldsymbol{\rho}, t)$ имеет гауссово распределение [4]. Можно показать, что в этом случае

$$B_a(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{1}{T^2} \times \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\langle E(\boldsymbol{\rho}_1, t_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, t_2) \rangle_r|^2 dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где

$$\langle E(\boldsymbol{\rho}_1, t_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, t_2) \rangle_r = \iint E(\xi_1, \boldsymbol{\rho}_1, t_1) E^*(\xi_2, \boldsymbol{\rho}_2, t_2) \times w_{12}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

– функция корреляции рассеянного поля $E(\boldsymbol{\rho}, t)$, определяемая по многочисленным реализациям; $\xi_k = \xi(\mathbf{r}_k)$. Рассматривается также и нормированная функция корреляции

$$B_n(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{B_a(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)}{\langle I(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle_r \langle I(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle_r}. \quad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma \gg \lambda$. Тогда в приближении Френеля [4]

$$\langle E(\boldsymbol{\rho}_1, t_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, t_2) \rangle_r \sim \iint k_s(\mathbf{r}) \exp \left[i \frac{2\pi \mathbf{r}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \times U \left(t_1 - \frac{r + \mathbf{r}\boldsymbol{\rho}_1/r_c + q_N \xi}{c} \right) \times U^* \left(t_2 - \frac{r + \mathbf{r}\boldsymbol{\rho}_2/r_c + q_N \xi}{c} \right) w_1(\xi) d\xi d\mathbf{r}, \quad (3)$$

где $k_s(\mathbf{r}) \approx w_s(\xi'_u = q_\perp l_u / (q_N \sigma)) w_s(\xi'_v = q_\perp l_v / (q_N \sigma)) |k(\mathbf{r})|^2$ – коэффициент, отражающий рассеяние поверхности назад; $q_\perp = (q^2 - q_N^2)^{1/2}$; l_u и l_v – радиусы корреляции высот неровностей вдоль координат u и v ; $w_s(\xi'_u)$ и $w_s(\xi'_v)$ – плотности вероятностей распределения наклонов ξ'_u и ξ'_v высот неровностей ξ . Будем далее предполагать, что высоты неровностей статически изотропны, т.е. $l_u = l_v = l$. Тогда $k_s(\mathbf{r}) \approx w_s^2(\xi'_u = (l/\sigma) \tan \vartheta) |k(\mathbf{r})|^2$, где $\vartheta = q_\perp / q_N$ (рис.1). Если, например, плотность вероятностей w_1 является гауссовой [3], т.е. $w_1(x) = [1/(\sqrt{2\pi}\sigma)] \times \exp(-x^2/\sigma^2)$, то $k_s(\mathbf{r}) \approx (l/\sigma)^2 |k(\mathbf{r})|^2 \exp\{-[(l/\sigma) \tan \vartheta]^2\}$. Уравнение $\tan \vartheta_b(\mathbf{r}) = \sigma/l$ определяет границу области обратного рассеяния поверхности, а ее удаление от ближайшей к приемной апертуре точки поверхности – глубину L_s этой области (рис.1). Для плоской средней поверхности, параллельной приемной апертуре, интенсивность рассеянного поля $I(\boldsymbol{\rho}, t) \sim w_1^2(\xi'_u = (l/\sigma) \tan \vartheta_p)$, где $\vartheta_p = \rho/r_c$ – угол между нормалью к средней поверхности и направлением на точку наблюдения рассеянного поля. Это значит [3], что в данном случае индикатриса рассеяния определяется плотностью вероятностей распределения наклонов неровностей.

С учетом соотношений (1) и (3) получим следующие выражения:

$$\langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle \sim \int k_s(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4)$$

$$B_a(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \sim \iint k_s(\mathbf{r}_1) k_s(\mathbf{r}_2) \exp \left[i \frac{2\pi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \times \iint \frac{1}{T^2} \iint U \left(t_1 - \frac{r_1 + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\rho}_1 / r_c + q_N \xi_1}{c} \right) \times U^* \left(t_2 - \frac{r_1 + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\rho}_2 / r_c + q_N \xi_1}{c} \right) \times U^* \left(t_1 - \frac{r_2 + \mathbf{r}_2 \boldsymbol{\rho}_1 / r_c + q_N \xi_2}{c} \right) \times U \left(t_2 - \frac{r_2 + \mathbf{r}_2 \boldsymbol{\rho}_2 / r_c + q_N \xi_2}{c} \right) \times w_1(\xi_1) w_1(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 = \iint k_s(\mathbf{r}_1) k_s(\mathbf{r}_2) \times \exp \left[i \frac{2\pi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \rho_t(\mathbf{r}_1, \xi_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_2, \xi_2) \times \rho_t^*(\mathbf{r}_1, \xi_1, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{r}_2, \xi_2) w_1(\xi_1) w_1(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (5)$$

