

# О бифуркации полной круговой поляризации поля пятой и седьмой гармоник поля накачки, возникающих в плазме, образуемой ионизацией газа возбужденных водородоподобных атомов

В.П.Силин, П.В.Силин

*В рамках модели ионизации Бете теоретически рассмотрены зависимости степени круговой поляризации пятой и седьмой гармоник поля накачки, генерируемых благодаря тормозному излучению, от напряженности электрического поля накачки, степени его круговой поляризации и от главного квантового числа возбужденных состояний водородоподобных атомов газа, ионизируемого полем накачки. Обнаружена бифуркация полной круговой поляризации этих гармоник, что подтверждает высказанную нами ранее гипотезу об общности такого явления для гармоник, генерируемых благодаря тормозному излучению в поле накачки, когда в нем осциллируют электроны плазмы. Для рассмотренных закономерностей установлена их скейлинговая зависимость от  $V_E n / V_Z$  – произведения скорости осциллирующих электронов на главное квантовое число возбужденного электрона, деленного на кулоновскую скорость.*

**Ключевые слова:** бифуркация, степень круговой поляризации, гармоники, возбужденные состояния водородоподобного атома.

1. Генерация гармоник излучения поля накачки в плазме изучается в течение многих лет. Для объяснения этого явления в работе [1] был предложен механизм тормозного излучения, а в работе [2] установлено влияние на него нелинейных свойств переноса в плазме. Можно считать, что возможные механизмы генерации гармоник этим не ограничиваются. Говоря об экспериментальных особенностях генерации излучения полем накачки, выделим усиление на порядки интенсивности генерации в плазме, фотоионизирующейся из газа с предвительно возбужденными атомами (по сравнению со случаем генерации гармоник в плазме, фотоионизирующейся из газа с невозбужденными атомами). Это явление было обнаружено теоретически в модели тормозного излучения в поле накачки [3], а экспериментально установлено в работе [4].

В настоящей работе на основании модели тормозного излучения гармоник в поле накачки и модели ионизации Бете (см., напр., [5]) мы сосредоточим свое внимание на степени круговой поляризации поля излучения гармоник. Ограничимся рассмотрением свойств только пятой и седьмой гармоник. Установим нелинейные зависимости поля накачки таких гармоник от поляризации поля накачки и от напряженности электрического поля накачки. Наиболее интересным представляется возникающее в этом случае явление бифуркации полной круговой поляризации гармоник, обнаруженное нами ранее для третьей гармоники [5, 6]. При этом была высказана гипотеза об общности такого явления при тормозной

генерации гармоник. Настоящая статья служит подтверждением данной гипотезы.

Кратко остановимся на том, в чем заключается явление бифуркации полной круговой поляризации гармоник. Напомним, что если степень круговой поляризации  $A$  поля накачки равна  $+1$  или  $-1$ , то напряженность  $E$  электрического поля с течением времени не меняется и генерация гармоник в дипольном приближении отсутствует. Однако уже при малом отклонении  $A$  от  $+1$  или  $-1$  генерация гармоник становится возможной, а степень их круговой поляризации мало отличается от  $+1$  или  $-1$ . В этом смысле значения  $\pm 1$  являются теми предельными значениями, которые определяют пределы генерации гармоник, хоть и стремящихся к нулю по интенсивности, но одновременно стремящихся к полной круговой поляризации.

При малых интенсивностях поля накачки степень круговой поляризации гармоник при изменении степени круговой поляризации накачки монотонно изменяется, не становясь, тем не менее, полной. Однако это имеет место лишь при малых интенсивностях поля накачки. С их увеличением в случае превышения некоторого порогового значения  $E_{th, pol}$ , обусловленного нелинейной природой взаимодействия поля накачки с плазмой, картина качественно меняется. Так, в работах [5, 6] было показано, что при превышении пороговой напряженности электрического поля накачки генерируемая третья гармоника может быть полностью поляризованной по кругу для определенных значений степени круговой поляризации ( $-1 < A < +1$ ). При этом была высказана гипотеза об общности этого явления, названного бифуркацией степени полной круговой поляризации, и для случаев генерации других гармоник. В работах [5, 6] было получено следующее выражение для порогового поля бифуркации при генерации третьей гармоники:

В.П.Силин, П.В.Силин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: silin@sci.lebedev.ru; silinp@mail.ru

$$E_{\text{th pol}}^{(3)} = 1.8445 \frac{m\omega}{|e|n} V_Z, \quad (1)$$

где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона;  $n$  – главное квантовое число возбужденного состояния водородоподобного атома газа, при ионизации которого образуется плазма;

$$V_Z = \frac{Ze^2}{\hbar} \quad (2)$$

– кулоновская единица скорости [7];  $Z$  – зарядовое число ядра атома. Соответствующие пороги для пятой и седьмой гармоник установлены ниже.

