

Особенности распространения света в полубесконечных массивах световодов

П.И.Хаджи, К.Д.Ляхомская, О.К.Орлов

Изучено пространственное распределение интенсивности распространяющегося излучения в полубесконечных массивах направленных ответвителей с различными зависимостями констант связи от номера световода.

Ключевые слова: направленный ответвитель, полубесконечный массив световодов, постоянная распространения, константа связи.

1. Введение

Линейные и нелинейные оптические эффекты в направленных ответвителях, представляющих собой массивы световодов, вызывают повышенный интерес, т. к. они могут быть использованы в волоконно-оптических линиях связи и в чисто оптических системах обработки информации. Кроме того, массивы световодов, в которых каждый световод связан со своими ближайшими соседями, представляют собой примеры дискретных оптических систем, функциональные особенности которых еще до конца не изучены. Использование массивов световодов оказалось весьма полезным при создании полупроводниковых лазеров [1–3]. В ряде работ [4–9] теоретически изучались закономерности распространения света в массивах световодов. В [10–12] показано, что неоднородная система туннельно-связанных световодов характеризуется эффектом полного внутреннего отражения света. Пучок света в такой системе распространяется по волнообразной спиральной траектории. В [13–16] рассмотрена задача о распространении света в системе туннельно-связанных световодов, постоянные распространения в которых изменяются по линейному закону. В таких структурах при возбуждении одного световода наблюдаются осцилляции ширины пучка вдоль оси в процессе распространения. При изменении интенсивности и фазы на входе в массивах нелинейных световодов могут проявляться эффекты переключения, локализации излучения в нескольких световодах, а также управления распространением [17–20]. Как показано в [21, 22], в массивах нелинейных световодов возможно распространение солитонных импульсов.

Дальнейшее исследование функциональных возможностей массивов световодов является актуальной задачей. В связи с этим отметим, что особенности распространения света в ответвителях для бесконечных, полубе-

сконечных и конечных массивов различны. Ниже будут представлены результаты теоретического исследования эффектов распространения в полубесконечных линейных массивах световодов с использованием метода связанных волн. Этот метод особенно привлекателен, т. к. позволяет свести задачу к одномерной системе линейных связанных дифференциальных уравнений первого порядка. Важным обстоятельством является то, что в отсутствие потерь из-за поглощения света связь между соседними световодами является симметричной, т. е. имеет место равенство констант связи между i -м и j -м световодами: $\kappa_{ji} = \kappa_{ij}$.

Сложность системы массивов световодов не позволяет получить общее решение системы уравнений, описывающих распространение света при произвольных соотношениях между постоянными распространения отдельных световодов и константами связи между ними. Что касается модельных систем, то в некоторых случаях удается получить точные аналитические решения.

Бесконечная система идентичных световодов была первой, для которой было получено точное аналитическое решение системы уравнений для связанных волн [4, 23]. Число модельных, точно решаемых систем можно существенно увеличить в случае полубесконечных массивов, используя теорию ортогональных классических полиномов. Такие решения представляют интерес, поскольку в сложных массивах могут существовать достаточно большие участки, в которых имеется определенная зависимость констант связи от номера световода в массиве.

В данной работе представлены точные решения дифференциально-разностных уравнений, описывающих пространственное распределение амплитуды поля в каждом световоде полубесконечного массива идентичных световодов. Рассматриваемые массивы различаются только зависимостью констант связи между двумя соседними световодами от номеров этих световодов в массиве. Хотя используемый подход является упрощенным, тем не менее он позволяет предсказать ряд качественно новых эффектов, имеющих самостоятельную научную и практическую значимость.

Рассмотренные ниже дифференциально-разностные уравнения используются, в частности, и при решении уравнения Шредингера для многоуровневых эквидистантных систем, возбуждаемых резонансным излучением

П.И.Хаджи, К.Д.Ляхомская, О.К.Орлов. Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко, MD3300 Молдавия, Тирасполь, ул. 25 Октября, 128; Институт прикладной физики АН РМ, Молдавия, MD2800 Кишинев, ул. Академией, 5; e-mail: tdsu4@idknet.com

Поступила в редакцию 24 октября 2005 г., после доработки – 6 июня 2006 г.

ем [24–28], и при исследовании временной эволюции перехода электронов между квантовыми точками [29, 30], и в различных областях физики. Поэтому получение решений таких уравнений для широкого класса систем представляет несомненный интерес.

