

Влияние локального поля на солитонный механизм лазерной генерации УКИ при пассивной синхронизации мод

Р.А.Власов, А.М.Лемеза, С.Ю.Михневич

Рассмотрена генерация солитонов в модели двухкомпонентной плотной резонансной среды, имеющей усиливающий и поглощающий компоненты, когда в обоих или в одном из них (усиливателе) могут быть заметны ближние диполь-дипольные взаимодействия, зависящие от концентрации резонансных атомов и дипольных моментов перехода. Изучены особенности формирования фазово-модулированных π - и 2π -импульсов. Проведен анализ устойчивости полученных решений к малым возмущениям. Показано, что 2π -импульс устойчив, в то время как π -импульс неустойчив.

Ключевые слова: ультракороткие импульсы, солитонный механизм, пассивная синхронизация мод.

1. Введение

Солитонный механизм формирования лазерных импульсов при пассивной синхронизации мод рассматривался в целом ряде работ (см., напр., [1–8] и цитируемую там литературу). В основе используемой при этом физической модели лежит, как известно, двухкомпонентная резонансная среда, содержащая усиливающий и поглощающий компоненты. Впрочем, можно говорить и просто о формировании оптических солитонов в резонансной усиливающе-поглощающей среде [9–11], что фактически имеет прямое отношение к режиму лазерной генерации с пассивной синхронизацией мод. Именно одновременное наличие усилителя (активная среда) и поглотителя (пассивная среда с насыщением) позволяет, в принципе, генерировать стационарные УКИ с максимально стабильными параметрами. Это преимущество солитонного механизма является уникальным и важным для приложений, что стимулирует исследования в данном направлении.

Существует достаточно большое разнообразие условий формирования солитонов, определяемое соотношениями параметров среды и импульсного излучения. Эти условия решающим образом зависят от дисперсионных и релаксационных эффектов, параметра насыщения и ширины полосы усиления [1–4]. Устойчивость в сильной степени может определяться соотношением между концентрациями компонентов среды и дипольными моментами перехода [9, 10]. В [1, 5–8] для формирования солитоноподобных импульсов предложено использовать явление самоиндуцированной прозрачности, впервые изученное МакКоллом и Ханом [12] (состояние теории самоиндуцированной прозрачности весьма полно изложено в обзоре [13]). Основываясь на этом явлении, при

надлежащем подборе параметров усиливающего и поглощающего компонентов можно сравнительно просто получить устойчивый солитонный режим генерации УКИ [5–8]. Физическая интерпретация баланса конкурирующих факторов совершенно очевидна: широкополосный усилитель компенсирует потери, тогда как (квази)когерентный поглотитель формирует огибающую стационарного импульса.

В настоящей работе обращается внимание на тот факт, что увеличение концентрации резонансных атомов, которое может быть продиктовано практическими соображениями (например, необходимостью повышения генерируемой мощности), приводит к достаточно сильному влиянию диполь-дипольных взаимодействий (эффектов локального поля) [14]. Оценку концентраций плотной резонансной среды, при которых влияние ближних дипольных взаимодействий становится заметным, можно получить из сравнения масштабов характерных длин [14]: $r \ll l \ll \lambda$, где r – межатомное расстояние (расстояние между резонансными атомами); l – промежуточный масштаб, для которого понятие микроскопической поляризации справедливо; λ – длина волны. При $\lambda \sim 10^{-4}$ см, $l \sim 10^{-5}$ см, $r \sim 10^{-6}$ см соответствующая концентрация $n_0 \sim 10^{18} - 10^{19}$ см $^{-3}$. Если ориентироваться на твердотельные среды, то предельная концентрация примесных резонансных атомов $n_0 \sim 10^{20}$ см $^{-3}$.

Влияние наведенных электромагнитной волной диполей друг на друга приводит к модификации уравнений Блоха. При этом макроскопическое поле \mathcal{E} заменяется на локальное поле $\mathcal{E}_{loc} = \mathcal{E} + (4\pi/3)\mathcal{P}$, где \mathcal{P} – поляризация, обусловленная ближними диполь-дипольными взаимодействиями [14]. Благодаря этому генерация солитонов с использованием явления самоиндуцированной прозрачности приобретает характерные отличия, и ее анализ требует соответствующего обобщения подхода, использованного в [5]. Здесь уместно отметить, что влияние локального поля может быть существенным при формировании солитонов в однокомпонентных поглощающих плотных резонансных средах [15–19]. Естественно возникает вопрос о возможности солитонного режима генерации в случае двухкомпонентной резонансной среды,

Р.А.Власов, А.М.Лемеза, С.Ю.Михневич. Институт физики им. Б.И.Степанова НАНБ, Белоруссия, 220072 Минск, просп. Независимости, 68; e-mail: lvp@dragon.bas-net.by, azemel@mail.ru

Поступила в редакцию 9 июня 2005 г., после доработки – 10 марта 2006 г.

заполняющей резонатор, когда концентрации либо одного из компонентов (например, усилителя), либо обоих компонентов (усилителя и поглотителя) достаточны для того, чтобы влияние локального поля было заметным. Наличие диполь-дипольных взаимодействий может качественно изменить динамику лазерной генерации, поскольку появляется дополнительная обратная связь, обусловленная свойствами самой плотной резонансной среды. Как будет показано ниже, это приводит к появлению некоторых новых особенностей формирования солитоноподобных импульсов, которые могут нетривиальным образом проявиться в возможных приложениях. Изучение этих особенностей и является целью настоящей работы.

При формулировке задачи мы следуем работе [5], но с тем отличием, что в блоховских уравнениях наряду с задаваемой учитывается «автоматическая» отстройка от резонанса, обусловленная как раз диполь-дипольными взаимодействиями. Чтобы упростить сравнение наших результатов с результатами работы [5], используется сходная система обозначений. Задача формулируется в достаточно общем виде, однако основное внимание уделено наиболее простым аналитическим решениям в виде 2π - и π -импульсов. В первом случае влияние диполь-дипольных взаимодействий может иметь место только в некогерентном усилителе, во втором оно может быть заметным в обоих компонентах.

2. Основные уравнения

Распространение УКИ в плотной резонансной среде, состоящей из усилителя и поглотителя, описывается обобщенной системой Максвелла–Блоха. Ее конкретный вид связан со следующими допущениями. Поле, поляризация и разность населенностей зависят от волновой переменной $u = (t - z/v_p)/\tau_p$, где t – время; z и v_p – координата и скорость распространения солитонного импульса; τ_p – длительность импульса. Длительность импульса удовлетворяет неравенствам $T_{2g} \ll \tau_p \ll T_{2a}$ и $\tau_p \ll T_{1g}, T_{1a}$, где T_{1g}, T_{2g} и T_{1a}, T_{2a} – времена поперечной и продольной релаксации для усилителя (г) и поглотителя (а) соответственно. Принято, что контуры линий обеих сред уширены однородно. В модели также предполагается, что к каждому следующему проходу импульса обе среды возвращаются в начальные состояния.