где

$$\rho_t(\mathbf{r}_1, \xi_1, \boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}_2, \xi_2) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U \left(t - \frac{r_1 + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\rho}_j / r_c + q_N \xi_1}{c} \right) \times U^* \left(t - \frac{r_2 + \mathbf{r}_2 \boldsymbol{\rho}_j / r_c + q_N \xi_2}{c} \right) dt$$

– функции, представляющие собой автосвертки функции $U(t)$; $j = 1, 2$. Зависимость функций ρ_t от $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ свидетельствует об отклонении случайного процесса $\bar{I}(\boldsymbol{\rho})$ от стационарного, которое обычно незначительно (см. Приложение). Контраст пятнистой структуры $\bar{I}(\boldsymbol{\rho})$ определяется соотношением

$$C(\boldsymbol{\rho}) = \frac{B_a(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})}{\langle \bar{I}(\boldsymbol{\rho}) \rangle^2}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что если непериодическая функция $U(t)$ имеет небольшое число экстремумов за время регистрации интенсивности рассеянного поля T , то она ведет себя как детерминированная функция с временной шириной τ_c , относящаяся к классу функций, для которых при $\tau_c \ll T$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U \left(t - \frac{\alpha}{c} \right) U^* \left(t - \frac{\beta}{c} \right) dt = B \left[\frac{(\alpha - \beta)^2}{L_c^2} \right],$$

где $L_c = c\tau_c$; α и β – параметры, имеющие размерность длины. Это происходит, например, при использовании подсвечивающего излучения импульсного лазера с модулированной добротностью. Здесь время его когерентности τ_c – это временная ширина функции $U(t)$. Тогда

$$\rho_t(\mathbf{r}_1, \xi_1, \boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}_2, \xi_2) \approx$$

$$\approx B \left\{ - \frac{[r_1 - r_2 + (r_1 - r_2)\rho_j/r_c + q_N \xi_1 - q_N \xi_2]^2}{L_c^2} \right\}.$$

В частности, если $U(t)$ имеет гауссову форму, т. е. $U(t) = \exp(-t^2/\tau^2)$, то

$$\begin{aligned} & \rho_t(r_1, \xi_1, \rho_j, r_2, \xi_2) \\ &= \exp \left\{ - \frac{[r_1 - r_2 + (r_1 - r_2)\rho_j/r_c + q_N \xi_1 - q_N \xi_2]^2}{L_c^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если же непериодическая функция $U(t)$ имеет большое число экстремумов за время регистрации интенсивности T , то целесообразно предположить, что в этом случае она ведет себя как случайный процесс с функцией корреляции $B_U(t_1, t_2) = \langle U(t_1)U^*(t_2) \rangle_U$. Это имеет место, например, при использовании подсвечивающего излучения непрерывного лазерного или теплового источника. В предположении, что случайный процесс $U(t)$ является стационарным, $B_U(t_1, t_2) = B_U[(t_1 - t_2)^2/\tau_c^2]$. Здесь τ_c – время корреляции процесса, которое также определим как время когерентности. При $\tau_c = 2\pi/\Delta\omega \ll T$ реализуется аппроксимация

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U\left(t - \frac{\alpha}{c}\right) U^*\left(t - \frac{\beta}{c}\right) dt \approx B_U \left[\frac{(\alpha - \beta)^2}{L_c^2} \right]$$

и

$$\begin{aligned} & \rho_t(r_1, \xi_1, \rho_j, r_2, \xi_2) \\ & \approx B_U \left\{ - \frac{[r_1 - r_2 + (r_1 - r_2)\rho_j/r_c + q_N \xi_1 - q_N \xi_2]^2}{L_c^2} \right\}. \end{aligned}$$

В частности, если функция корреляции B_U имеет гауссову форму, при которой $B_U[(t_1 - t_2)^2/\tau_c^2] = \exp[-(t_1 - t_2)^2/\tau_c^2]$, то функция ρ_t также определяется соотношением (6).