**2.** Полностью ионизованную плазму будем рассматривать в поле накачки с напряженностью электромагнитного поля  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ :

$$E_x = e_x E \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (3)$$

$$E_y = -e_y E \sin(\omega t - kz + \varphi).$$

Здесь  $E$  – действительная амплитуда напряженности электрического поля накачки;  $\varphi$  – фаза этого поля;  $\omega$  и  $k$  – его частота и волновой вектор, связанные соотношением  $\omega^2 = \omega_{\text{Le}}^2 + c^2 k^2$ , где  $\omega_{\text{Le}} = (4\pi e^2 N_e / m)^{1/2}$  – ленгмюровская частота электронов;  $N_e$  – концентрация электронов плазмы.

Пусть  $e_x(\alpha = x, y)$  – компоненты поляризационного вектора, удовлетворяющие соотношению

$$e_x^2 + e_y^2 = 1. \quad (4)$$

Поскольку поляризационный тензор поля (3) имеет вид [8]

$$R_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} e_x^2 & i e_x e_y \\ -i e_x e_y & e_y^2 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i \xi_2 \\ \xi_1 + i \xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

то для параметров Стокса имеем  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = -2e_x e_y$ ,  $\xi_3 = e_x^2 - e_y^2$ . Ниже нас будут интересовать зависимости величин, характеризующих гармоники, от степени круговой поляризации  $A = -2e_x e_y$  поля основной гармоники (3), т. е. поля накачки. В общем случае степень круговой поляризации  $A(2N+1)$ -й гармоники связана с ее параметром Стокса соотношением

$$\xi_2^{(2N+1)} = A(2N+1). \quad (6)$$

Здесь  $2N+1$  – номер нечетной гармоники, генерируемой тормозным излучением электронов в плазме под действием поля накачки в нерелятивистском (дипольном) приближении.

Из уравнения (9) работы [5] для электромагнитного поля  $(2N+1)$ -й гармоники в предположении малости эффективных частот столкновений по сравнению с частотой поля накачки (см. ниже) можно получить

$$E_x^{(2N+1)} = e_x E \frac{4\pi\sigma_{xx}^{(2N+1)}(2N+1)\omega}{\omega_{\text{Le}}^2 - (2N+1)^2(\omega^2 - c^2 k^2)} \times \sin[(2N+1)(\omega t - kz)], \quad (7)$$

$$E_y^{(2N+1)} = e_y E \frac{4\pi\sigma_{yy}^{(2N+1)}(2N+1)\omega}{\omega_{\text{Le}}^2 - (2N+1)^2(\omega^2 - c^2 k^2)}$$

$$\times \cos[(2N+1)(\omega t - kz)], \quad (8)$$

где для нелинейных комплексных проводимостей использованы следующие обозначения:

$$\sigma_{xx}^{(2N+1)} = \frac{e^2 N_e v_{xx}^{(2N+1)}(n, E, \rho)}{m\omega^2}, \quad (9)$$

$$\sigma_{yy}^{(2N+1)} = \frac{e^2 N_e v_{yy}^{(2N+1)}(n, E, \rho)}{m\omega^2}.$$

При этом нелинейные эффективные частоты столкновений определяются формулами

$$v_{xx}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z N_e A}{\rho^3 m^2 V_E^3} D\alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho) \Big|_{b=1}, \quad (10)$$

$$v_{yy}^{(2N+1)} = \frac{16e^4 Z N_e A}{\rho^3 m^2 V_E^3} D\alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho) \Big|_{b=1}. \quad (11)$$

Здесь  $A$  – кулоновский логарифм;  $\rho = (1 - A^2)^{1/4}$  – максимальная степень линейной поляризации поля накачки;  $V_E = |eE|/m\omega$  – амплитуда осцилляции скорости электрона в поле накачки. С учетом  $l$ -вырождения для возбужденного состояния водородоподобного атома получим для оператора  $D$  следующее выражение:

$$D = 1 - \frac{d}{db} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{db^2}. \quad (12)$$

После применения этого оператора в выражениях (10) и (11) к функциям  $\alpha^{(+)}$  и  $\alpha^{(-)}$  принимаем  $b = 1$ . Явные выражения этих функций,  $\alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho)$  и  $\alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho)$ , приведены в Приложении 1 для пятой ( $N = 2$ ) и седьмой ( $N = 3$ ) гармоник. При этом  $\alpha = V_Z b / (V_E n)$ .

Приведенные выше формулы позволяют представить обсуждаемые ниже степени круговой поляризации пятой ( $A(5, x, A)$ ) и седьмой ( $A(7, x, A)$ ) гармоник в следующем виде:

$$A(5, x, A) = 2 \text{sign } A \frac{G(5, x, \rho) H(5, x, \rho)}{G^2(5, x, \rho) + H^2(5, x, \rho)}, \quad (13)$$

$$A(7, x, A) = 2 \text{sign } A \frac{G(7, x, \rho) H(7, x, \rho)}{G^2(7, x, \rho) + H^2(7, x, \rho)}, \quad (14)$$

где

$$H(2N+1, x, \rho) = \left( \frac{1 + \rho^2}{2} \right)^{1/2} \times D\alpha^{(+)}(2N+1, \alpha, \rho) \frac{1}{\rho^3 x^3}; \quad (15)$$

$$G(2N+1, x, \rho) = \left( \frac{1 - \rho^2}{2} \right)^{1/2} \times D\alpha^{(-)}(2N+1, \alpha, \rho) \frac{1}{\rho^3 x^3}; \quad (16)$$

$x = nV_E/V_Z$  – безразмерная напряженность электрического поля накачки, что следует из определения  $V_E$ .