2. Метод решения задачи

Рассмотрим полубесконечную систему идентичных световодов, характеризующихся одной и той же постоянной распространения β . Будем описывать стационарное распространение лазерного излучения в каждом из световодов системой дифференциально-разностных уравнений [4–8, 23]

$$i \frac{dE_n}{dz} + \beta E_n + \kappa_{n-1,n} E_{n-1} + \kappa_{n,n+1} E_{n+1} = 0, \tag{1}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где n – номер световода; E_n – амплитуда поля распространяющейся волны в n -м световоде; $\kappa_{n-1,n}$ – константа связи между световодами $n - 1$ и n ; z – координата вдоль оси каждого из световодов, отсчитываемая от торца соответствующего световода. В (1) учтено взаимодействие (связь) данного световода только с ближайшими соседями. Считаем, что все световоды расположены в одной плоскости и константы связи $\kappa_{n-1,n} = \kappa \kappa_n$ ($n = 0, 1, 2$), причем $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 1$, так что $\kappa_{0,1} \equiv \kappa$. Конкретные системы будут различаться функциональными зависимостями констант связи κ_n от номера световода n . Далее будет изучен характер распространения лазерного излучения в зависимости от вида функции κ_n . Полагая в (1) $E_n = f_n \exp(i\beta z)$ и вводя переменную $x = kz$, получаем

$$i \frac{df_n}{dx} + \kappa_n f_{n-1} + \kappa_{n+1} f_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Граничное условие для системы (2) в случае, когда с торца накачивается только один j -й световод, представим в виде

$$f_n(x=0) = \delta_{nj}, \tag{3}$$

где δ_{nj} – символ Кронекера. Нормированную интенсивность излучения \mathcal{P}_n в n -м световоде определим выражением

$$\mathcal{P}_n(x) = |f_n(x)|^2. \tag{4}$$

Получить решение системы уравнений (2) для произвольных κ_n не представляется возможным. Однако можно получить решение задачи для широкого класса функций κ_n . Будем искать решение уравнения (2) при условии (3) в виде

$$f_n(x) = \int_a^b \sigma(y) \frac{P_j(y)}{d_j} \frac{P_n(y)}{d_n} \exp(irxy) dy, \tag{5}$$

где $P_n(x)$ – классический ортогональный полином со стандартизацией $P_0(x) = 1$ и нормой d_n , определенный на отрезке $[a, b]$ с весом $\sigma(x)$, т. е.

$$\int_a^b \sigma(x) P_n(x) P_m(x) dx = d_n^2 \delta_{nm}. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (2), приходим к рекуррентному соотношению

$$\kappa_{n+1} \frac{P_{n+1}(x)}{d_{n+1}} + \kappa_n \frac{P_{n-1}(x)}{d_{n-1}} = rx \frac{P_n(x)}{d_n}, \tag{7}$$

которому удовлетворяют ортонормированные полиномы $P_n(x)/d_n$. Выбирая различные полиномы $P_n(x)$ и тем самым задавая их вес $\sigma(x)$ и интервал $[a, b]$, из известных соотношений [31–34]

$$r = \frac{k_1 d_0}{k_0 d_1}, \quad \kappa_n = \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{d_n}{d_{n-1}} r, \tag{8}$$

где k_n – коэффициент при члене x^n полинома, находим константу r и функциональную зависимость константы связи κ_n . Таким образом мы определяем конкретную систему, которой соответствует решение (5). Выполняя интегрирование в (5), получаем для выбранной системы световодов решение $f_n(x)$ в явном виде. Выражение (5) при $x = 0$ удовлетворяет граничному условию (3) в силу ортонормированности классических полиномов с весом $\sigma(y)$:

$$\int_a^b \sigma(y) \frac{P_j(y)}{d_j} \frac{P_n(y)}{d_n} dy = \delta_{nj}. \tag{9}$$

Рассмотрим конкретные модели полубесконечных массивов, называя их по имени классического полинома, дающего решение задачи.

3. Массив Чебышева I рода

Полиномы Чебышева I рода $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$ с весом $\sigma(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и удовлетворяют рекуррентному соотношению [31–36]

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) - \frac{2x}{1 + \delta_{n,0}} T_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

При этом $T_0(x) = 1$. Нормы этих полиномов $d_0 = \sqrt{\pi}$, $d_n = \sqrt{\pi/2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, а коэффициент k_n при x^n равен $k_0 = 1, k_n = 2^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому

$$r = \frac{k_1 d_0}{k_0 d_1} = \sqrt{2},$$

$$\kappa_n = \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{d_n}{d_{n-1}} r = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 1/\sqrt{2}, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{11}$$

Вычисляя интеграл (5) при найденных значениях r и κ_n и полагая, что с торца накачивается световод с номером $n = j = 0$ (граничное условие $f_n|_{x=0} = \delta_{n,0}$), находим решение системы уравнений (2) в виде

$$f_n(x) = \begin{cases} J_0(\sqrt{2}x), & n = 0, \\ i^n \sqrt{2} J_n(\sqrt{2}x), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{12}$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя n -го порядка [32–37].