В дальнейшем будем использовать часто встречающийся в литературе термин [1] – длина когерентности подсвечивающего излучения $L_c = c\tau_c$. Поскольку $U(t)$ – медленно меняющаяся безразмерная функция, то $\tau_c > 2\pi/\omega_0$, или, в другой записи, $L_c > \lambda_0$. Таким образом, и для детерминированных и для случайных функций $U(t)$ выражение для ρ_t можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \rho_t(r_1, \xi_1, \rho_j, r_2, \xi_2) \\ & \approx G \left\{ - \frac{[r_1 - r_2 + (r_1 - r_2)\rho_j/r_c + q_N \xi_1 - q_N \xi_2]^2}{L_c^2} \right\}, \end{aligned}$$

где на функцию G накладываются следующие условия:

$$G(0) = 1, \quad G(1) \approx 1/e, \quad G(\pm\infty) = 0. \quad (7)$$

3. Классификация когерентных свойств рассеянных полей и хроматических свойств подсвечивающего шероховатую поверхность излучения

Будем называть подсвечивающее излучение узкополосным, если ширина спектра $\Delta\omega = 2\pi/\tau_c \leq 0.25\omega_0 M^{-1/2}$ (где $M = (d_p d)^2/(\lambda_0 r_c)^2$ – число спеклов в рассеянном поле в пределах приемной апертуры, d_p – размер приемной

апертуры [4]), т. е. при длине когерентности подсвечивающего излучения

$$L_c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \geq L_{cM}, \quad (8)$$

где $L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2}$. Из Приложения следует что в этом случае

$$\begin{aligned} & B_a(\rho_1, \rho_2) \approx B_{a0}(\rho_1 - \rho_2) \\ & \sim \iiint k_s(r_1)k_s(r_2) \exp \left[i \frac{2\pi(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \\ & \times \left| G \left[- \frac{(r_1 - r_2 + q_N \xi_1 - q_N \xi_2)^2}{L_c^2} \right] \right|^2 \\ & \times w_1(\xi_1)w_1(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 dr_1 dr_2, \end{aligned} \quad (9)$$

Зависимость $B_a(\rho_1, \rho_2)$ от $\rho_1 - \rho_2$ свидетельствует о стационарности случайного процесса $\bar{I}(\rho)$ при выполнении условия (8), определяющего нижнюю границу L_{cM} длины когерентности подсвечивающего излучения, при которой оно является узкополосным. Поскольку $\langle \bar{I}(\rho) \rangle$ не зависит от ρ , то контраст $C(\rho) = B_a(\rho, \rho)/\langle \bar{I}(\rho) \rangle^2$ в случае стационарности случайного процесса $\bar{I}(\rho)$ в любой точке приемной апертуры практически постоянен.

Таким образом, подсвечивающее шероховатую поверхность излучение является узкополосным, если в результате его рассеяния усредненное по времени распределение интенсивности рассеянного поля представляет собой случайный стационарный процесс. Это значит, что такое распределение – однородная интерференционная картина, свидетельствующая о проявлении когерентных свойств рассеянного поля. Оно и будет далее проанализировано для различных соотношений между длиной когерентности L_c и геометрическими параметрами поверхности.

Пусть, например, при выполнении условия (8) $L_c > q_N \sigma$. В этом случае

$$\begin{aligned} & B_{a0}(\rho_1 - \rho_2) \sim \iint k_s(r_1)k_s(r_2) \exp \left[i \frac{2\pi(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \\ & \times \left| G \left[- \frac{(r_1 - r_2)^2}{L_c^2} \right] \right|^2 dr_1 dr_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь возможны два наиболее интересных случая.

$L_c > 2L_s$. Тогда, как видно из условий (7), при $L_c \gg L_s$ имеем $|G[-(r_1 - r_2)^2/L_c^2]| \approx 1$. Поэтому

$$B_{a0}(\rho_1, \rho_2) \sim \left| \int k_s(r) \exp \left[i \frac{2\pi r(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] dr \right|^2,$$

$$C = \frac{B_a(\rho, \rho)}{\langle \bar{I}(\rho) \rangle^2} \sim 1.$$

Такой высокий контраст пятнистой структуры объясняется тем, что в данном случае в каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд (интерференции) волн, рассеянных всей областью обратного рассеяния поверхности, что характерно для подсвечивающего излучения с беско-

нечной длиной когерентности ($L_c = \infty$). В связи с этим подсвечивающее излучение при $L_c > 2L_s$ ведет себя как монохроматическое, а рассеянное поле – как когерентное.