Сами аналитические выражения для формул (13), (14) громоздки, поэтому ниже мы проиллюстрируем их графиками.

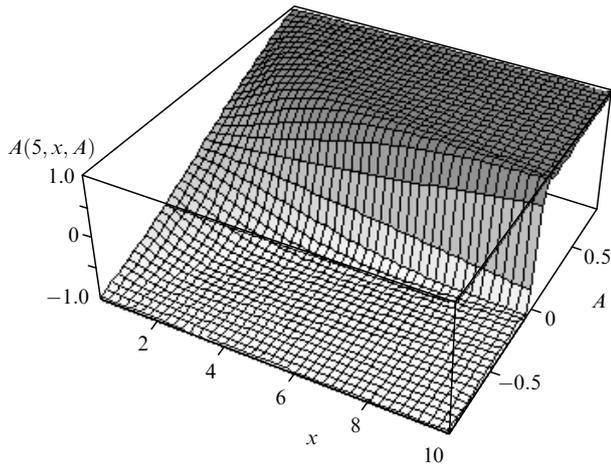


Рис.1. Трехмерная картина зависимости степени круговой поляризации пятой гармоники как функции переменных  $x$  и  $A$ .

3. На рис.1 для иллюстрации качественных закономерностей приведена трехмерная проекция функции  $A(5, x, A) \equiv A(5)$ . Видно, что в области малых значений аргумента  $x$  функция  $A(5)$  плавно изменяется во всем интервале изменения аргумента  $A$ . Напротив, при не малых значениях аргумента  $x$  функция  $A(5)$  резко меняет свой знак в области малых значений аргумента  $A$  примерно от своего минимального значения  $A(5) \approx -1$  до максимального значения  $A(5) \approx +1$ . Мы не приводим здесь аналогичную трехмерную проекцию функции  $A(7, x, A)$ , подобную представленной на рис.1. Вместо этого на рис.2 дана дополняющая рис.1 трехмерная проекция  $A(7, x, A)$ , поскольку она существует и для  $A(5, x, A)$ .

Зависимости степеней круговой поляризации пятой и седьмой гармоник от степени круговой поляризации напряженности электрического поля накачки  $A$  и от ее безразмерной амплитуды  $x$  приведены на рис.3 и 4. Кривая на рис.3 отвечает  $x = 1$ , когда функция  $A(5, x, A)$  монотонно и плавно нарастает от минимального значения  $-1$  до максимального значения  $+1$ , кривая 2 соответствует значению пороговой напряженности безразмерного электрического поля  $x(5)_{\text{th pol}} = 2.25$ , т.е. порогу (кривая  $A(5, 2.25, A)$ ), который разделяет небифуркационные и бифуркационные области кривых – области с монотонной и немонотонной зависимостями  $A(5, x, A)$  при изме-

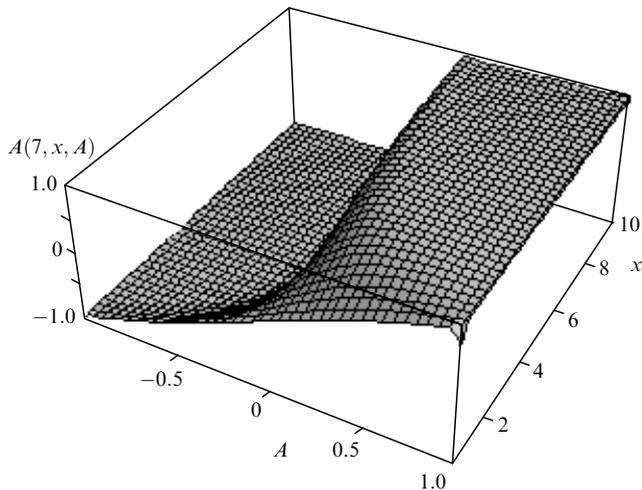


Рис.2. Трехмерная картина зависимости степени круговой поляризации седьмой гармоники как функции переменных  $A$  и  $x$ .

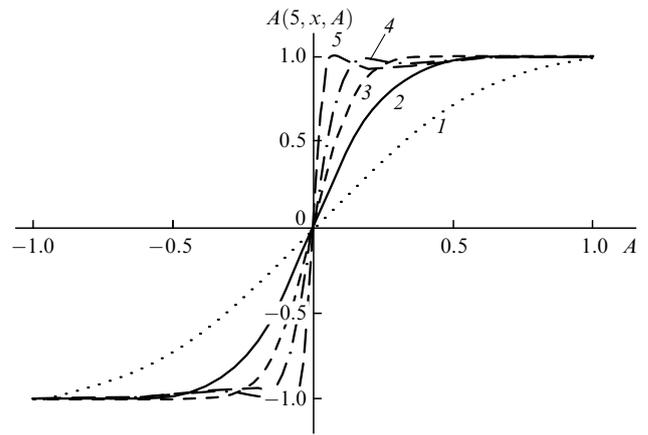


Рис.3. Зависимости степени круговой поляризации пятой гармоники  $A(5, x, A)$  от степени круговой поляризации поля накачки  $A$  при  $x = 1$  (1), 2.25 (2), 3.5 (3), 5 (4) и 10 (5).