В каждом из световодов нормированная интенсивность излучения

$$\mathcal{P}_n(x) = \begin{cases} J_0^2(\sqrt{2}x), & n = 0, \\ 2J_n^2(\sqrt{2}x), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (13)$$

Если накачивается j -й световод ($f_{n|x=0} = \delta_{n,j}$), то решение для функции $f_n(x)$ также легко найти, и для интенсивности излучения в произвольном световоде получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(x) &= J_0^2(\sqrt{2}x), \quad j = 0, n = 0, \\ \mathcal{P}_n(x) &= 2J_n^2(\sqrt{2}x), \quad j = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \\ \mathcal{P}_0(x) &= 2J_j^2(\sqrt{2}x), \quad j \neq 0, n = 0, \\ \mathcal{P}_n(x) &= J_{n+j}^2(\sqrt{2}x) + J_{n-j}^2(\sqrt{2}x) + 2(-1)^j \\ &\quad \times J_{n+j}(\sqrt{2}x)J_{n-j}(\sqrt{2}x), \quad j \neq 0, n \geq 1. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис.1 представлено пространственное распределение интенсивности света в массиве световодов в зависимости от нормированной координаты $x = \kappa z$ (здесь и далее на всех рисунках интенсивность накачиваемого с

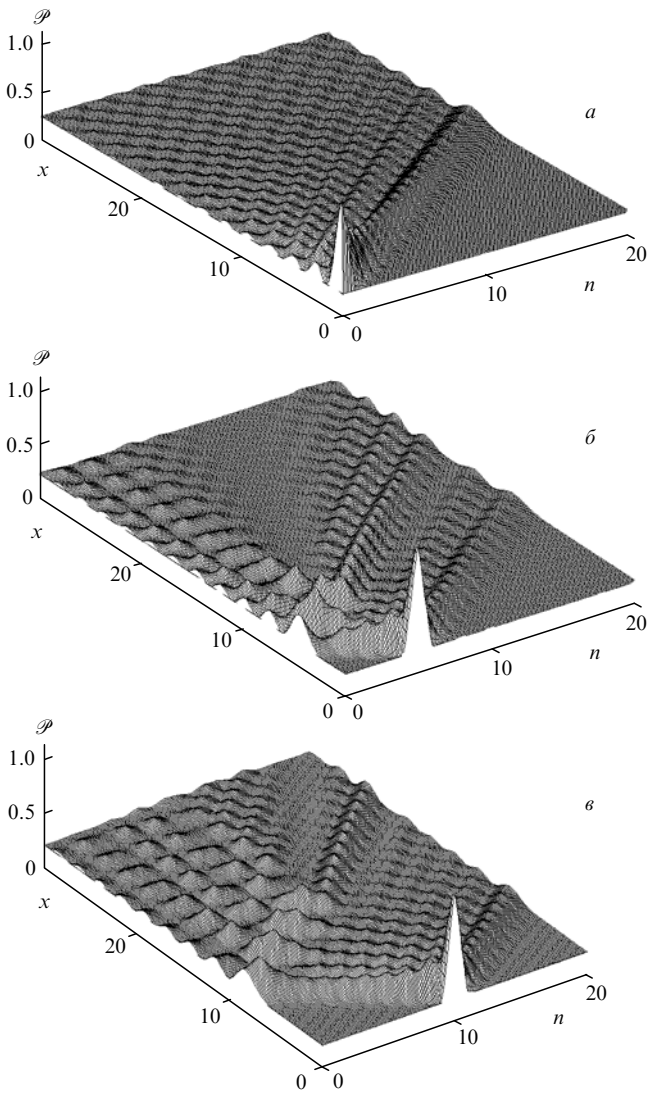


Рис.1. Пространственное распределение интенсивности излучения \mathcal{P} в световодах полубесконечного массива Чебышева I рода при накачке нулевого (а), пятого (б) и десятого (в) световодов.

торца световода при $x = 0$ равна единице). Видно, что интенсивность света в накачиваемом световоде ($n = 0$) является осциллирующей и монотонно убывающей функцией от расстояния x (рис.1,а). Интенсивность излучения в накачиваемом ($n = 0$) световоде отлична от нуля на значительном расстоянии от торца. Как видно из рис.1,а, при $x = 2.8$ и 11.7 $\mathcal{P}_0 \approx 0.15$ и 0.05 соответственно. При $x \gg 1$ интенсивность поля стремится к нулю пропорционально x^{-1} . Наблюдается также перекачка излучения в другие световоды с $n > 0$. При этом первый максимум интенсивности поля в n -м световоде возникает тем дальше от торца, чем выше его номер n , т.е. чем дальше он находится от накачиваемого с торца световода. Амплитуды максимумов интенсивности при $x \gg 1$ убывают обратно пропорционально x .

Процесс перекачки излучения из одного световода в другой благодаря взаимодействию между ними можно интерпретировать как процесс диффузии излучения во внутренние области массива в направлении, перпендикулярном оси световода. Поэтому в общем пространственное распределение интенсивности света в массиве световодов имеет волнообразную форму с убывающей с расстоянием амплитудой, причем с ростом номера n световода гребни нескольких первых волн располагаются все глубже в массиве вдоль оси x . Вид этой структуры обусловлен как эффектом распространения света вдоль оси световода, так и диффузией его в поперечном направлении. Поскольку нулевой ($n = 0$) световод связан только с первым, тогда как все остальные световоды взаимодействуют с двумя ближайшими соседями, то благодаря процессу диффузии волна как бы отражается от границы раздела массива (нулевой световод) и, распространяясь вдоль оси x , диффундирует в поперечном направлении. В торцевой области массива возникает расширяющаяся с ростом n невозмущенная область.