$2L_s > L_c$. При этом условии, не умаляя общности, определим функцию корреляции усредненного по времени распределения интенсивности рассеянного поля $\bar{I}(\rho)$ для средней поверхности, которая представляет собой параболоид вращения с осью, перпендикулярной приемной апертуре. Тогда $r \approx r_c + R^2/(2\rho_0)$, где R – расстояние от оси параболоида до точки с радиусом-вектором \mathbf{r} ; ρ_0 – радиус кривизны вершины исследуемой поверхности. В данном случае можно показать, что поперечный размер области обратного рассеяния (рис.1) $d \approx \rho_0 \sigma / l$, а глубина, т. е. ее продольный размер, $L_s \approx (\rho_0/8)(\sigma/l)^2$. При этом

$$\langle \bar{I}(\rho) \rangle \sim \int k_s(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int k_s(R) R dR d\varphi,$$

где R и φ – полярные координаты средней поверхности. С учетом условий (7) при $L_s \gg L_c > q_N \sigma$ функция $|G[-(r_1 - r_2)^2/L_c^2]|^2$ имеет меньшую ширину по координате R , чем остальные функции в (10), так что справедлива аппроксимация $r_1 - r_2 \approx R_1(R_1 - R_2)/\rho_0$. Тогда при малой величине $|\rho_1 - \rho_2|$ получим

$$B_{a0}(\rho_1, \rho_2) \sim \rho_0 L_c \int \left[1 - \frac{|\rho_1 - \rho_2|^2 d^2}{(\lambda_0 r_c)^2} \right] k_s^2(R) R dR$$

и контраст пятнистой структуры рассеянного поля

$$C = \frac{B_a(\rho, \rho)}{\langle \bar{I}(\rho) \rangle} \approx \frac{L_c}{2L_s} < 1.$$

Такой относительно низкий контраст объясняется тем, что в данном случае в каждой точке области наблюдения этого поля оно формируется путем суммирования амплитуд волн, рассеянных только отдельными частями области обратного рассеяния поверхности. Поэтому, несколько ослабив соотношение между длиной когерентности и глубиной области обратного рассеяния ($2L_s > L_c > q_N \sigma$), мы получим, что подсвечивающее излучение ведет себя как квазимонохроматическое, а рассеянное поле – как частично когерентное.

Пусть теперь $q_N \sigma \gg L_c > L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2}$. При этом условии

$$\begin{aligned} B_{a0}(\rho_1, \rho_2) &\sim L_c \iint k_s(\mathbf{r}_1) k_s(\mathbf{r}_2) \\ &\times \exp \left[i \frac{2\pi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \\ &\times w_1(\xi_1) w_1(r_1 - r_2 + \xi) d\xi d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $w_1(\xi_1)$ относится к классу функций, для которых

$$\int w_1(\xi) w_1(\gamma + \xi) d\xi = \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{\gamma^2}{(q_N \sigma)^2} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_a(\rho_1, \rho_2) &\sim \frac{L_c}{q_N \sigma} \iint k_s(\mathbf{r}_1) k_s(\mathbf{r}_2) \\ &\times \exp \left[i \frac{2\pi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] \exp \left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{(q_N \sigma)^2} \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь также возможны два наиболее интересных случая.

$L_s > q_N \sigma$. Тогда при $L_s \gg q_N \sigma$ функция $\exp[-(r_1 - r_2)^2/(q_N \sigma)^2]$ имеет гораздо меньшую ширину по координате r , чем остальные функции в (11). С учетом этого условия, выбирая в качестве средней поверхности параболоид вращения, при малой величине $|\rho_1 - \rho_2|$ получаем

$$B_a(\rho_1, \rho_2) \sim \rho_0 L_c \int \left[1 - \frac{|\rho_1 - \rho_2|^2 d^2}{(\lambda_0 r_c)^2} \right] k_s^2(R) R dR$$

и, следовательно, $C \approx L_c/(2L_s) \ll 1$. Столь низкий контраст пятнистой структуры объясняется тем, что в данном случае в каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд волн, рассеянных как отдельными частями области обратного рассеяния поверхности, так и отдельными частями каждой неровности на ней. Поэтому подсвечивающее излучение при условии $L_s \gg q_N \sigma$ и такой длине когерентности, что $q_N \sigma \gg L_c > L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2}$, ведет себя как полихроматическое, а рассеянное поле – как некогерентное.