нению  $A$  от  $-1$  до  $+1$ . При этом в областях немонотонной зависимости приведены три кривые: 3 (отвечающая  $x = 3.5$ ), 4 ( $x = 5$ ), и 5 ( $x = 10$ ). Для всех них характерно то, что значение функции  $A(5, x, A)$ , равное  $-1$ , достигается не только при  $A = -1$ , но и при большем отрицательном значении, зависящем от напряженности электрического поля накачки. В соответствии с этими тремя кривыми значение функции  $A(5, x, A)$ , равное единице, достигается не только при  $A = +1$ , но и при меньшем положительном значении, также зависящем от напряженности электрического поля накачки. Отметим, что два новых значения степени круговой поляризации накачки (положительное и отрицательное), при которых в случае данного  $x$  реализуется полная круговая поляризация пятой гармоники, равны по абсолютной величине.

Обратим здесь внимание на то, что на рис.3 пороговая кривая, как и немонотонные кривые в широкой области значений степени круговой поляризации накачки, описывают зависимость, которая при  $A > 0$  близка к единице, а при  $A < 0$  – к минус единице. Иными словами, в таких широких областях значений  $A$  круговая поляризация пятой гармоники близка к полной круговой поляризации. С ростом напряженности электрического поля накачки появляются области значений  $A$ , соответственно при положительных и отрицательных значениях степени

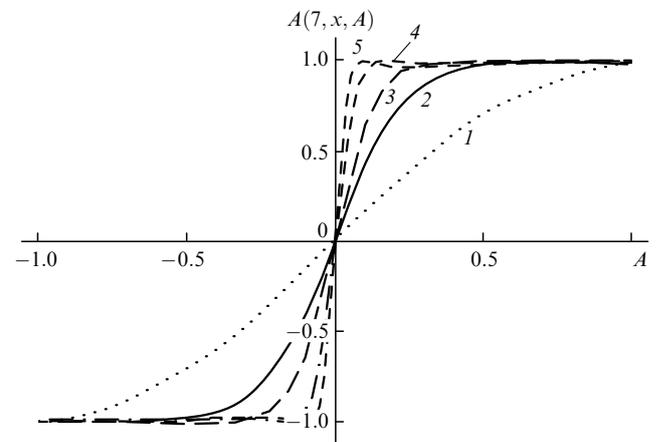


Рис.4. Зависимости степени круговой поляризации седьмой гармоники  $A(7, x, A)$  от степени круговой поляризации поля накачки  $A$  при  $x = 1$  (1), 2.57 (2), 4 (3), 7 (4) и 10 (5).

круговой поляризации накачки, в которых на фоне почти полной круговой поляризации возникает отличие поляризации пятой гармоники от полной круговой. При достаточно большой безразмерной напряженности электрического поля такое отличие становится вполне заметным. Наконец, как это видно из рис.3, при достаточно больших значениях напряженности поля накачки сужается область значений степени круговой поляризации накачки, в которой меняет знак степень круговой поляризации пятой гармоники. Резкое изменение круговой поляризации заметно и на рис.1.

На рис.4, так же как и на рис.3, приведены пять кривых, но теперь для случая седьмой гармоники: кривая 1 отвечает  $x = 1$ , кривая 2 –  $x = 2.57$  и ограничивает область бифуркационного поведения зависимости  $A(7, x, A)$ , кривая 3 отвечает  $x = 4$ , кривая 4 –  $x = 7$ , а кривая 5 –  $x = 10$ . Как и рис.3, рис.4 описывает бифуркацию степени круговой поляризации гармоники, генерируемой при тормозном излучении электрона в поле накачки. Отличие рис.4 от рис.3 в первую очередь заключается в том, что кривая 2, отграничивающая бифуркационные области, отвечает безразмерной напряженности электрического поля, равной не 2.25, а 2.57. Кроме этого из сравнения рис.3 и 4 видно, что при изменении знака степени круговой поляризации поля накачки знак степени круговой поляризации седьмой гармоники изменяется более резко, чем в случае пятой гармоники.

4. Из рис.1, 2, а также из рис.3, 4 можно понять, что, во-первых,  $x(5)_{\text{th pol}} = 2.25$  и  $x(7)_{\text{th pol}} = 2.57$ , отвечающие порогам бифуркации пятой и седьмой гармоник, реализуются при  $A = \pm 1$ , а во-вторых,  $A(5, x, A) = \pm 1$  и  $A(7, x, A) = \pm 1$ , отвечающие полной круговой поляризации гармоник, реализуются при различных значениях безразмерного электрического поля накачки и степени круговой поляризации поля накачки. Эти значения связаны между собой зависимостями, которые представлены на рис.5. На этом рисунке для полноты картины приведены также кривые 3, соответствующие третьей гармонике и полученные в работе [5]. При этом две параллельные прямые, отвечающие  $A = \pm 1$ , соответствуют предельным значениям степени поляризации, при которых интенсивности всех гармоник стремятся по абсолютной величине к нулю. Кривые 1 отвечают седьмой гармонике, кривые 2 – пятой гармонике. Точки всех кривых рис.5, отвечают рав-