Поле и поляризацию представим в виде

$$\mathcal{E}(u) = \frac{\hbar}{d_g} E(u) \exp[i\varphi(u, t) - \omega t + \kappa z], \quad (1)$$

$$\mathcal{P}(u) = \{d_g n_g [P_g(u) + iQ_g(u)] + d_a n_a [P_a(u) + iQ_a(u)]\} \exp[i\varphi(u, t) - \omega t + \kappa z], \quad (2)$$

выделяя, таким образом, огибающую поля $E(u)$, фазу $\varphi(u, t)$, а также синфазные (P_a, P_g) и квадратурные (Q_a, Q_g) части поляризации. В выражениях (1) и (2) ω и κ – частота и волновое число электромагнитного поля; n_g, n_a и d_g, d_a – концентрации и дипольные моменты переходов резонансных атомов усилителя и поглотителя соответственно. В приближении медленно меняющихся амплитуд и фаз из волнового уравнения получим систему уравнений [5]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p} \frac{\partial}{\partial u} + L_{cav} \right) E = - \frac{L_g}{T_{2g}} Q_g - \frac{L_a}{T_{2a}} Q_a, \quad (3)$$

$$E \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p} \frac{\partial}{\partial u} \right) \varphi = \frac{L_g}{T_{2g}} P_g + \frac{L_a}{T_{2a}} P_a, \quad (4)$$

где L_{cav} – коэффициент линейных потерь;

$$L_g = \frac{2\pi\omega d_g^2 n_g}{\hbar} T_{2g}; \quad L_a = \frac{2\pi\omega d_a^2 n_a}{\hbar} T_{2a}.$$

Для определения компонент синфазных и квадратурных частей поляризации запишем две системы уравнений Блоха для усилителя и поглотителя с учетом диполь-дипольных взаимодействий между атомами [14]:

$$\frac{\partial P_g}{\partial u} = - \left(\delta_g - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_g N_g \right) Q_g - \frac{P_g}{T}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_g}{\partial u} = \left(\delta_g - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_g N_g \right) P_g - \frac{Q_g}{T} - \tau_p E N_g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial N_g}{\partial u} = \tau_p E Q_g, \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_a}{\partial u} = - \left(\delta_a - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_a N_a \right) Q_a - \frac{P_a}{kT}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial u} = \left(\delta_a - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_a N_a \right) P_a - \frac{Q_a}{kT} - \tau_p \mu E N_a, \quad (9)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial u} = \tau_p \mu E Q_a, \quad (10)$$

с начальными условиями

$$P_g(-\infty) = Q_g(-\infty) = 0, \quad N_g(-\infty) = 1, \quad (11)$$

$$P_a(-\infty) = Q_a(-\infty) = 0, \quad N_a(-\infty) = -1,$$

где N_g и N_a – инверсные населенности усиливающего и поглощающего компонентов. Здесь введены дополнительные обозначения:

$$T = \frac{T_{2g}}{\tau_p}, \quad k = \frac{T_{2a}}{T_{2g}}, \quad \mu = \frac{d_a}{d_g}, \quad \beta_g = \omega L_g \tau_p, \quad \beta_a = \omega L_a \tau_p,$$

$$\delta_g = (\omega - \omega_g) \tau_p = \Delta_g \tau_p, \quad \delta_a = (\omega - \omega_a) \tau_p = \Delta_a \tau_p,$$

где

$$\omega_{Lg} = \frac{4\pi}{3} \frac{d_g^2 n_g}{\hbar}, \quad \omega_{La} = \frac{4\pi}{3} \frac{d_a^2 n_a}{\hbar}$$

и ω_g, ω_a – лоренцевские и резонансные частоты усиливающей и поглощающей сред соответственно; Δ_g и Δ_a – отстройки от резонанса усиливающей и поглощающей сред; β_g и β_a – нормированные параметры, характеризующие интенсивность диполь-дипольных взаимодействий. Именно наличие отстройки и констант β_g и β_a отличает систему (5)–(10) от используемой в работе [5].

В рассматриваемом случае воспользуемся малостью параметра $T = T_{2g}/\tau_p$ и найдем приближенное решение

системы уравнений Блоха для усиливающего компонента в случае, когда $\delta_g = 0$ (см. Приложение 1):

$$\frac{P_g}{T_{2g}} = -TE \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta_g \right), \quad (12)$$

$$\frac{Q_g}{T_{2g}} = -E + T \left(\frac{\partial E}{\partial u} + \tau_p J E \right), \quad (13)$$

$$N_g = 1 - \tau_p T J. \quad (14)$$

Здесь

$$J(u) \equiv \tau_p \int_{-\infty}^u E^2(y) dy = \int_{-\infty}^t E^2(y) dy$$

– энергия, прошедшая через усилитель к моменту времени t . Подставляя (12) и (13) в уравнения (3) и (4), для синфазной и квадратурной частей поляризации поглотителя получаем выражения

$$P_a = \frac{kT\tau_p\mu}{\rho} \left[\left(-\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} + T \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + T\beta_g \right] E, \quad (15)$$

$$Q_a = \frac{kT\tau_p\mu}{\rho} \left[\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \frac{\partial E}{\partial u} + \eta E - T \left(\frac{\partial E}{\partial u} + \tau_p J E \right) \right], \quad (16)$$

где $\eta = 1 - L_{cav}/L_g$; $\rho = L_a/L_g$. Интегрируя последнее уравнение системы Блоха для поглотителя (10) и учитывая начальные условия (11), находим

$$N_a(u) = \frac{kT\mu^2\tau_p^2}{\rho} \left[\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \frac{E^2}{2} + \frac{\eta}{\tau_p} J - \frac{T}{2} (E^2 + J^2) \right] - 1. \quad (17)$$

Далее будем искать условия, при которых частным решением волновых уравнений (3), (4) и двух подсистем уравнений Блоха ((5)–(7) и (8)–(10)) будет поле с огибающей

$$E(u) = \frac{A}{\cosh u} \quad (18)$$

и фазовой модуляцией

$$\varphi(u) = C_1 u + C_2 \ln(\cosh u). \quad (19)$$

Введенные постоянные A , C_1 и C_2 определяются конкретными физическими условиями и зависят от параметров среды и импульса.

3. Решения в виде стационарных импульсов

Для поля с огибающей и фазовой модуляцией вида (18), (19) выражения для компонент вектора Блоха (15)–(17) можно привести к виду

$$P_a = C_0 [-D_0(C_1 + C_2 \tanh u + T\beta_g)] \frac{A}{\cosh u}, \quad (20)$$

$$Q_a = C_0 (-D_1 \tanh u + D_2) \frac{A}{\cosh u}, \quad (21)$$

$$N_a = -1 + \frac{kTs^2}{\rho} \left[-\frac{D_1}{2} \tanh^2 u + (1 + \tanh u) D_2 + \frac{D_1}{2} \right], \quad (22)$$

где

$$D_0 = \left(\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} - T \right); \quad D_1 = \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} - T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right);$$

$$D_2 = \eta - T \frac{s^2}{\mu^2}; \quad C_0 = \frac{kT\tau_p\mu}{\rho}; \quad s^2 = (A\tau_p\mu)^2.$$