$L_s \ll q_N \sigma$. При этом $q_N \sigma \gg L_c > L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2}$. Тогда $|r_1 - r_2| \ll \xi$ и $\exp[-(r_1 - r_2)^2/(q_N \sigma)^2] \approx 1$, в результате чего

$$B_a(\rho_1, \rho_2) \sim \left| \int k_s(\mathbf{r}) \exp \left[i \frac{2\pi\mathbf{r}(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c} \right] d\mathbf{r} \right|^2$$

и $C = L_c/(2\sigma) \ll 1$, $q_N = 2$. Этот случай реализуется достаточно редко, например при подсветке полихроматическим излучением в среднем плоской поверхности, параллельной приемной апертуре, относительно узким пучком. В каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд волн, рассеянных отдельными частями каждой неровности на поверхности. Рассеянное поле также является некогерентным. Интересным примером может служить вогнутая шероховатая сферическая поверхность (рис.2) с глубиной области обратного рассеяния $L_s = 0$.

Отметим, что для такой поверхности при $L_s \ll q_N \sigma$ и $L_c \gg 2\sigma$ удастся получить аналитическую формулу для корреляционной функции $B_a(\rho_1, \rho_2)$. Тогда область обратного рассеяния совпадает со всей рассеивающей поверхностью и поэтому $k_s(\mathbf{r}) = (l/\sigma)^2 |k(\mathbf{r})|^2$. Используя аппро-

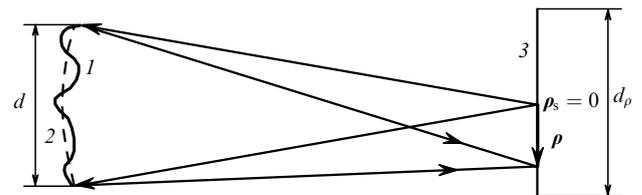


Рис.2. Схема рассеяния светового поля неглубоким объектом в виде вогнутой шероховатой сферической поверхности с параметрами $q_N = 2$ и $L_s = 0$: 1 – шероховатая сферическая поверхность; 2 – средняя сферическая поверхность; 3 – приемная апертура.

ксимацию $|k(\mathbf{r})|^2 \approx \exp[-(x^2 + y^2)/d^2]$ (где x, y – декартовы координаты) и полагая для некоторого упрощения, что $\rho_1 = (\rho_{1x}, 0), \rho_2 = (r_{2x}, 0)$, получаем

$$B_a(\rho_1, \rho_2) \sim \int k_s(r_1)k_s(r_2) \exp\left[i\frac{2\pi(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c}\right] - \frac{[(r_1 - r_2)\rho_1/r_c]^2}{L_c^2} + \frac{[(r_1 - r_2)\rho_2/r_c]^2}{L_c^2} \Big] dr_1 dr_2 \sim B_n(\rho_1, \rho_2),$$

где

$$B_n(\rho_1, \rho_2) = \left[1 + \frac{d^2(\rho_{1x}^2 + \rho_{2x}^2)}{(r_c L_c)^2}\right]^{-1/2} \times \exp\left\{-\pi^2(\rho_{1x} - \rho_{2x})^2 \frac{d^2}{(\lambda_0 r_c)^2} \left[1 + \frac{d^2(\rho_{1x}^2 + \rho_{2x}^2)}{(r_c L_c)^2}\right]^{-1}\right\},$$

и

$$C(\rho) = \frac{B_a(\rho, \rho)}{\langle \bar{I}(\rho) \rangle^2} \approx \left[1 + \frac{2d^2\rho_x^2}{(r_c L_c)^2}\right]^{-1/2}.$$

Эти формулы дают представление об изменениях $B_a(\rho_1, \rho_2)$ и $C(\rho)$ по мере удаления точки наблюдения рассеянного поля от центра приемной апертуры, вблизи которого случайное распределение $\bar{I}(\rho)$ является стационарным (однородным), к его периферии, где отклонения от стационарного распределения максимальны (рис.3). При этом контраст $C(\rho)$ пятнистой структуры $\bar{I}(\rho)$ падает, достигая на краю приемной апертуры ($\rho_x = d_p/2$) минимального значения $C_{\min} = (1 + N_b^2/2)^{-1/2}$, где $N_b = d_p d \times (r_c L_c)^{-1}$ – число участков поверхности, дающих статистически независимые вклады в рассеянное поле на краю приемной апертуры. Видно, что при условии $L_c > 4\lambda_0 \times M^{1/2} = 4\rho_x d/r_c$, т.е. внутри области приемной апертуры $\rho_x < L_c r_c/(4d)$, отклонения случайного распределения $\bar{I}(\rho)$ от стационарного несущественны и что контраст в этой области приблизительно одинаков ($C(\rho) \approx 1$). При условии $L_c < 0.5\lambda_0 M^{1/2}$, т.е. при $\rho_x > 2L_c r_c/d$, ближе к краю приемной апертуры контраст $C(\rho) \approx 1/(\sqrt{2}n_x)$, где $n_x = \rho_x d/(r_c L_c)$ – число участков поверхности, дающих статис-