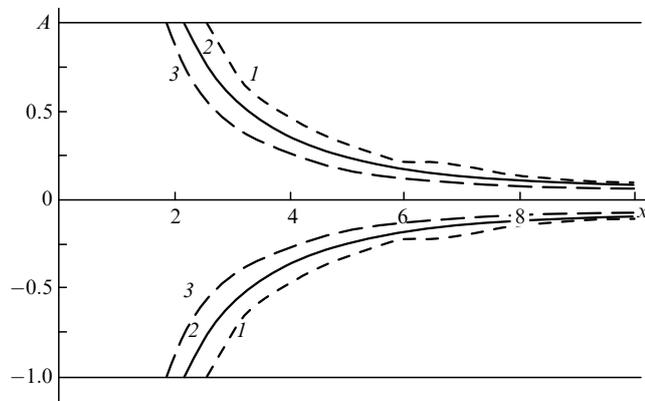


Рис.5. Кривые, задающие значения  $A$  и  $x$  для случаев полностью поляризованных трех гармоник. Для кривых в верхней полуплоскости  $A(2N + 1, x, A) = 1$ , в нижней –  $A(2N + 1, x, A) = -1$ . Кривые 1 соответствуют седьмой гармонике, 2 – пятой гармонике, 3 – третьей гармонике (взяты из работы [5]).

ным единице значениям степени круговой поляризации гармоник, умноженной на  $\text{sign} A$ . Мы видим, что с ростом безразмерного электрического поля соответствующая степень круговой поляризации накачки вблизи пороговых значений сравнительно быстро убывает по абсолютной величине, а при дальнейшем возрастании  $x$  такое убывание становится весьма медленным. Чтобы получить представление об интенсивности гармоник, генерируемых выше порога бифуркации и отвечающих полной круговой поляризации гармоник при  $A < 1$ , рассмотрим эффективность их генерации  $\eta^{(2N+1)}$ . Под эффективностью генерации гармоник понимается отношение усредненных по периоду квадратов напряженностей электрического поля гармоник к соответствующему квадрату напряженности поля накачки. Из уравнений (7)–(11) и (15), (16) следует

$$\eta^{(2N+1)} = \frac{(2N + 1)^2}{N^2(N + 1)^2} \left( \frac{4e^4 Z N_e A n^3}{m^2 V_Z^2 \omega} \right)^2 \times \{ H^2[2N + 1, x, (1 - A^2)^{1/4}] + G^2[2N + 1, x, (1 - A^2)^{1/4}] \}. \quad (17)$$

В табл.1 и 2 для случаев  $A(5, x, A) = 1$  и  $A(7, x, A) = 1$  приведены значения функций  $\Psi(5, x, A)$  и  $\Psi(7, x, A)$ , которые в соответствии с (17) определены формулами

$$\Psi(5, x, A) = \frac{1}{36} \left\{ H^2[5, x, (1 - A^2)^{1/4}] + G^2[5, x, (1 - A^2)^{1/4}] \right\}, \quad (18)$$

$$\Psi(7, x, A) = \frac{1}{144} \left\{ H^2[7, x, (1 - A^2)^{1/4}] + G^2[7, x, (1 - A^2)^{1/4}] \right\}. \quad (19)$$

Табл.1.

$A(5, x, A)$	$A$	$x$	$\Psi(5, x, A) \times 10^6$
1	1	2.25	0
1	0.975	2.27	0.012
1	0.97	2.28	0.018
1	0.96	2.29	0.031
1	0.95	2.3	0.049
1	0.94	2.31	0.070
1	0.91	2.35	0.153
1	0.875	2.4	0.284
1	0.82	2.5	0.539
1	0.72	2.7	1.099
1	0.60	3	1.740
1	0.53	3.25	1.923
1	0.45	3.5	2.182
1	0.40	3.75	2.104
1	0.358	4	1.959
1	0.24	5	1.258
1	0.137	7	0.422
1	0.110	8	0.252
1	0.092	9	0.156
1	0.075	10	0.099

Табл.2.

$A(7, x, A)$	$A$	$x$	$\Psi(7, x, A) \times 10^8$
1	1	2.57	0
1	0.991	2.58	$5.77 \times 10^{-5}$
1	0.96	2.6	$5.20 \times 10^{-3}$
1	0.945	2.63	$13.31 \times 10^{-3}$
1	0.915	2.7	$4.67 \times 10^{-2}$
1	0.825	2.85	0.394
1	0.752	3	1.047
1	0.69	3.15	1.914
1	0.65	3.25	2.633
1	0.565	3.5	4.492
1	0.47	4	5.839
1	0.3	5	7.837
1	0.22	6	6.020
1	0.19	7	3.816
1	0.13	8	2.853
1	0.113	9	1.890
1	0.095	10	1.290