Подставляя выражения (20)–(22) в уравнения для синфазной и квадратурной частей поляризации поглотителя (8), (9), потребуем равенства нулю коэффициентов при линейно независимых функциях (степенях гиперболического тангенса):

$$\frac{ks^2 T D_1^2 \beta_a}{2\rho} = 0 \quad (\text{при } \tanh^3 u), \quad (23)$$

$$2C_2 D_0 + C_2 D_1 + \frac{3ks^2 T D_1 D_2 \beta_a}{2\rho} = 0 \quad (\text{при } \tanh^2 u), \quad (24)$$

$$C_1 D_0 - \frac{C_2 D_0}{kT} + C_1 D_1 - C_2 D_2 - T\beta_a - D_1 \beta_a - D_1 \delta_a + \frac{ks^2 T \beta_a}{\rho} \left(\frac{D_1^2}{2} + D_1 D_2 - D_2^2 \right) = 0 \quad (\text{при } \tanh^1 u), \quad (25)$$

$$-\frac{C_1 D_0}{kT} - C_2 D_0 - C_1 D_2 + \frac{T\beta_a}{kT} + D_2 \beta_a + D_2 \delta_a - \frac{ks^2 T \beta_a}{\rho} \left(\frac{D_1 D_2}{2} + D_2^2 \right) = 0 \quad (\text{при } \tanh^0 u), \quad (26)$$

$$\frac{ks^2 T C_2 D_0 D_1 \beta_a}{2\rho} = 0 \quad (\text{при } \tanh^3 u), \quad (27)$$

$$-C_2^2 D_0 + 2D_1 - \frac{s^2 D_1}{2} + \frac{ks^2 T \beta_a}{\rho} \times \left(\frac{C_1 D_0 D_1}{2} - C_2 D_0 D_2 - \frac{T\beta_g D_1}{2} \right) = 0 \quad (\text{при } \tanh^2 u), \quad (28)$$

$$-2C_1 C_2 D_0 - \frac{D_1}{kT} - D_2 + C_2 T \beta_g + C_2 D_0 \beta_g + C_2 D_0 \delta_a + s^2 D_2 - \frac{ks^2 T \beta_a}{\rho} \left(\frac{C_2 D_0 D_1}{2} + C_1 D_0 D_2 - C_2 D_0 D_2 - T\beta_g D_2 \right) = 0 \quad (\text{при } \tanh^1 u), \quad (29)$$

$$-C_1^2 D_0 - D_1 + \frac{D_2}{kT} + T C_1 \beta_g + C_1 D_0 \beta_a - T\beta_g \beta_a + C_1 D_0 \delta_a - T\beta_g \delta_a - \frac{\rho}{kT} + s^2 D_2 + \frac{s^2 D_1}{2} - \frac{ks^2 T \beta_a}{\rho} \times \left(\frac{C_1 D_0 D_1}{2} + C_1 D_0 D_2 - \frac{T\beta_g D_1}{2} - T\beta_g D_2 \right) = 0 \quad (\text{при } \tanh^0 u). \quad (30)$$

Таким образом, мы получили условия, при которых решением системы Максвелла – Блоха (3)–(10) будет поле вида (18), (19).

Дальнейшее рассмотрение зависит от предположений, сделанных относительно параметров сред. Если $\beta_a \neq 0$, то из (23) и (24) находим $D_1 = 0$ и $C_2 = 0$ (в противном случае должно выполняться условие $D_1 = 0$ и $D_0 = 0$, из которого вытекает равенство нулю амплитуды импульса; см. (20)–(22)). Таким образом, получаем систему из четырех уравнений, определяющую существование первого решения. В случае $\beta_a = 0$ из (23)–(30) находим систему уравнений для условий существования второго решения. Далее первое решение будет обозначаться как π , а второе – как 2π -импульс. Решения, названные π - и 2π -импульсами, имеют смысл только в отношении поглощающего компонента и названы так из-за сходства с импульсами, полученными МакКоллом и Ханом [12, 13].

С усиливающим компонентом импульсы взаимодействуют некогерентно, переводя атомы из возбужденного состояния в невозбужденное. Различие в поведении решений в виде π - и 2π -импульсов довольно существенно. Населенность при прохождении π -импульса изменяется по закону гиперболического тангенса с точностью до постоянной (см. (22) при условии $D_1 = 0$), другими словами, после прохода π -импульс оставляет поглотитель в инвертированном состоянии, создавая предпосылки для развития неустойчивости на заднем фронте (см. п.4.2). Населенность же при прохождении 2π -импульса изменяется по закону гиперболического тангенса в квадрате с точностью до постоянной и, как будет показано ниже, до сравнительно небольшой добавки, пропорциональной гиперболическому тангенсу и исчезающей при чисто когерентном взаимодействии импульса с поглотителем.

Импульс с таким поведением инверсной населенности устойчив к малым возмущениям (см. п.4.1) и более предпочтителен с энергетической точки зрения, т. к. энергия, отданная поглотителю на переднем фронте импульса, возвращается в импульс на его заднем фронте. Относительно поляризации поглотителя при прохождении импульсов можно отметить, что синфазная и квадратурная части поляризации π -импульса изменяются по закону гиперболического секанса, в то время как квадратурная часть поляризации 2π -импульса изменяется как производная от гиперболического секанса с точностью до добавки, пропорциональной гиперболическому секансу и исчезающей в случае полностью когерентного взаимодействия импульса с поглотителем. Синфазная же часть поляризации поглотителя при прохождении импульса изменяется подобно квадратурной части, но с амплитудой, на порядок меньшей.

3.1. Решение в виде 2π -импульса

Учет диполь-дипольных взаимодействий только в усилителе ($\beta_a = 0$) дает возможность найти условия, при которых в системе будет распространяться 2π -импульс. Эти условия можно представить в следующем виде:

$$\frac{D_1 C_1}{2} - D_2 C_2 + \frac{D_1 C_2}{2kT} - T\beta_g - D_1 \delta_a = 0, \quad (31)$$

$$-D_2 C_1 + \frac{D_1 C_1}{2kT} + \frac{D_1 C_2}{2} + \frac{T\beta_g}{kT} + D_2 \delta_a = 0, \quad (32)$$

$$3D_2 - \frac{D_1}{kT} + D_1 C_1 C_2 + D_2 C_2^2 + T\beta_g C_2 - \frac{C_2 D_1}{2} \delta_a = 0, \quad (33)$$

$$D_1 + 4D_2 - \frac{\rho}{kT} + \frac{D_2}{kT} + \frac{D_1 C_1^2}{2} + \frac{D_1 C_2^2}{2} + D_2 C_2^2 + T\beta_g C_1 - \frac{D_1 C_1}{2} \delta_a - T\beta_g \delta_a = 0, \quad (34)$$

$$s^2 = 4 + C_2^2. \quad (35)$$

Полученная алгебраическая система может быть решена, вообще говоря, только численно. Однако она допускает аналитическое решение в некоторых частных случаях. Например, если предположить, что импульс взаимодействует с поглощающей компонентой когерентно, т. е. $T_{2a} = \infty$ (или, что то же самое, $kT = \infty$), то система (31)–(35) существенно упрощается и имеет решение, которое после несложных преобразований можно представить в виде

$$C_1^\pm = \frac{n\mu^2}{4T^2\beta_g} \left\{ 1 + \frac{4\beta_g \delta_a T^2}{n\mu^2} \mp \left[1 - \frac{8\beta_g \delta_a T^2}{n\mu^2} - \left(\frac{4T^2\beta_g}{n\mu^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad C_2 = 0, \quad (36)$$

$$\eta = T \frac{s^2}{\mu^2}, \quad (37)$$

$$s^2 = 4, \quad (38)$$

$$\left(\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \right)_\pm = T \left(1 - \frac{4}{\mu^2} \right) + \frac{n\mu^2}{2T(1 + \delta_a^2)} \times \left\{ 1 - \frac{4\beta_g \delta_a T^2}{n\mu^2} \pm \left[1 - \frac{8\beta_g \delta_a T^2}{n\mu^2} - \left(\frac{4T^2\beta_g}{n\mu^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (39)$$