На рис.1,б, в представлены пространственные распределения интенсивности излучения в массиве при накачке с торцов пятого и десятого световодов соответственно. Видно, что совместное действие процессов распространения и диффузии приводит к сложной интерференционной структуре распределения с усилением максимумов более высоких порядков. Например, при накачке в торец пятого световода излучение сравнительно быстро приходит в нулевой световод и в максимуме оказывается отличным от нуля даже на расстоянии $x \approx 25 - 30$. Кроме того, при накачке пятого световода первые два максимума в световоде с $n = 20$ ниже следующих за ними трех максимумов.

При накачке в торец десятого световода первый максимум излучения в нулевом световоде обнаруживается при $x \approx 8$. Далее с ростом x интенсивность в максимумах нулевого световода монотонно убывает, но заметно отличается от нуля даже на расстоянии $x \approx 30$, причем эти максимумы более ярко выражены, чем при накачке пятого и тем более нулевого световода. Видно также, что в области границы раздела массива в окрестности нулевого световода при $x > 10$ образуется достаточно сложная пространственная структура максимумов и минимумов интенсивности, обусловленная возникновением волны, отраженной от границы раздела массива из-за процесса диффузии. Кроме того, с ростом расстояния излучение в накачиваемом (десятом) световоде сначала быстро убывает, на расстоянии $x \approx 9$ практически полностью исчезает, а затем снова появляется, причем при

больших x (порядка 20 и более) интенсивность максимумов в этом световоде оказывается значительной. Отметим также, что при накачке в десятый световод амплитуда шестого максимума в световоде с $n = 20$ существенно больше амплитуд других ближайших к нему максимумов. Здесь также с обеих сторон от торца накачиваемого световода наблюдается невозмущенная область, расширяющаяся при удалении от него.

4. Массив Чебышева II рода

Полиномы Чебышева II рода $U_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$ с весом $\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}$ и удовлетворяют рекуррентному соотношению $U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) - 2xU_n(x) = 0$. Норма этих полиномов $d_n = \sqrt{\pi/2}$, коэффициент k_n при x^n равен 2^n [31–36]. В соответствии с (8) получаем $r = 2$ и $\kappa_n = 1$. Таким образом, данный массив характеризуется одинаковой для всех световодов константой связи, не зависящей от номера n . В соответствии с (5) можно получить решение для f_n , а затем и для интенсивности света в n -м световоде. В предположении, что при $x = 0$ накачивается только световод с номером $n = 0$, т. е. граничные условия $f_n|_{x=0} = \delta_{n,0}$, решение системы уравнений (2) в соответствии с (5) имеет вид

$$f_n(x) = i^n \frac{n+1}{x} J_{n+1}(2x). \tag{15}$$

Отсюда следует, что амплитуда поля в n -м световоде является колебательной, монотонно убывающей функцией расстояния. При $x \rightarrow \infty$ амплитуда поля $f_n(x)$ стремится к нулю. Интенсивность поля $\mathcal{P}_n(x)$ в произвольной точке выражается формулой

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{(n+1)^2}{x^2} J_{n+1}^2(2x). \tag{16}$$

Предполагая, что накачка осуществляется в торец j -го световода ($f_n|_{x=0} = \delta_{n,j}$), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x) &= J_{n+j+2}^2(2x) + J_{n-j}^2(2x) \\ &+ 2(-1)^j J_{n+j+2}(2x) J_{n-j}(2x). \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда при $n = j \neq 0$ находим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x) &= J_0^2(2x) + J_{2(n+1)}^2(2x) \\ &+ 2(-1)^j J_0(2x) J_{2(n+1)}(2x). \end{aligned} \tag{18}$$

На рис.2 представлено пространственное распределение интенсивности света в массиве Чебышева II рода при накачке в торец нулевого, пятого и десятого световодов соответственно. В отличие от предыдущего случая здесь излучение, накачиваемое в нулевой световод, очень быстро передается соседним световодам, так что даже второй максимум в нулевом световоде при $x \simeq 2$ составляет всего лишь 3% накачиваемой интенсивности (рис.2,а). Это обусловлено тем, что при $x \gg 1$ интенсивность излучения убывает с ростом x намного быстрее ($\mathcal{P}_n(x) \sim x^{-3}$), чем в массивах Чебышева I рода, где $\mathcal{P}_n(x) \sim x^{-1}$. Из рис.2,а видно, что стационарная пространственная структура распределения интенсивности света представляет