Для оценки порядка величины полученных выражений запишем соотношение

$$\left(\frac{4e^4 Z N_e A n^3}{m^2 V_Z^3 \omega}\right)^2 = \left(\frac{A n^3 N_e}{Z^2 \omega}\right)^2 \left(\frac{4\hbar^3}{m^2 e^2}\right)^2 = \frac{n^6}{Z^4} \left(\frac{2 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}}{\omega}\right)^2 \left(\frac{N_e}{10^{17} \text{ см}^{-3}}\right)^2 A^2 (115 \times 10^{-8})^2, \quad (20)$$

которое при  $\omega = 2 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $N_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $n = 5$ ,  $Z = 1$ ,  $A = 6$  приближенно равно  $0.73 \times 10^{-6}$ . Следует напомнить, что проводимое в настоящей работе рассмотрение отвечает модели ионизации Бете, когда, согласно [4, 5], плотность потока энергии накачки должна удовлетворять неравенству

$$q > q_B = \frac{Z^6}{n^8} 1.37 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2. \quad (21)$$

В частности, при  $Z = 1$  и  $n = 5$  имеем  $q_B = 3.5 \times 10^8 \text{ Вт} \times \text{см}^{-2}$ . Приведем здесь также выражения для пороговых значений плотности потока энергии излучения накачки, отвечающих возникновению бифуркации полной круговой поляризации для третьей, пятой и седьмой гармоник:

$$q_{\text{th pol}}^{(3)} \approx \frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{\hbar \omega}{1 \text{ эВ}}\right)^2 1.7 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2, \quad (22)$$

$$q_{\text{th pol}}^{(5)} \approx \frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{\hbar \omega}{1 \text{ эВ}}\right)^2 2.4 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2, \quad (23)$$

$$q_{\text{th pol}}^{(7)} \approx \frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{\hbar \omega}{1 \text{ эВ}}\right)^2 3.2 \times 10^{14} \text{ Вт/см}^2. \quad (24)$$

При  $\hbar \omega = 1 \text{ эВ}$ ,  $Z = 1$ ,  $n = 5$  имеем  $q_{\text{th pol}}^{(5)} \approx 10^{13} \text{ Вт/см}^2$ ,  $q_{\text{th pol}}^{(7)} \approx 1.3 \times 10^{13} \text{ Вт/см}^2$ . Очевидно, что эти значения существенно превышают  $q_B$ , т. е. удовлетворяют неравенству Бете (21).

Дадим теперь численную оценку плотности потока энергии пятой гармоники. Функция  $\Psi(5, x, A)$  достигает максимума при превышении порога бифуркации по плотности потока энергии накачки примерно в 2.4 раза, что составляет  $\sim 2.4 \times 10^{13} \text{ Вт/см}^2$ . Используя приведенную выше оценку выражения (20) и величину  $\Psi_{\text{max}}(5, x, A) \approx$

$0.2 \times 10^{-5}$ , получаем для эффективности генерации пятой гармоники значение  $\sim 97.5 \times 10^{-11}$ , а для плотности потока энергии пятой гармоники  $\sim 950 \text{ Вт/см}^2$ .

Для сравнения приведем соответствующую оценку для третьей гармоники. Поскольку согласно Приложению 2 функция  $\Psi(3, x, A)$  достигает максимума при превышении порога бифуркации по плотности потока энергии примерно в 1.55 раза, то соответствующая этому максимуму плотность потока энергии накачки составляет при используемых выше параметрах  $\sim 4.4 \times 10^{12} \text{ Вт/см}^2$ . Поскольку  $\Psi_{\text{max}}(3, x, A)$  согласно табл.3 (см. Приложение 2) составляет  $\sim 3.4 \times 10^{-4}$ , то в соответствии с приведенной выше оценкой выражения (20) ( $0.73 \times 10^{-6}$ ) для эффективности генерации третьей гармоники находим значение  $20 \times 10^{-9}$ , а для плотности потока энергии третьей гармоники  $\sim 9 \times 10^3 \text{ Вт/см}^2$ .

5. Подводя итог вышеизложенного, прежде всего укажем, что для пятой и седьмой гармоник теоретически установлено явление бифуркации их полной круговой поляризации, что подтверждает гипотезу работ [5, 6] об общности такого явления для гармоник, генерируемых благодаря тормозному излучению в плазме. Продемонстрирована скейлинговая зависимость поляризации гармоник от безразмерного поля  $x = nV_E/V_Z$ , определяющая зависимость степени круговой поляризации гармоник от главного квантового числа электронов водородоподобных атомов газа, при ионизации которых образуется плазма. В этом случае благодаря электронным столкновениям проявление зависимости от  $n$  прекращается для импульсов с длительностью, превышающей  $\tau_n \sim 2(N_e/10^{17} \text{ см}^{-3})^{-1}(Z^2 n^{-3}) \times 10^8 \text{ с}$ , т. е. при  $Z = 1$ ,  $n = 5$  и  $N_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  имеем  $\tau_n \sim 1.6 \times 10^{-11} \text{ с}$ . В заключение подчеркнем тот установленный нами факт, что, начиная от околопороговой области значений плотности потока энергии накачки и при бóльших ее значениях, круговая поляризация гармоник близка к полной вне области весьма малых значений степени круговой поляризации накачки. Последняя область с ростом плотности потока энергии накачки сужается. Это свойство весьма характерно для тормозного механизма генерации гармоник.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16897), Программы ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-4122.2006.2) и ИНТАС (грант № 05-51-5037).