где $n = n_a/n_g$ – отношение концентраций поглощающей и усиливающей сред. В данном случае для площади импульса в поглотителе имеем выражение

$$\frac{d_a}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}(u)| dt = \frac{d_a}{d_g} \pi A \tau_p = s\pi = 2\pi. \quad (40)$$

Из соотношений (36)–(40) следует, что площадь импульса равна 2π и не зависит от параметров задачи. В общем же случае, как нетрудно показать, площадь больше 2π на некоторую малую величину, определяемую диполь-дипольными взаимодействиями. На рис. 1 представлены зависимости от длительности импульса отношения скорости света к скоростям нашего импульса ($(c/v_p)_+$ и $(c/v_p)_-$) и фундаментального 2π -импульса МакКолла и Хана [12]. Видно, что полученная зависимость неоднозначна. Зависимость $(c/v_p)_+$ представляет собой аналог зависимости c/v_p для фундаментального 2π -импульса и совпадает с ней в предельном случае ($\beta_g, \delta_a \rightarrow 0$).

Амплитуда C_1 (см. (19)) линейной по волновой координате фазовой модуляции принимает большие значения, что свидетельствует о сильном смещении частоты за пределы контура поглощения. В этом случае импульс практически не взаимодействует с поглощающим ком-

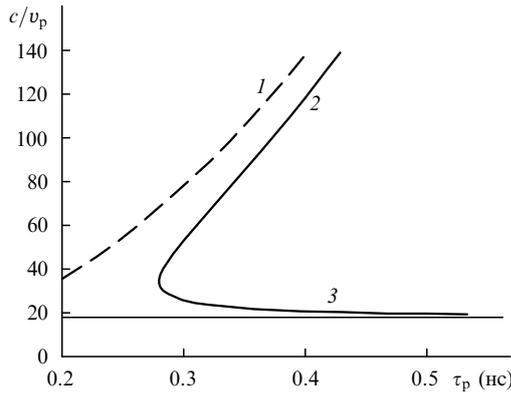


Рис.1. Зависимости отношения скорости света к скорости импульса от его длительности: 2π-импульс МакКолла и Хана (1), $(c/v_p)_+$ (2) и $(c/v_p)_-$ (3). Тонкая сплошная линия – асимптота $(c/v_p)_-$. При вычислении использовались следующие значения параметров: $T_{2g} = 10^{-11}$ с, $d_g = 10^{-19}$ ед. СГС, $d_a = 10^{-20}$ ед. СГС, $n_g = 10^{20}$ см⁻³, $n_a = 9 \times 10^{18}$ см⁻³, $\Delta_a = -10^7$ с⁻¹.

понентом. Вследствие сильной фазовой модуляции нарушается эквивалентность между площадью импульса и углом поворота вектора Блоха. Поляризация при этом существенно изменяется, в то время как инверсия остается практически постоянной. Фактически импульс формируется в основном в усилителе.

Из рис.1 видно, что одной и той же длительности могут соответствовать два значения скорости v_p , а следовательно, и два значения амплитуды поля. Такая физическая ситуация отвечает бистабильности второго рода, понятие о которой введено, по-видимому, впервые в работах [20, 21] для нерезонансных нелинейных сред. Подчеркнем, что в нашем случае подобная бистабильность достигается в двухкомпонентной (усиливающе-поглощающей), резонансной среде под влиянием эффектов локального поля. Следует ожидать, что солитон, формируемый только при взаимодействии с усилителем, является неустойчивым [12].

К сожалению, получить аналитическое решение системы (31)–(35) в случае частично когерентного взаимодействия с поглотителем не удастся. Некоторые соображения по поводу формирования импульса при конечном времени поперечной релаксации поглотителя позволяют найти численное решение системы (31)–(35). На рис.2 показана зависимость отношения скорости света к скорости импульса от его длительности при конечном времени поперечной релаксации поглотителя. Поскольку система уравнений Блоха для поглотителя решается точно при выполнении условий (31)–(35), то полученные зависимости справедливы и при временах порядка длительности импульса.

Влияние фазовой релаксации коренным образом меняет поведение зависимостей c/v_p от τ_p по сравнению с их поведением при полной когерентности поглотителя (рис.1). Появляется область, где кривые сближаются и пересекаются, меняясь в дальнейшем местами. Из рис.2 видно, что наблюдаемые эффекты происходят в области, где длительность импульса больше или равна времени поперечной релаксации и соответствует области некогерентного взаимодействия импульса с поглощающим компонентом. Полученная зависимость является наглядным примером перехода от когерентного взаимодействия импульса с поглотителем к некогерентному. Подобное поведение связано как с влиянием однородного

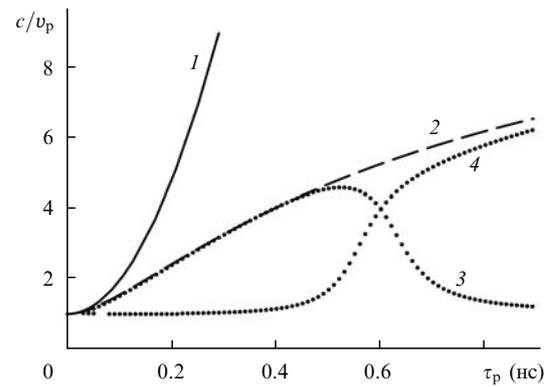


Рис.2. Зависимости отношения скорости света к скорости импульса от его длительности для 2π-импульса МакКолла и Хана (1), а также импульса из [5] (2) и две ветви численного решения системы (31)–(35) (3, 4). При вычислении использовались следующие значения параметров: $T_{2g} = 10^{-12}$ с, $T_{2a} = 2 \times 10^{-10}$ с, $d_g = 10^{-19}$ ед. СГС, $d_a = 10^{-20}$ ед. СГС, $n_g = 10^{20}$ см⁻³, $n_a = 10^{18}$ см⁻³, $\Delta_a = -4 \times 10^8$ с⁻¹.

уширения, так и с возникновением нелинейной фазовой модуляции.