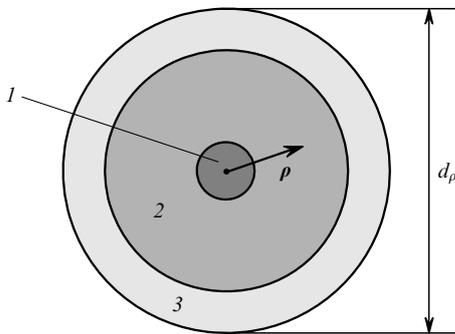


Рис.3. Картина усредненного по времени $T > 10\tau_c$ распределения интенсивности $\bar{I}(\rho)$ поля, рассеянного шероховатой поверхностью: 1 – область круговой приемной апертуры $\rho \leq (L_c r_c/(4d))$, удовлетворяющая условию узкополосности подсвечивающего излучения $L_c > 4\lambda_0 M^{1/2}$ (здесь $M = (\pi\rho d)^2/(4\lambda_0 r_c)^2$ – число спеклов в рассеянном поле), в которой распределение $\bar{I}(\rho)$ практически стационарно; 2 – область $L_c r_c/(4d) \geq \rho \geq L_c r_c/d$, в которой распределение $\bar{I}(\rho)$ заметно отклоняется от стационарного; 3 – область $\rho \geq L_c r_c/d$, в которой распределение $\bar{I}(\rho)$ практически нестационарно.

тически независимые вклады в рассеянное поле, которое быстро растет с ростом ρ_x . По мере приближения к краю приемной апертуры контраст $C(\rho)$ быстро падает. Это связано с заметным сглаживанием пятнистой структуры $\bar{I}(\rho)$, которое обусловлено тем, что ближе к краю приемной апертуры подсвечивающее излучение начинает действовать как широкополосное. На рис.3 дана картина усредненного по времени $T \gg \tau_c$ (в качестве примера $T > 10\tau_c$) распределения интенсивности $\bar{I}(\rho)$ поля, рассеянного шероховатой поверхностью, представленной на рис.2.

Следует особо отметить, что радиус корреляции ρ_c пятнистой структуры рассеянного поля при любом соотношении между L_c и L_s один и тот же: $\rho_c \approx \lambda_0 r_c/d$. Отметим также, что обычно на практике $q_N \approx 2$, поэтому во всех рассмотренных случаях q_N можно заменить числом 2.

В заключение проанализируем возможность оценки функции корреляции $B_a(\rho_1, \rho_2)$ усредненного по времени распределения интенсивности рассеянного поля $\bar{I}(\rho)$ путем ее аппроксимации пространственной функцией корреляции, определяемой по одной реализации этого распределения:

$$B_s(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{S_\rho} \int \bar{I}(\rho_1)\bar{I}(\rho_1 + \Delta\rho)A(\rho_1)d\rho_1 - \left[\frac{1}{S_\rho} \int \bar{I}(\rho)A(\rho)d\rho\right]^2,$$

где S_ρ – площадь приемной апертуры; $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; $A(\rho)$ – функция зрачка приемной апертуры. Если размер приемной апертуры d_p такой, что в ее пределах число спеклов в рассеянном поле $M = (d_p d)^2/(\lambda_0 r_c)^2 \geq 400$, то

$$\frac{\{[B_s(\rho_1, \rho_2) - B_a(\rho_1, \rho_2)]^2\}_r^{1/2}}{\langle B_s(\rho_1, \rho_2) \rangle_r} \approx M^{-1/2} \leq 0.05.$$

Следовательно, при $M \geq 400$ аппроксимация $B_s(\rho_1, \rho_2) \approx B_a(\rho_1, \rho_2)$ корректна. Интересно отметить, что при $M = 400$, исходя из соотношения (8), условие узкополосности подсвечивающего излучения можно записать в следующем виде:

$$L_c = \frac{c}{\Delta\omega} \geq L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2} = 80\lambda_0.$$

В этом случае $\Delta\omega \leq 0.0125\omega_0 \ll \omega_0$. Это значит, что при $M \geq 400$ выполняется традиционное условие узкополосности излучения: $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Полученные результаты помимо чисто методологического значения представляют и практический интерес. Они могут быть использованы для определения геометрических параметров поверхности. В частности, при ее подсветке достаточно узким полихроматическим пучком контраст усредненного по времени $T > 10\tau_c$ распределения интенсивности $\bar{I}(\rho)$ рассеянного поверхностью поля $C = L_c/(2\sigma)$. Используя эту формулу, можно определить среднеквадратичное отклонение σ высот неровностей поверхности по соотношению $\sigma = L_c/(2C_s)$, где

$$C_s = \frac{B_s(\rho_1, \rho_2)}{\left[\frac{1}{S_\rho} \int \bar{I}(\rho)A(\rho)d\rho\right]^2}$$

– оценка контраста по одной реализации $\bar{I}(\rho)$.