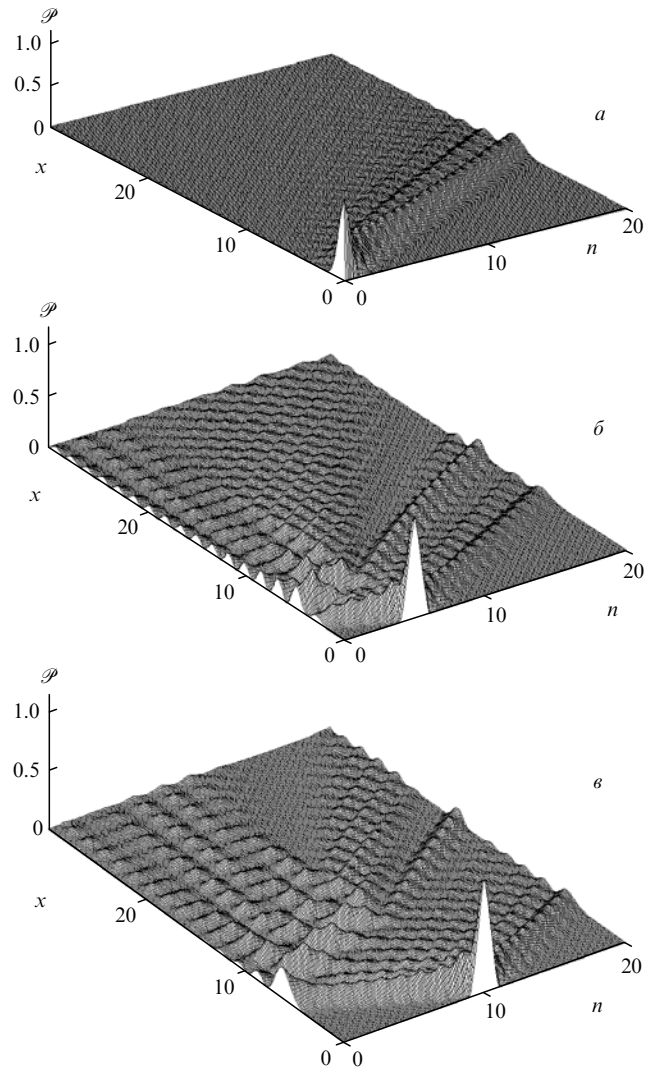


Рис.2. Пространственное распределение интенсивности излучения \mathcal{P} в световодах полубесконечного массива Чебышева II рода при накачке с торца нулевого (а), пятого (б) и десятого (в) световодов.

собой несколько гребней волн, амплитуды которых быстро убывают с ростом координаты x . Излучение быстро переходит от накачиваемого нулевого световода к световодам с большими значениями n , как бы отразившись от стенки массива (т. е. от нулевого световода). Еще сложнее пространственная структура поля при накачке в торец пятого (рис.2,б) и десятого (рис.2,в) световодов, что объясняется распространением и диффузией излучения. При накачке пятого световода после первых двух гребней волн наблюдается небольшой провал в пространственном распределении интенсивности при больших n . Протяженность этого провала увеличивается при накачке десятого световода, после которого формируются один ярко выраженный гребень с последующим коротким провалом и затем несколько гребней с монотонно убывающими с расстоянием амплитудами. Интересно также отметить, что при накачке пятого световода распределение поля в нулевом световоде радикально отличается от такового при накачке самого нулевого световода. Здесь совместное действие процессов распространения и диффузии влево с отражением от стенки системы приводит к сложной интерференционной структуре пространственного распределения поля с максимумами и минимумами на значительном расстоянии от переднего торца.

5. Массив Эрмита

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ ортогональны на интервале $(-\infty; +\infty)$ с весом $\sigma(x) = \exp(-x^2)$. Норма и старший коэффициент полиномов [31–36] $d_n = \sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}$, $k_n = 2^n$. По формуле (8) находим $r = \sqrt{2}$, $\kappa_n = \sqrt{n}$ и в соответствии с (5) строим решение при условии, что накачка системы осуществляется в нулевой световод ($f_n|_{x=0} = \delta_{n,0}$):

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) H_n(y) \exp(i\sqrt{2}xy) dy. \quad (19)$$

Интеграл легко вычисляется, и мы получаем

$$f_n(x) = \frac{i^n x^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (20)$$

Тогда интенсивность света в n -м световоде определяется выражением

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{x^{2n}}{n!} \exp(-x^2). \quad (21)$$

При заданном n максимум интенсивности приходится на точку с координатой $x = \sqrt{n}$, при этом максимальная интенсивность в n -м световоде массива

$$\mathcal{P}_{n \max} = \frac{n^n \exp(-n)}{n!}.$$

Легко получить решение для случая, когда накачка системы осуществляется через j -й световод. Тогда

$$f_n(x) = i^{n-j} \sqrt{\frac{j!}{n!}} x^{n-j} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) L_j^{n-j}(x^2), \quad n \geq j, \quad (22)$$

$$f_n(x) = i^{j-n} \sqrt{\frac{n!}{j!}} x^{j-n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) L_n^{j-n}(x^2), \quad n \leq j, \quad (23)$$

где $L_n^m(x)$ – полином Лагерра [31–36]. Используя (4), (22) и (23), легко получить выражение для интенсивности $\mathcal{P}_n(x)$ излучения. На рис.3,а представлено пространственное распределение интенсивности света $\mathcal{P}_n(x)$ в соответствии с (21) при накачке нулевого световода. Видно, что с ростом x излучение быстро перекачивается в световоды с увеличивающимся номером n . Процессы распространения и диффузии приводят к формированию пространственного распределения интенсивности в виде уединенного волнообразного профиля. Максимум этого профиля находится тем дальше от торца, чем выше номер n световода в массиве.