Из численного решения системы (31)–(35) можно получить зависимость энергии импульса от величины ρ , пропорциональной отношению концентраций пассивного и активного компонентов. Поскольку энергия импульса

$$J = \tau_p \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(y) dy = 2A^2 \tau_p$$

и его площадь $s^2 = (A\tau_p\mu)^2 = 4 + C_2^2$ связаны жесткими условиями, энергия J пропорциональна величине $T(1 + C_2^2/4)$. На рис.3 приведены зависимость $T(1 + C_2^2/4)$ от ρ и результаты, полученные ранее в [5]. Качественный вид зависимости остается прежним, однако несколько расширяется область предельных значений концентраций, при которых возможна генерация. Видно, что существует диапазон изменения параметров, где зависимость энергии импульса от величины ρ становится неоднозначной. Очевидно, что части ветвей решения, где энергия увеличивается при увеличении ρ являются нефизичными. Из анализа решения следует, что при малых отстройках от резонанса рассматриваемая зависимость

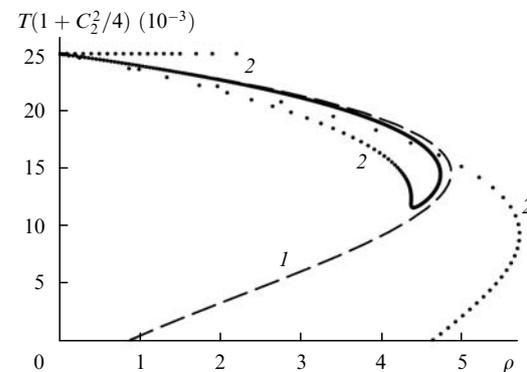


Рис.3. Зависимости величины $T(1 + C_2^2/4)$, пропорциональной энергии импульса J , от величины ρ , пропорциональной отношению концентраций активного и пассивного компонентов, полученные в [5] (1) и при численном решении системы (31)–(35) (2). При вычислении использовались следующие значения параметров: $T_{2g} = 10^{-12}$ с, $T_{2a} = 10^{-10}$ с, $d_a = 10^{-19}$ ед. СГС, $d_g = 3 \times 10^{-19}$ ед. СГС, $\eta = 0.9$, $\Delta_a = -10^{10}$ с⁻¹, $n_g = 10^{18}$ см⁻³, $\omega = 10^{15}$ с⁻¹.

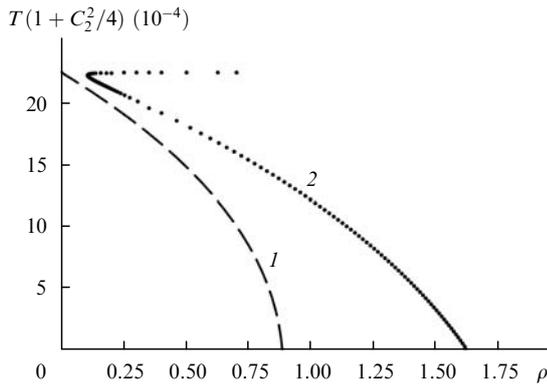


Рис.4. Зависимости величины $T(1 + C_2^2/4)$, пропорциональной энергии импульса J , от величины ρ , пропорциональной отношению концентраций активного и пассивного компонентов, полученные в [5] (1) и при численном решении системы (31)–(35) (2). При вычислении использовались следующие значения параметров: $T_{2g} = 10^{-12}$ с, $T_{2a} = 10^{-10}$ с, $d_a = 10^{-19}$ ед. СГС, $d_g = 10^{-18}$ ед. СГС, $n_g = 10^{19}$ см $^{-3}$, $\eta = 0.9$, $\Delta_a = -4 \times 10^9$ с $^{-1}$, $\omega = 10^{15}$ с $^{-1}$.

практически совпадает с решением, полученным в [5], и имеет однозначный характер.

На рис.4 представлены те же зависимости для случая, когда диполь-дипольные взаимодействия близки к предельным. При этом по сравнению с результатами работы [5] существенно расширяется область концентраций и увеличивается мощность генерации. Полученное решение не является однозначным. Первая ветвь решения остается практически постоянной при увеличении концентрации поглотителя, что связано с сильной линейной фазовой модуляцией и отсутствием взаимодействия с атомами поглощающего компонента. Вторая ветвь с увеличением концентрации убывает.

Следует также отметить, что при полностью когерентном взаимодействии с поглотителем потеря энергии не зависит от концентрации последнего и обусловлена лишь коэффициентом линейных потерь в резонаторе (см. (37)).

3.2. Решение в виде π -импульса

Учет диполь-дипольных взаимодействий в обеих средах приводит к следующим условиям, при которых будет существовать π -импульс:

$$C_1 = \delta_a < 0, \quad C_2 = 0, \quad (41)$$

$$\frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} = T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right), \quad (42)$$

$$s^2 = A^2 \tau_p^2 \mu^2 = 1 + \left(\frac{\beta_a k T}{1 + k T} \right)^2, \quad (43)$$

$$\delta_a = - \frac{\mu^2 (1 + k T)^2 + (\beta_a k T)^2}{(1 + k T)^2} \left[\beta_g + \frac{\beta_a k \rho}{(1 + k T)^2 + (\beta_a k T)^2} \right], \quad (44)$$

$$\eta = - \frac{\beta_g T}{\delta_a} + \frac{\rho [1 + k T (1 - \beta_a / \delta_a)]}{(1 + k T)^2 + (\beta_a k T)^2}. \quad (45)$$

Параметр s характеризует площадь импульса в поглотителе:

$$\begin{aligned} \frac{d_a}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}(u)| dt &= \frac{d_a}{d_g} \pi A \tau_p = s \pi \\ &= \pi \left[1 + \left(\frac{\beta_a k T}{1 + k T} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Очевидно, что площадь импульса в поглотителе равна π с точностью до малой добавки, пропорциональной константе диполь-дипольных взаимодействий в квадрате. Такой импульс распространяется в системе со скоростью, также отличной от скорости света. Однако замедление этого импульса в рассматриваемой системе происходит из-за потерь, обусловленных насыщением поглотителя передним фронтом импульса.

4. Анализ устойчивости импульсов к малым возмущениям

Из-за наличия диполь-дипольных взаимодействий и задаваемой расстройки полученные стационарные решения являются фазово-модулированными. Фазовая модуляция может существенно влиять на устойчивость импульса [22]. Таким образом, нахождение условий устойчивости практически важно для реализации генерации фазово-модулированного стационарного импульса. По существу, необходимо найти область параметров, при которых быстрые возмущения, локализованные в пределах самого импульса, не возрастают. Как известно, в усиливающей среде не могут существовать стационарные импульсы. В поглощающей среде распространение импульсов, в том числе и импульсов самоиндуцированной прозрачности, вследствие потерь происходит с затуханием. В рассматриваемой модели появление стационарных импульсов связано с одновременным действием усиливающего и поглощающего компонентов, первый из которых компенсирует потери, а второй отвечает за формирование профиля импульса самоиндуцированной прозрачности.

Пусть стационарное решение имеет вид $\mathcal{E}_0(u) = E(u) \times \exp[i\varphi(u)]$. Возникающие возмущения амплитуды и фазы выразим как $\xi(z, u)$ и $f(z, u)$ соответственно, тогда поле имеет вид

$$\mathcal{E}(u) = [E(u) + \xi(z, u)] \exp\{i[\varphi(u) + f(z, u)]\}.$$

Предполагая малость возмущений, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= [E(u) + \xi(z, u)] \exp\{i[\varphi(u) + f(z, u)]\} \\ &\approx \mathcal{E}_0(u) + \exp[i\varphi(u)] [\xi(z, u) + i f(z, u) E(u)]. \end{aligned}$$

Следовательно, связанное с фазовой модуляцией возмущение $\psi(z, u) = f(z, u) E(u)$.