4. Выводы

Таким образом, нами установлено следующее.

1. Если световой сигнал, используемый для подсветки шероховатых поверхностей, имеет вид $U(t) \exp(i\omega_0 t)$ (где ω_0 – центральная частота спектра излучения, а $U(t)$ – медленно меняющаяся непериодическая функция модуляции), то с помощью усредненного по времени $T > 10\tau_c$ распределения интенсивности $\bar{I}(\rho)$ светового поля, рассеянного этими поверхностями, определяются узкополосные и хроматические характеристики подсвечивающего излучения. Определяются также и соответствующие им когерентные свойства рассеянного поля. Эти характеристики и свойства зависят от длины когерентности L_c подсвечивающего излучения, поперечного размера области обратного рассеяния поверхности d , глубины области обратного рассеяния L_s , расстояния от приемной апертуры до поверхности r_c , размера приемной апертуры d_p , центральной длины волны подсвечивающего излучения $\lambda_0 = c/\omega_0$ и среднеквадратичного отклонения σ высот неровностей поверхности.

2. Подсвечивающее излучение действует на рассеивающую поверхность как узкополосное, если ширина его спектра удовлетворяет условию $\Delta\omega = 2\pi/\tau_c \leq 0.25\omega_0 M^{-1/2}$ либо эквивалентному условию $L_c \geq 4\lambda_0 M^{-1/2}$, где $M = (d_p d)^2 / (\lambda_0 r_c)^2$ – число пятен в рассеянном поле в пределах приемной апертуры. При этом условии усредненное по времени $T > 10\tau_c$ распределение интенсивности рассеянного поля представляет собой случайный стационарный процесс; пятнистая структура распределения имеет на любом участке области наблюдения этого поля одинаковый контраст C при любом соотношении между глубиной L_s и длиной L_c . Если $L_c < \lambda_0 M^{-1/2}$, то по мере удаления точки наблюдения рассеянного поля к периферии приемной апертуры контраст пятнистой структуры $\bar{I}(\rho)$ заметно падает, т.е. растет отклонение случайного распределения $\bar{I}(\rho)$ от стационарного. Это означает, что ближе к периферии приемной апертуры подсвечивающее излучение действует как широкополосное.

3. Подсвечивающее узкополосное излучение ведет себя как монохроматическое, а рассеянное поле – как когерентное, если $2L_s < L_c$. В этом случае в каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд (интерференции) волн, рассеянных всей областью обратного рассеяния, а контраст пятнистой структуры в таком поле $C \approx 1$.

4. Подсвечивающее узкополосное излучение ведет себя как квазимонохроматическое, а рассеянное поле – как частично когерентное, если $2L_s > L_c > 2\sigma$. При этом в каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд нескольких статистически независимых волн, рассеянных отдельными частями области обратного рассеяния, а контраст пятнистой структуры в таком поле $C \approx L_c/(2L_s) < 1$.

5. Подсвечивающее узкополосное излучение ведет себя как полихроматическое, а рассеянное поле – как некогерентное, если $2\sigma > L_c > L_{cM} = 4\lambda_0 M^{1/2}$ и $L_s > \sigma$. Тогда в каждой точке области наблюдения этого поля оно формируется путем суммирования амплитуд большого числа статистически независимых волн, рассеянных как отдельными частями области обратного рассеяния, так и отдельными частями каждой неровности на поверхности. Контраст пятнистой структуры в таком поле $C \approx$

$L_c/(2L_s) \ll 1$. Та же ситуация имеет место, если $2\sigma \gg L_c > L_{cM}$ и $L_s \ll \sigma$. При этом в каждой точке области наблюдения рассеянного поля оно формируется путем суммирования амплитуд волн, рассеянных отдельными частями каждой неровности на рассеивающей поверхности. Контраст пятнистой структуры в таком поле $C \approx L_c/(2\sigma) \ll 1$.