## Приложение 1

Приведем здесь выражения для функций  $\alpha^{(+)}(5, \alpha, A)$ ,  $\alpha^{(-)}(5, \alpha, A)$  и  $\alpha^{(+)}(7, \alpha, A)$ ,  $\alpha^{(-)}(7, \alpha, A)$ , полученные в работе [9]:

$$\begin{aligned} \alpha^{(+)}(5, \frac{b}{x}, \rho) &= \frac{4b}{x\rho} \left[ -\frac{2}{5} + \frac{8}{5\rho^2} + \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} \right. \\ &+ \left. \left( -\frac{2}{15} - \frac{8}{5\rho^2} - \frac{16b^2}{15x^2\rho^2} \right) \left( \frac{2b^2 + x^2 - x^2\rho^2}{2b^2 + x^2 + x^2\rho^2} \right)^{1/2} \right] + \\ &+ \frac{1}{(1 + \rho^2)^{1/2}} 2^{3/2} \rho \left[ \left( \frac{3}{10} - \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{3\rho^2} \right) \right. \\ &\times E \left( \arctan \left[ \frac{x^2(1 + \rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left( \frac{2\rho^2}{1 + \rho^2} \right)^{1/2} \right) + \left. \left( -\frac{1}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{16}{15\rho^4} - \frac{2}{5\rho^2} \Big) F \left( \arctan \left[ \frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right), \\
 \alpha^{(-)} \left( 5, \frac{b}{x}, \rho \right) &= \frac{1}{15\rho^3(1-\rho^2)} \left\{ \frac{8b}{x} (1-\rho^2) \right. \\
 & \times \left( 12 + 3\rho^2 + \frac{8b^2}{x^2} \right) + \left[ \frac{6b(2b^2+x^2+x^2\rho^2)}{x(2b^2+x^2-x^2\rho^2)} \right]^{1/2} \\
 & \times \left( 4 - 2\rho^2 - \rho^4 - \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{16b^2}{x^2} + \frac{16b^4}{x^4} \right) \\
 & - \frac{2b(2b^2+x^2-x^2\rho^2)}{x(2b^2+x^2+x^2\rho^2)} \Big)^{1/2} \left( 60 - 2\rho^2 - 19\rho^4 + \frac{80b^2}{x^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4b^2\rho^2}{x^2} + \frac{48b^4}{x^4} \right) \Big] + \sqrt{2}(1+\rho^2)^{1/2}(-32+20\rho^2+9\rho^4) \\
 & \times E \left( \arctan \left[ \frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \\
 & - \frac{\sqrt{2}(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^{1/2}}(-32-12\rho^2+5\rho^4) \\
 & \times F \left( \arctan \left[ \frac{x^2(1+\rho^2)}{2b^2} \right]^{1/2}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \Big\}, \\
 \alpha^{(+)} \left( 7, \frac{b}{x}, \rho \right) &= \frac{1}{1+\rho^2} \left\{ -\frac{2b\rho}{7x} \left[ 1 - \frac{4}{\rho^2} - \frac{4}{\rho^4} + \frac{8}{\rho^6} \right. \right. \\
 & + \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left( -8 - \frac{16}{\rho^2} + \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left( -16 + \frac{96}{\rho^2} \right) \\
 & + 64 \frac{b^6}{x^6\rho^6} + \left. \left( \frac{x^2+2b^2-x^2\rho^2}{x^2+2b^2+x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{4}{\rho^4} \right. \right. \\
 & - \frac{8}{\rho^6} + \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left( 8 - \frac{16}{\rho^2} - \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left( -16 - \frac{96}{\rho^2} \right) - \\
 & \left. \left. - 64 \frac{b^6}{x^6\rho^6} \right] \right\} + \left\{ 2\rho \left[ \left( \frac{64b^7}{7\rho^6x^7} + \frac{96b^5}{5\rho^6x^5} + \frac{16b^5}{5\rho^4x^5} \right. \right. \right. \\
 & + \frac{48b^3}{\rho^6x^3} + \frac{16b^3}{3\rho^4x^3} - \frac{8b^3}{3\rho^2x^3} + \frac{8b}{\rho^6x} + \frac{4b}{\rho^4x} - \frac{4b}{\rho^2x} - \frac{b}{x} \Big) \right. \\
 & + \frac{1}{105x^7} \left\{ b \left( \frac{x^2+2b^2-x^2\rho^2}{x^2+2b^2+x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left[ -\frac{960b^6}{\rho^6} + x^6 \right. \right. \\
 & \times \left( 143 + \frac{92}{\rho^2} - \frac{876}{\rho^4} - \frac{840}{\rho^6} \right) - 48b^4x^2 \left( \frac{42}{\rho^6} + \frac{1}{\rho^4} \right) \\
 & \left. \left. - 8b^2x^4 \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{210}{\rho^6} + \frac{166}{\rho^4} \right) \right] \right\} + \left( 63 + \frac{208}{\rho^2} \right. \\
 & \left. - \frac{224}{\rho^4} - \frac{384}{\rho^6} \right) \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times E \left( \arctan \frac{x(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \\
 & + \left( 25 - \frac{144}{\rho^2} - \frac{160}{\rho^4} + \frac{384}{\rho^6} \right) \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}} \\
 & \times F \left( \arctan \frac{x(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \Big\} \Big\}, \\
 \alpha^{(-)} \left( 7, \frac{b}{x}, \rho \right) &= \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ -\frac{2b\rho}{7x} \left[ -1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{4}{\rho^4} + \frac{8}{\rho^6} \right. \right. \\
 & + \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left( -8 + \frac{16}{\rho^2} + \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left( 16 + \frac{96}{\rho^2} \right) \\
 & + 64 \frac{b^6}{x^6\rho^6} - \left. \left( \frac{x^2+2b^2+x^2\rho^2}{x^2+2b^2-x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{4}{\rho^2} - \frac{4}{\rho^4} \right. \right. \\
 & + \frac{8}{\rho^6} + \frac{b^2}{x^2\rho^2} \left( -8 - \frac{16}{\rho^2} + \frac{48}{\rho^4} \right) + \frac{b^4}{x^4\rho^4} \left( -16 + \frac{96}{\rho^2} \right) \\
 & \left. \left. + 64 \frac{b^6}{x^6\rho^6} \right] \right\} + \left\{ 2\rho \left[ \left( \frac{64b^7}{7\rho^6x^7} + \frac{96b^5}{5\rho^6x^5} - \frac{16b^5}{5\rho^4x^5} \right. \right. \right. \\
 & + \frac{16b^3}{\rho^6x^3} - \frac{16b^3}{3\rho^4x^3} - \frac{8b^3}{3\rho^2x^3} + \frac{8b}{\rho^6x} - \frac{4b}{\rho^4x} - \frac{4b}{\rho^2x} + \frac{b}{x} \Big) \right. \\
 & + \frac{1}{105x^7} \left\{ b \left( \frac{x^2+2b^2-x^2\rho^2}{x^2+2b^2+x^2\rho^2} \right)^{1/2} \left[ -\frac{960b^6}{\rho^6} + x^6 \right. \right. \\
 & \times \left( 17 + \frac{484}{\rho^2} - \frac{36}{\rho^4} - \frac{840}{\rho^6} \right) + 576b^4x^2 \left( -\frac{7}{2\rho^6} - \frac{1}{4\rho^4} \right) \\
 & \left. \left. - 16b^2x^4 \left( -\frac{41}{2\rho^2} + \frac{105}{\rho^6} + \frac{13}{\rho^4} \right) \right] \right\} + \left( -63 + \frac{208}{\rho^2} \right. \\
 & + \frac{224}{\rho^4} - \frac{384}{\rho^6} \Big) \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}} \times \\
 & \times E \left( \arctan \frac{x(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \\
 & + \left( -185 + \frac{210\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{304}{\rho^2} - \frac{608}{\rho^4} + \frac{384}{\rho^6} \right) \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{105\sqrt{2}} \\
 & \times F \left( \arctan \frac{x(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}b}, \left( \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{1/2} \right) \Big\} \Big\},
 \end{aligned}$$