При линеаризации системы уравнений Блоха между фазовым и амплитудным возмущениями появляется взаимосвязь. Линеаризованные волновые уравнения запишем в следующем виде:

$$\left[\frac{1}{L_g} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \eta) \right] \xi = - \frac{1}{T_{2g}} q_g - \frac{\rho}{k T \tau_p \mu} q_a, \quad (47)$$

$$\left[\frac{1}{L_g} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \eta) \right] \psi = \frac{1}{T_{2g}} \left(-\frac{Q_g}{E} \psi + p_g \right) + \frac{\rho}{kT\tau_p\mu} \left(-\frac{Q_a}{E\tau_p\mu} \psi + p_a \right) + \frac{v_p^{-1} - c^{-1}}{\tau_p L_g} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \xi, \quad (48)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \left(\lambda_{02}^2 + 1 - \frac{2}{\cosh^2 u} \right) \right] \psi_0 = -\frac{\partial \gamma_2}{\partial u} \exp \left(-\frac{L_g \mu^2 n}{T} \lambda_{2z} \right) \exp(-\lambda_{02} u), \quad (51)$$

где q_g , q_a и p_g , p_a – возмущения квадратурных и синфазных частей поляризации соответственно, возникающие вследствие амплитудной и фазовой модуляции.

Выражения для возмущений синфазной и квадратурной частей поляризации для усиливающего компонента получаются линеаризацией соответствующих компонентов. В случае поглощающего компонента выражения для возмущений находят из решения линеаризованной системы Блоха, которую в общем виде представим как

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} = \mathcal{A} \mathbf{b} + \mathbf{d}, \quad (49)$$

где

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ n_a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{kT} & -\left(\delta_a - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_a N_a \right) & -\beta_a Q_a \\ \delta_a - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_a N_a & -\frac{1}{kT} & -\beta_a P_a - \tau_p \mu E \\ 0 & \tau_p \mu E & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{Q_a}{E} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \psi \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \\ -\frac{P_a}{E} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \psi \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) - \tau_p \mu N_a \xi \\ \tau_p \mu Q_a \xi \end{pmatrix}.$$

4.1. Устойчивость решения в виде 2π-импульса

Нахождение условий устойчивости фазово-модулированного 2π-импульса при его квазиогерентном взаимодействии с поглотителем (C_2 , $1/kT \neq 0$) требует некоторых дополнительных предположений ввиду отсутствия аналитического решения алгебраической системы уравнений (31)–(35). Далее будет проанализирована устойчивость решения, стремящегося к полученному в [5], при $\delta_a, \beta_g \rightarrow 0$.

Можно показать, что $C_2 \rightarrow 0$ при $kT \rightarrow \infty$. Из (36)–(39) следует, что $C_1^+ - \delta_a \sim \delta_a$. Предположим, что эта оценка справедлива при $1/kT \ll 1$. Тогда при малости параметров (δ_a , C_2 , $1/kT \ll 1$) анализ устойчивости сводится к задаче на собственные значения (см. Приложение 2):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \left(\lambda_{01}^2 + 1 - \frac{2}{\cosh^2 u} \right) \right] \xi_0 = -\gamma_1 \exp \left(-\frac{L_g \mu^2 n}{T} \lambda_{1z} \right) \exp(-\lambda_{01} u), \quad (50)$$

где

$$\lambda_{01} = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 + (1 - \eta) \frac{kT}{\rho} \right]; \quad \lambda_{02} = \frac{1}{2} \left[\lambda_2 + (1 - \eta) \frac{kT}{\rho} \right];$$

γ_1, γ_2 – малые возмущения (см. (П2.5), (П2.6)); ξ_0 и ψ_0 определяются из формул (П2.7).

Известно, что в потенциальной яме ($1 - 2/\cosh^2 u$) дискретному спектру соответствует собственная функция $1/\cosh u$ с нулевым собственным значением. Таким образом, $\lambda_{01}^2 = \lambda_{02}^2 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2$. Условием разрешимости уравнений (50), (51) будет ортогональность их правых частей решениям однородных уравнений. В результате для λ_{01}^2 и λ_{02}^2 получаем уточненные значения с точностью до первого порядка малости ($T \ll 1$, $\beta_g \ll 1$, $\delta_a \ll 1$):

$$\lambda_{01}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh u} \gamma_1 du \approx \frac{1}{36kTu^2\rho} [9k^2s^2T^2(s^2T - \eta\mu^2) + 4kT\mu^2\rho(-12 + 4s + s^2)] \approx \frac{C_2}{9} - \frac{kT\eta}{\rho}, \quad (52)$$

$$\lambda_{02}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh u} \frac{\partial \gamma^2}{\partial u} du = \frac{(kT - \rho)C_1 + kT^2\beta_g + \rho\delta_a}{3\rho} \approx \frac{\delta_a}{3}. \quad (53)$$

Условием устойчивости будет либо отрицательность, либо равенство нулю собственных значений λ_1 и λ_2 . Из соотношений (52) и (53) получаем условия, при которых решение в виде 2π-импульса устойчиво: $C_2 < 9kT\eta/\rho$ и $\delta_a < 0$. Второе из этих неравенств свидетельствует об очень важной роли параметра δ_a , т. е. устойчивость возможна только при отрицательной расстройке. Поскольку $\eta - 1 = -L_{\text{cav}}/L_g < 0$, вещественные части λ_1 и λ_2 принимают отрицательные значения и поведение возмущений имеет осциллирующе-затухающий характер. Скорость затухания возмущений зависит от линейных потерь в резонаторе.

4.2. Устойчивость решения в виде π-импульса

При анализе устойчивости π-импульса предполагается, что к каждому следующему проходу импульса поляризация и инверсия возвращаются в свои исходные состояния. Анализ проводится для малых параметров β_a .

Используя условия существования π-импульса (41)–(45), систему уравнений (49) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ n_a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{kT} & \beta_a \left(\frac{\tanh u + 1}{1 + 1/kT} - 1 \right) & \frac{\beta_a}{s(1 + 1/kT) \cosh u} \\ -\beta_a \left(\frac{\tanh u + 1}{1 + 1/kT} - 1 \right) & -\frac{1}{kT} & \frac{1}{\cosh u} \left[\frac{\beta_a^2}{s(1 + 1/kT)} - s \right] \\ 0 & \frac{s}{\cosh u} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ n_a \end{pmatrix} + \tau_p \mu \times \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2(1 + 1/kT)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \tanh u \right) \\ \frac{\beta_a}{s^2(1 + 1/kT)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \tanh u \right) - \left(\frac{\tanh u + 1}{1 + 1/kT} - 1 \right) \xi \\ \frac{\xi}{s \cosh u} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Решение системы (54) представляет значительные трудности, поэтому для начала рассмотрим эту систему в предположении полностью когерентного взаимодействия импульса со средой и в отсутствие диполь-дипольных взаимодействий ($kT \rightarrow \infty, \beta_a \rightarrow 0$). Влияние конечности времени поперечной релаксации в поглощающем компоненте учтем в следующем приближении. Поступая так же, как и в случае анализа устойчивости 2π -импульса, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - \left[\lambda_{01}^2 + \frac{\rho \mu^2}{k(Ts)^2} \tanh u \right] \zeta_0 \\ = -\theta_1 \exp \left(-\frac{L_g s^2 T \lambda_1}{\mu^2} z \right) \exp(\lambda_{01} u), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} - \left[\lambda_{02}^2 + \frac{\rho \mu^2}{k(Ts)^2} \tanh u \right] \chi_0 \\ = -\frac{\partial \theta_2}{\partial u} \exp \left(-\frac{L_g s^2 T \lambda_2}{\mu^2} z \right) \exp(\lambda_{02} u), \end{aligned} \tag{56}$$