На рис.3,б,в представлены распределения полей при накачке пятого и десятого световодов. Видно, что при накачке световода с номером $j > 0$ структура поля в световодах с номером n от нуля до j достаточно сложная. В световоде с $n = 0$ распределение поля представляет собой один ярко выраженный максимум в точке с координатой $x = \sqrt{j}$, причем $\mathcal{P}_{0 \max} = j^j \exp(-j)/j!$. Амплитуда этого максимума убывает с ростом j по закону $\mathcal{P}_{0 \max} \sim j^{-1/2}$. С ростом номера световода n число максимумов распределения поля постепенно растет. Это обусловлено сложной интерференцией волн, идущих с j -го световода в направлении нулевого, и волн, отраженных от него. Однако при $n > j$ число максимумов пространственного

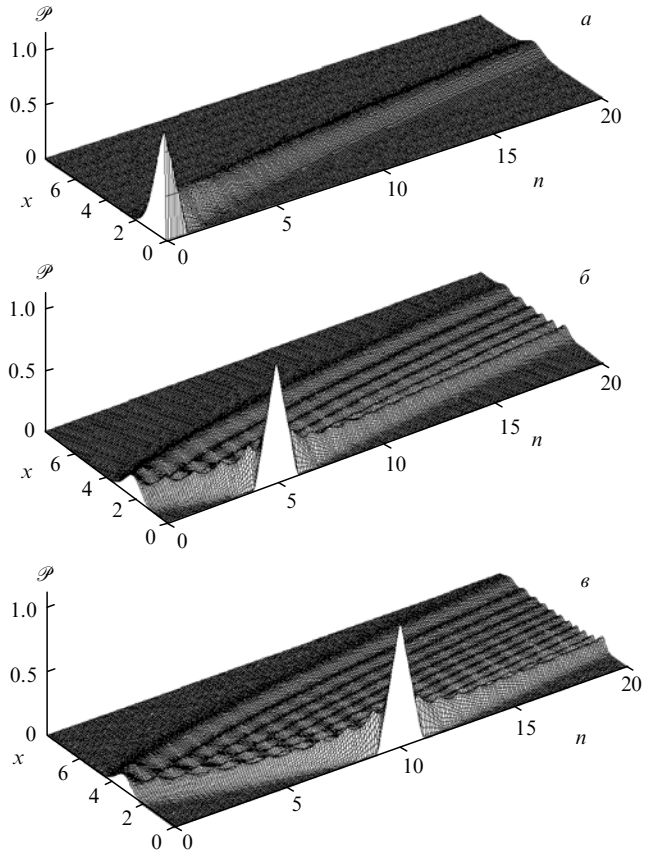


Рис.3. Пространственное распределение интенсивности излучения \mathcal{P} в световодах полубесконечного массива Эрмита при накачке с торца нулевого (а), пятого (б) и десятого (в) световодов.

распределения поля равно $j+1$ и, как это видно из рис.3,б, в, не зависит от n (при накачке пятого и десятого световодов образуются соответственно 6 и 11 максимумов интенсивности поля, которые смещаются в сторону больших n).

6. Массив Лежандра

Полиномы Лежандра $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$ с весом $\sigma(x) = 1$ и удовлетворяют рекуррентному соотношению $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) - (2n+1)xP_n(x) = 0$. Норма этих полиномов $d_n = \sqrt{2/(2n+1)}$, коэффициент при старшем члене $k_n = 2^n \Gamma(n + 1/2) / (\sqrt{\pi}n!)$. Тогда $r = \sqrt{3}$ и $\kappa_n = \sqrt{3n} / \sqrt{4n^2 - 1}$. С ростом n коэффициент связи κ_n асимптотически стремится к $\sqrt{3}/2$. Полагая, что накачивается только нулевой световод ($f_n|_{x=0} = \delta_{n,0}$), для интенсивности света в произвольном световоде получаем

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{3}x} J_{n+1/2}^2(\sqrt{3}x). \quad (24)$$

На рис.4 показан профиль пространственного распределения интенсивности, который имеет большое сходство с профилями, представленными на рис.2,а. С ростом x интенсивность излучения в нулевом световоде быстро убывает (пропорционально x^{-2}), поэтому ярко выражены только первые два максимума. С ростом x излучение быстро переходит в область световодов с большими n .