Приложение. Оценка условия узкополосности подсвечивающего излучения

Условие узкополосности подсвечивающего излучения $L_c > 4\lambda_0 M^{1/2}$ достаточно просто можно получить для экспоненциальной функции модуляции $U(t)$ путем аппроксимации средней поверхности параболоидом вращения в случае, когда $L_s \gg L_c \gg q_N \sigma$. Это условие достаточно часто выполняется на практике. Учитывая, что при $L_c \gg q_N \sigma$ функция

$$\rho_i(r_1, \xi_1, \rho_j, r_2, \xi_2) \approx \exp\left\{-\frac{[r_1 - r_2 + (r_1 - r_2)\rho_j/r_c]^2}{L_c^2}\right\},$$

где $j = 1, 2$, разложим ее в окрестности $\rho_1 = \rho_2 = 0$ в ряд Тейлора по степеням $[(r_1 - r_2)\rho_j/(r_c L_c)]^2$. Тогда получим приближенное соотношение

$$\rho_i(r_1, \xi_1, \rho_j, r_2, \xi_2) \approx \exp\left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{L_c^2}\right] \times \left\{1 - \left[\frac{(r_1 - r_2)\rho_j}{r_c L_c}\right]^2\right\},$$

с использованием которого для корреляционной функции $B_a(\rho_1, \rho_2)$ усредненного по времени распределения интенсивности рассеянного поля $\bar{I}(\rho)$ имеем следующую аппроксимацию:

$$B_a(\rho_1, \rho_2) \approx B_{a0}(\rho_1 - \rho_2) + \Re(\rho_1, \rho_2),$$

где

$$B_{a0}(\rho_1 - \rho_2) \sim \iint k_s(r_1)k_s(r_2) \exp\left[i\frac{2\pi(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c}\right] \times \left|G\left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{L_c^2}\right]\right|^2 dr_1 dr_2$$

– стационарная компонента корреляционной функции;

$$\Re(\rho_1, \rho_2) \sim \iint k_s(r_1)k_s(r_2) \exp\left[i\frac{2\pi(r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\lambda_0 r_c}\right] \times \left|G\left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{L_c^2}\right]\right|^2 \left[\frac{(r_1 - r_2)\rho_1}{r_c L_c}\right]^2 dr_1 dr_2$$

– небольшая нестационарная добавка. В центре приемной апертуры ($\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$) $\Re(\rho_1, \rho_2) = 0$. Учитывая, что в данном случае $r \approx r_c + R^2/(2\rho_0)$ (где R – расстояние от оси параболоида до точки на поверхности, а ρ_0 – радиус кривизны вершины исследуемой поверхности) и что функция $|G[-(r_1 - r_2)^2/L_c^2]|^2$ имеет меньшую ширину по

координате R , чем остальные функции в (10), а значит справедлива аппроксимация $r_1 - r_2 \approx R_1(R_1 - R_2)/\rho_0$, можно показать, что при малой величине $|\rho_1 - \rho_2|$

$$B_{a0}(\rho_1 - \rho_2) \sim \rho_0 L_c \int \left[1 - \frac{|\rho_1 - \rho_2|^2 d^2}{(\lambda_0 r_c)^2} \right] k_s^2(R) R dR,$$

$$\Re(\rho_1, \rho_2) \sim \frac{(d\rho_1)^2}{(r_c L_c)^2} B_{a0}(\rho_1 - \rho_2).$$

Тогда, например, для круглой приемной апертуры при удалении от центра к периферии, где $\rho_1 = d_\rho/2$, величина $\Re(\rho_1, \rho_2)$ растёт, но при этом при любых ρ_1 и ρ_2 отношение $\Re/B_{a0} < 1/N_c^2$, где $N_c = d_\rho d/(r_c L_c) = M^{1/2} \lambda_0/L_c$. При условии $L_c > 4\lambda_0 M^{1/2}$ имеем $\Re/B_{a0} < 0.05$. Поэтому

$B_a(\rho_1, \rho_2)$ приближенно равно $B_{a0}(\rho_1 - \rho_2)$. Отношение \Re/B_{a0} указывает на незначительное отклонение случайного распределения $\bar{I}(\rho)$ от стационарного.

1. Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000).
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
3. Басс Ф.Г., Фукс И.М. *Рассеяние на статистической неровной поверхности* (М.: Радио и связь, 1978).
4. Бакут П.А., Мандросов В.И., Матвеев И.Н., Устинов Н.Д. *Теория когерентных изображений* (М.: Радио и связь, 1987).
5. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II* (М.: Наука, 1978).
6. Лоудон Р. *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1976).
7. Гудмен Д. *Статистическая оптика* (М.: Мир, 1988).
8. Mandrosov V. *Coherent Fields and Images in Remote Sensing* (Bellingham: SPIE Press, 2004, Vol. PM130).