где

$$\lambda_{01,02} = \lambda_{1,2} - \eta \frac{\mu^2}{Ts^2}; \quad \zeta_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial u} \exp(-\lambda_{01} u); \quad \chi_0 = \chi \exp(-\lambda_{02} u);$$

ζ и χ – соответственно амплитудные и фазовые возмущения, аналогичные используемым в (47), (48);

$$\theta_1 = \frac{2}{\cosh u} \int_{-\infty}^u \frac{\zeta}{\cosh x} dx + \zeta(\tanh u + 1) + \frac{\rho \mu^2}{k(Ts)^2} \bar{q}_a;$$

$$\theta_2 = \chi(\tanh u + 1) - T \zeta \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial u} \frac{s^2}{\mu^2} - \beta_g \right) + \frac{\rho \mu^2}{k(Ts)^2} \bar{p}_a;$$

$$\bar{p}_a = - \int_{-\infty}^u \left[\frac{1}{kT} p_a^{(0)} + B_1(x) q_a^{(0)} + B_2(x) n_a^{(0)} \right] dx;$$

$$\bar{q}_a = \tanh u \int_{-\infty}^u \left\{ \tanh x \left\{ B_1(u) p_a^{(0)} - \frac{1}{kT} q_a^{(0)} + \right. \right.$$

$$\left. + [B_2(x) - B_3(x)] n_a^{(0)} \right\} + \frac{B_3(x)}{\cosh x} q_a^{(0)} \Big\} dx$$

$$\left. + \frac{1}{\cosh u} \int_{-\infty}^u \left\{ \frac{1}{\cosh x} \left\{ \beta_a B_1(x) p_a^{(0)} - \frac{1}{kT} q_a^{(0)} + [B_2(x) - B_3(x)] n_a^{(0)} \right\} + B_3(x) q_a^{(0)} \tanh x \right\} dx; \right.$$

$$p_a^{(0)} = \int_{-\infty}^u \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi \tanh x \right) dx; \quad q_a^{(0)} = -\tanh u \int_{-\infty}^u \zeta dx;$$

$$n_a^{(0)} = \frac{1}{\cosh u} \int_{-\infty}^u \zeta dx; \quad B_1(u) = -\beta_a \left(\frac{\tanh u + 1}{1 + 1/kT} - 1 \right);$$

$$B_2(u) = -\frac{\beta_a}{s(1 + 1/kT) \cosh u}; \quad B_3(u) = \frac{s - 1}{\cosh u}.$$

Аналитическое решение в данном случае найти не удастся, однако можно упростить задачу, заменив гиперболический тангенс функцией Хэвисайда. Тогда решениями однородного уравнения будут периодические функции на заднем фронте импульса и экспоненциально затухающие функции на переднем фронте с собственными значениями λ_{01}^2 и λ_{02}^2 , принадлежащими интервалу $(-\rho \mu^2/[k(Ts)^2]; \rho \mu^2/[k(Ts)^2])$. При этом инкременты возрастания возмущения λ_1 и λ_2 в общем случае принимают комплексные значения с положительной вещественной частью. Таким образом, решение в виде π -импульса неустойчиво вследствие возмущений, возникающих на заднем фронте.

5. Заключение

В рамках модели двухкомпонентной резонансной среды (поглотитель – некогерентный усилитель) рассмотрено влияние ближних диполь-дипольных взаимодействий резонансных атомов (эффектов локального поля) на солитонный режим генерации при синхронизации мод в случае использования явления самоиндуцированной прозрачности. Показано, что влияние эффектов локального поля приводит к характерной фазовой модуляции, которая может возникать даже в отсутствие задаваемых отстроек от резонанса. Получены и проанализированы решения в виде 2π - и π -импульсов. Формирование 2π -импульса оказывается более предпочтительным. При этом увеличение концентрации резонансных атомов (вплоть до максимальной для твердотельных сред концентрации $n_g \sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$) возможно только в усилителе, что необходимо принимать во внимание при практической реализации режима генерации 2π -импульса. Указано на возможность увеличения мощности генерации.

Рассмотрена устойчивость солитонов самоиндуцированной прозрачности. Показано, что 2π -импульс устойчив при наличии диполь-дипольных взаимодействий в усилителе и отсутствии их в поглотителе, если выполнены условия $C_2 < 9kT\eta/\rho$ и $\delta_a < 0$. Отсюда следует, что для достижения устойчивости необходима отрицательная расстройка. В отличие от 2π -импульса, π -импульс оказывается неустойчивым вследствие возмущений, развивающихся на его заднем фронте.

Отметим, что в условиях формирования солитона самоиндуцированной прозрачности в однокомпонентной пассивной среде при отрицательной отстройке от резо-

нанса инкремент неустойчивости поперечных возмущений меньше, чем в случае $\delta_a = 0$ (см. [23] и цитируемую там литературу). Другими словами, можно предположить, что отрицательная отстройка от резонанса способна обеспечить стабилизацию импульсов по отношению к поперечным возмущениям и в нашем случае.

Установлено, что фазово-модулированные солитоны обладают свойством бистабильности второго рода, когда одному значению длительности импульса соответствуют два возможных значения скорости (амплитуды). Это свойство бистабильности качественно отличает рассмотренный нами солитонный режим синхронизации мод от исследованного в [5]. Формирование солитоноподобных импульсов в данном случае отличается также и от автоволновых процессов, когда бистабильность определяется поперечно-дифракционной обратной связью [24]. По-видимому, возможен также и «симбиоз» механизмов бистабильности при наличии одновременно диполь-дипольных взаимодействий и дифракции.

Авторы признательны В.В.Козлову за полезные дискуссии при выполнении работы и обсуждение результатов.

Приложение 1

При разложении системы уравнений Блоха удобно перейти к следующим переменным:

$$F = \frac{P_g - iQ_g}{T_{2g}}; \quad \kappa = \delta_g - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_g N_g.$$

Тогда уравнение для поляризации в усилителе примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -F \left(\frac{1}{T} + i\kappa \right) + \frac{iEN_g}{T}. \quad (\text{П1.1})$$

Полученное уравнение легко интегрируется с учетом начальных условий для синфазной и квадратурной частей поляризации, после чего находим

$$F \exp[-i\varphi(u)] = \frac{i}{T} \int_0^u E(u-y) N_g(u-y) \exp \left[-y \left(\frac{1}{T} + i\delta_g \right) \right] \times \exp \left\{ i \left[-\varphi(u-y) - \beta_g \int_u^{u-y} N_g(x) dx \right] \right\}. \quad (\text{П1.2})$$

Предполагая, что компоненты вектора Блоха меняются медленно за время порядка $(1/T_{2g} + \Delta_g)^{-1}$, и разлагая правую часть (П1.2) по малому параметру T , получаем

$$F(u) \exp[-i\varphi(u)] = \frac{i}{T} \left(\frac{1}{T} + iT\delta_g \right)^{-1} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y^n \left. \frac{d^n G(u-y)}{d(u-y)^n} \right|_{y=0}, \quad (\text{П1.3})$$

где

$$G(u-y) = E(u-y) N_g(u-y) \times \exp \left\{ i \left[-\varphi(u-y) - \beta_g \int_u^{u-y} N_g(x) dx \right] \right\}.$$

Инверсию, в свою очередь, можно разложить по тому же параметру T , т. е.

$$N_g(u) = N_0(u) + N_1(u)T + O(T^2),$$

что приводит к окончательному выражению

$$F(u) = \frac{1}{1 + iT\delta_g} \left\{ EN_0 + T \left\{ EN_1 - \frac{1}{1 + iT\delta_g} \times \left[\frac{\partial}{\partial u} EN_0 + EN_0 \left(-i \frac{\partial \varphi}{\partial u} - i\beta_g N_0 \right) \right] \right\} \right\} + O(T^2). \quad (\text{П1.4})$$

В нашем случае $\delta_g = 0$.