где  $E(\varphi, k)$  и  $F(\varphi, k)$  – эллиптические функции, определенные согласно [10].

### Приложение 2

Ниже с целью сравнения полученных результатов с найденными нами ранее результатами для третьей гармоники приведена таблица значений функции  $\Psi(3, x, A)$  (табл.3), полученных на основании расчетов работы [5]. Здесь, подобно формулам (18), (19),

$$\begin{aligned}
 \Psi(3, x, A) &= \frac{1}{4} \{ H^2[3, x, (1-A^2)^{1/4}] \\
 & + G^2[3, x, (1-A^2)^{1/4}] \}.
 \end{aligned}$$

Табл.3.

$A(3, x, A)$	$A$	$x$	$\Psi(3, x, A) \times 10^4$
1	1	1.8445	0
1	0.97	1.89	0.553
1	0.945	1.9	1.011
1	0.905	1.95	1.620
1	0.865	2	2.141
1	0.67	2.3	3.427
1	0.57	2.5	3.413
1	0.42	3	2.404
1	0.26	4	0.990
1	0.17	5	0.420
1	0.13	6	0.197
1	0.08	8	0.053
1	0.05	10	0.018

1. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **47**, 2254 (1964).
2. Исаков В.А., Канавин А.П., Урюпин С.А. *Квантовая электроника*, **35** (6), 537 (2005).
3. Силин В.П. *ЖЭТФ*, **117** (5), 926 (2000).
4. Fedotov A.V., Naumov A.N., Silin V.P., Uryupin S.A., Zheltikov A.M., Tarasevich A.P., von der Linde D. *Phys. Lett. A*, **271**, 407 (2000).
5. Силин В.П., Силин П.В. *Квантовая электроника*, **35** (6), 531 (2005).
6. Силин В.П., Силин П.В. *Укр. физ. журн.*, **50**, (8A), A10 (2005).
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М.: ГИФМЛ, 1963).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1973).
9. Силин В.П., Силин П.В. *Квантовая электроника*, **35** (2), 157 (2005).
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: ГИФМЛ, 1962).