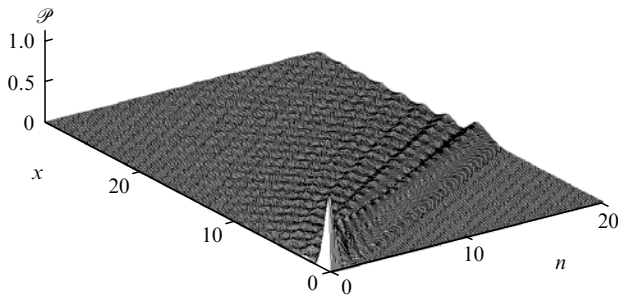


Рис.4. Пространственное распределение интенсивности излучения \mathcal{P} в световодах полубесконечного массива Лежандра при накачке с торца нулевого световода.

7. Массив Гегенбауэра

Ультрасферические полиномы Гегенбауэра $C_n^\lambda(x)$ ($\lambda > -1/2, n = 0, 1, 2, \dots$) ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$ с весом $\sigma(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$. Норма этих полиномов

$$d_n = \left[\frac{\sqrt{\pi}(2\lambda)_n \Gamma(\lambda + 0.5)}{(n + \lambda)n! \Gamma(\lambda)} \right]^{1/2},$$

коэффициент $k_n = 2^n(\lambda)_n/n!$, где $(\lambda)_n$ – символ Похгаммера [27], Γ – гамма-функция. Тогда в соответствии с (8) $r = \sqrt{2(\lambda + 1)}$,

$$\kappa_n = \left[\frac{n(n + 2\lambda - 1)(\lambda + 1)}{2(n + \lambda - 1)(n + \lambda)} \right]^{1/2}.$$

Константа связи κ_n с ростом n асимптотически стремится к значению $[(\lambda + 1)/2]^{1/2}$. При граничных условиях $f_n|_{x=0} = \delta_{n0}$ решение уравнения (2) имеет вид

$$f_n(x) = i^n 2^\lambda \Gamma(\lambda) \left[\frac{\lambda(n + \lambda)}{n!} (2\lambda)_n \right]^{1/2} \frac{J_{n+\lambda}[\sqrt{2(\lambda + 1)}x]}{[\sqrt{2(\lambda + 1)}x]^\lambda}, \quad (25)$$

а для интенсивности света в n -м световоде получаем

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{2^{2\lambda} [\Gamma(\lambda)]^2 \lambda(n + \lambda) (2\lambda)_n}{n!} \times \frac{1}{[\sqrt{2(\lambda + 1)}x]^{2\lambda}} J_{n+\lambda}^2[\sqrt{2(\lambda + 1)}x]. \quad (26)$$

Однопараметрическое семейство решений (25), (26) с параметром λ при $\lambda = 0, 1/2, 1, -1/2$ и ∞ переходит в известные решения. При $\lambda = 0$ полином Гегенбауэра переходит в полином Чебышева I рода $T_n(x) = (n/2 + \delta_{n0}) \times C_n^0(x), n = 0, 1, 2, \dots$; соответственно константа связи $\kappa_n = 1$ при $n = 1$ и $\kappa_n = 1/\sqrt{2}$ при $n = 2, 3, \dots$, а решение (25) переходит в (12). При $\lambda = 1/2$ полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Лежандра $P_n(x) = C_n^{1/2}(x)$, а решение (26) приводится к выражению (24). При $\lambda = 1$ ультрасферические полиномы переходят в полиномы Чебышева II рода $C_n^1(x) = U_n(x)$, при этом $\kappa_n = 1$, а решения (25) и (26) переходят в решения (15) и (16) соответственно.

Рассмотрим предел $\lambda \rightarrow \infty$. Из определения κ_n для массива Гегенбауэра следует $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \kappa_n = \sqrt{n}$. Используя асимптотику функции Бесселя $J_{n+\lambda}(\sqrt{2(\lambda + 1)}x)$ при больших значениях порядка и аргумента [31]

$$J_{n+\lambda}(\sqrt{2(\lambda + 1)}x)_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{[\sqrt{(\lambda + 1)/2}x]^{n+\lambda} \exp(-x^2/2)}{\lambda^{n+1} \Gamma(\lambda)}$$

и подставляя последнее выражение в (25), получаем (20).

При $\lambda = -1/2$ получаем известное решение, описывающее распространение света в направленном ответвителе, состоящем из двух идентичных световодов [23]. При этом $\kappa_n = [n(n - 2)/(2n - 3)(2n - 1)]^{1/2}$, откуда следует, что в такой системе $\kappa_1 = 1$, а $\kappa_2 = 0$. При возбуждении нулевого световода ($n = 0$) свет передается в первый световод ($n = 1$), но связь между первым и вторым световодами отсутствует, т. к. $\kappa_2 = 0$. Хотя константы связи κ_n для $n > 2$ отличны от нуля, тем не менее в силу эстафетной передачи возбуждения от одного световода к соседнему все световоды с $n \geq 2$ возбуждаться не будут и, следовательно, особенности распространения света в такой системе идентичны особенностям распространения света в двухканальном ответвителе. Действительно, подставляя в решение (25) $\lambda = -1/2$ и используя соотношения $(-1)_n = \delta_{n0} - \delta_{n1}, [(-1/2)(n - 1/2)(-1)_n]^{1/2} = (\delta_{n0} + \delta_{n1})/2$, а также явные выражения для функций Бесселя полуцелого порядка, получаем $f_n(x) = i^n [\delta_{n0} \cos(x) + \delta_{n1} \sin(x)]$, т. е. $f_0 = \cos(x), f_1 = i \sin(x)$, что совпадает с известными результатами [23].