Выделяя в (П1.2) вещественную и мнимую части, после несложных преобразований находим явные выражения для компонент вектора Блоха усиливающей среды (12)–(14).

Приложение 2

Учитывая малость параметров ($\delta_a, C_2, 1/kT \ll 1$), уместно воспользоваться приближенным равенством

$$\frac{v_p^{-1} + c^{-1}}{L_g \tau_p} \approx T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) + \frac{\rho}{kT},$$

которое непосредственно следует из уравнения (39). Тогда систему уравнений (49) в первом приближении можно свести к виду

$$\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial u} = \mathcal{A} \mathbf{b}_0 + \mathbf{d}_0, \quad (\text{П2.1})$$

где

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} p_a^{(0)} \\ q_a^{(0)} \\ n_a^{(0)} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\cosh u} \\ 0 & \frac{2}{\cosh u} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{d}_0 = -\tau_p \mu \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi \tanh u \right) \tanh u \\ \left(-1 + \frac{2}{\cosh^2 u} \right) \xi \\ \frac{2 \sinh u}{\cosh^2 u} \xi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выражение для интересующих нас возмущений синфазной и квадратурной частей поляризации и инверсии имеет вид

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1, \quad (\text{П2.2})$$

где

$$\mathbf{b}_1 = -\tau_p \mu \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \tanh x \right) \tanh x dx \\ \left(-1 + \frac{2}{\cosh^2 u} \right) \int_{-\infty}^u \xi d\xi \\ 2 \frac{\sinh u}{\cosh^2 u} \int_{-\infty}^u \xi d\xi \end{pmatrix};$$

\mathbf{b}_1 – малая добавка, являющаяся решением следующей матричной системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u} = (\mathcal{A} - \mathcal{A}_0) \mathbf{b}_0 + (\mathbf{d} - \mathbf{d}_0).$$

Подставляя решения (П2.2) в линеаризованные волновые уравнения (47), (48) и учитывая, что

$$\left(\frac{v_p^{-1} + c^{-1}}{\tau_p L_g} \right) \approx T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) + \frac{\rho}{kT},$$

получаем

$$\left[\frac{1}{L_g} \frac{kT}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \eta) \frac{kT}{\rho} \right] \xi = \left(\frac{2}{\cosh^2 u} - 1 \right) \int_{-\infty}^u \xi d\xi + \gamma_1, \quad (\text{П2.3})$$

$$\left[\frac{1}{L_g} \frac{kT}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \eta) \frac{kT}{\rho} \right] \psi = \left[\psi \tanh u - \int_{-\infty}^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \tanh x \right) \tanh x dx \right] + \gamma_2, \quad (\text{П2.4})$$

где

$$\gamma_1 = \frac{kT}{\rho} \left[-\frac{1}{T_{2g}} q_g + T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\rho}{kT \tau_p \mu} \bar{q}_a \right], \quad (\text{П2.5})$$

$$\gamma_2 = \frac{kT}{\rho} \left\{ \left[T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) + \frac{\rho}{kT} \right] \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} \xi + \frac{1}{T_{2g}} \left(-\frac{Q_g}{E} \psi + p_g \right) + T \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\rho}{kT \tau_p \mu} \left[-\frac{\psi}{E} \left(Q_a - \frac{kT \tau_p \mu}{\rho} \frac{\partial E}{\partial u} \right) + \bar{p}_a \right] \right\}. \quad (\text{П2.6})$$

Будем искать решения уравнений (П2.3), (П2.4) в фак-

торизованном виде:

$$\xi(z, u) = \frac{\partial \xi_0(u)}{\partial u} \exp \left(\frac{L_g \rho}{kT} \lambda_1 z \right), \quad (\text{П2.7})$$

$$\psi(z, u) = \psi_0(u) \exp \left(\frac{L_g \rho}{kT} \lambda_2 z \right).$$

Тогда вопрос об устойчивости сводится к решению задачи на собственные значения (50), (51).

1. Комаров К.П., Угожаев В.Д. *Квантовая электроника*, **11**, 1167 (1984).
2. Комаров К.П., Кучьянов А.С., Угожаев В.Д. *Автометрия*, **3**, 108 (1989).
3. Комаров К.П., Кучьянов А.С. *Квантовая электроника*, **18**, 207 (1991).
4. Комаров К.П. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **56**, 2 (1992).
5. Козлов В.В., Фрадкин Э.Е. *ЖЭТФ*, **107** (1), 62 (1995).
6. Козлов В.В. *ЖЭТФ*, **107** (2), 360 (1995).
7. Kozlov V.V. *Phys. Rev. A*, **56**, 1607 (1997).
8. Козлов В.В. *Письма в ЖЭТФ*, **69**, 856 (1999).
9. Андреев А.В., Полевой П.В. *ЖЭТФ*, **106**, 1343 (1994).
10. Кистенев Ю.В., Шаповалов А.В. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 433 (1999).
11. Кистенев Ю.В., Пономарев Ю.Н., Шаповалов А.В. *Квантовая электроника*, **29**, 56 (1999).
12. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev.*, **183** (2), 457 (1969).
13. Maimistov A.I., Basharov A.M., Elutin S.O., Sklyarov Yu.M. *Phys. Reports*, **191**, 1 (1990).
14. Bowden C.M., Dowling J.P. *Phys. Rev. A*, **47**, 1247 (1993).
15. Strong C.R., Bowden C.M., Allen L.A. *Opt. Commun.*, **67**, 387 (1988).
16. Bowden C.M., Postan A., Inguva R. *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 1081 (1991).
17. Афанасьев А.А., Власов Р.А., Черствый А.Г. *ЖЭТФ*, **117** (3), 489 (2000).
18. Afanas'ev A.A., Vlasov R.A., Khasanov O.K., Smirnova T.V., Fedotova O.M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 911 (2002).
19. Белоненко М.Б., Кабаков В.В. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 435 (2000).
20. Gatz S., Herman J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 1732 (1992).
21. Herman J. *Opt. Commun.*, **87**, 161 (1992).
22. Комаров А.К., Комаров К.П., Кучьянов А.С. *Письма в ЖЭТФ*, **67**, 261 (1998).
23. Большов Л.А., Лиханский В.В. *ЖЭТФ*, **75** (6), 2047 (1978).
24. Розанов Н.Н. *Квантовая электроника*, **27**, 175 (1999).