8. Заключение

В данной работе получены точные аналитические решения бесконечной системы дифференциально-разностных уравнений, описывающих стационарное пространственное распределение амплитуд и интенсивностей полей в каждом световоде полубесконечного планарного массива идентичных световодов с определенной зависимостью констант связи между ближайшими соседними световодами от их номеров в массиве. Общим свойством всех рассмотренных массивов является то, что при накачке в торец одного из световодов массива излучение быстро передается световодам с большими номерами n . Особенности пространственного распределения поля излучения объясняются распространением и диффузией волн поперек массива, обусловленными связью между ближайшими световодами массива.

1. Otsuka K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **13**, 895 (1977).
2. Scifres D.R., Burnham R.D., Streifer W. *Appl. Phys. Lett.*, **33**, 1015 (1978); *IEEE J. Quantum Electron.*, **15**, 917 (1979).
3. Chinn S.R., Spiers R.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **20**, 358 (1984).
4. Somekh S., Garmire E., Yariv A. *Appl. Phys. Lett.*, **22**, 46 (1973).
5. Haus H.A., Molten-Orr L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **19**, 840 (1983).
6. Kuznetsov M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21**, 1893 (1985).
7. Molten-Orr L., Haus H.A. *Opt. Lett.*, **9**, 466 (1984); *Appl. Opt.*, **24**, 1260 (1985).
8. Syms R.R.A. *Appl. Opt.*, **25**, 724 (1986); *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**, 525 (1987).
9. Eyses L., Wintersteiner P. *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 1351 (1981).
10. Гончаров А.А., Свидзинский К.К., Сычугов В.А., Усевич Б.А. *Квантовая электроника*, **33**, 342 (2003); *Laser Phys.*, **13**, 1017 (2003).
11. Усевич Б.А., Сычугов В.А., Нурлигареев Д.Х., Голант К.М. *Оптика и спектроскопия*, **97**, 841 (2004).
12. Нурлигареев Д.Х., Голант К.М., Сычугов В.А., Усевич Б.А. *Квантовая электроника*, **35**, 917 (2005).
13. Pertsch T., Dannberg P., Elflein W., Brauer A. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4752 (1999).
14. Morandotti R., Peschel U., Aitchison J.S., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4756 (1999).
15. Christodoulides D.N., Lederer F., Silberberg Y. *Nature*, **424**, 817 (2003).

16. Peschel U., Pertsch T., Lederer F. *Opt. Lett.*, **23**, 1701 (1998).
17. Christodoulides D.N., Joseph R.I. *Opt. Lett.*, **13**, 794 (1988).
18. Aceves A.B., De Angelis C., Peschel T., et al. *Phys. Rev. E*, **53**, 1172 (1996).
19. Darmanyan S., Kobayakov A., Schmidt E., Lederer F. *Phys. Rev. E*, **53**, 3520 (1998).
20. Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3383 (1998).
21. Fleisher Y.W., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Nature*, **422**, 147 (2003).
22. Iwanov R., Schiek R., Stegeman G.I., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 113902 (2004).
23. Ярив А. *Квантовая электроника* (М.: Сов. радио, 1980).
24. Макаров А.А. *ЖЭТФ*, **72**, 1749 (1977).
25. Парамонов Г.К., Савва В.А. *ЖПС*, **33**, 56 (1980); **36**, 624 (1982); **39**, 762 (1983).
26. Самсон А.М., Савва В.А., Парамонов Г.К. *ЖПС*, **38**, 76 (1983).
27. Зеленков В.И., Савва В.А. *Докл. АН БССР*, **32**, 313 (1988); *Vesni Akad. nauk BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, **4**, 86 (1988); **2**, 65 (1989).
28. Савва В.А., Зеленков В.И., Мазуренко А.С. *Оптика и спектроскопия*, **74**, 949 (1993); *ЖПС*, **58**, 256 (1993).
29. Tsukada N., Gotoda M., Nunoshita M. *Phys. Rev. B*, **50**, 5764 (1994).
30. Tsukada N., Gotoda M., Nunoshita M., Nishino T. *Phys. Rev. B*, **52**, R17005 (1995).
31. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции* (М.: Наука, 1968).
32. Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
33. *Справочник по специальным функциям*. Под ред М. Абрамовица, И. Стигана (М.: Наука, 1973).
34. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены* (М.: Наука, 1979).
35. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
36. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева* (М.: Наука, 1983).
37. Корнев Б.Г. *Введение в теорию бесселевых функций* (М.: Наука, 1971).