

# Скалярная теория слабоконтрастных брэгговских волноводов

Д.В.Прокопович, А.В.Попов, А.В.Виноградов

*Предложен аналитический подход к синтезу оптимальной структуры квазипериодической оболочки световода и развит эффективный численный метод поиска комплексных собственных значений, соответствующих слабозатухающим брэгговским модам. Показано, что в предположении малых вариаций показателя преломления полная система уравнений Максвелла сводится к скалярному волновому уравнению, решаемому методом конечных разностей.*

**Ключевые слова:** волоконная оптика, брэгговские световоды, многослойны структуры.

## 1. Введение

Наряду с микроструктурированными полыми световодами и другими типами двумерных фотонно-кристаллических волноводов, брэгговские световоды (БС) используются в видимом и инфракрасном диапазонах для генерации и передачи электромагнитного излучения. Первоначальная идея полого БС была высказана в работе [1]. Практически её сложно реализовать из-за необходимости создания большого количества диэлектрических слоёв [2] либо периодических структур с контрастом показателя преломления  $\Delta n/n \sim 1$ , что трудно достижимо в большинстве технологий. С другой стороны, как показано в работах [3, 4], хорошей локализации моды и низких потерь можно добиться уже при небольшом числе слоёв, если показатель преломления сердцевинки мало отличается от показателя преломления брэгговской оболочки. Высокая добротность достигается при малом контрасте показателя преломления ( $\Delta n/n \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ ), что вызывает естественный интерес к более детальному изучению таких волноводов.

Анализ показывает, что свойства БС сильно зависят от периода профиля показателя преломления и от резкости границ слоёв. Существует технологическая возможность улучшения точности воспроизведения идеального теоретического профиля, влияющей на результирующие характеристики БС. В связи с этим возникают две математические задачи: найти оптимальный профиль показателя преломления при определённых технологических ограничениях и разработать эффективные аналитические и численные подходы для описания модовой структуры БС

с заданным профилем показателя преломления. Решению этих задач и посвящена настоящая работа.

## 2. Задача оптимизации многослойного зеркала

Оптимальное многослойное зеркало должно обеспечивать не только максимальный коэффициент отражения, но и быстрое спадание поля в периодической структуре, поскольку для решения практических задач желательно, чтобы число слоёв было наименьшим. Найдём оптимальный профиль периодического показателя преломления  $n(x) = n(x + A)$ , удовлетворяющий условию максимального затухания поля на периоде  $A$ . Трудность решения этой задачи заключается в том, что для произвольного  $n(x)$  невозможно выписать аналитическое решение дифференциального уравнения, к которому сводятся уравнения Максвелла в простейшем случае нормального падения плоской волны на многослойную структуру. Запишем это уравнение для поперечной составляющей напряжённости электрического поля  $E_y = u(x)$ :

$$u'' + k^2 n^2(x)u = 0, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число падающей волны. Оказывается, что решение Флоке  $u(x) = y(x) \exp(-\mu x)$ ,  $y(x) = y(x + 2A)$  можно построить в замкнутом виде и получить явную формулу для декремента затухания  $\mu A$  волны, введя параметризацию

$$k^2 n^2(x) = f(p), \quad (2)$$

где  $p = -u'/u$ , которая сводит (1) к уравнению первого порядка

$$p' = p^2 + f(p), \quad (3)$$

имеющему точное решение для произвольной функции  $f(p)$ :

$$x(p) = \int \frac{dp}{p^2 + f(p)} + \text{const.} \quad (4)$$

**Д.В.Прокопович.** Научный центр волоконной оптики, Россия, 119333 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: dvp@4ka.mipt.ru

**А.В.Попов.** Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В.Пушкова РАН, Россия, 142190 Троицк, Московская обл.; e-mail: popov@izmiran.ru

**А.В.Виноградов.** Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119992 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: vinograd@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 26 декабря 2006 г., после доработки – 20 февраля 2007 г.



Рис.1. Электрическое поле в слоистой структуре.

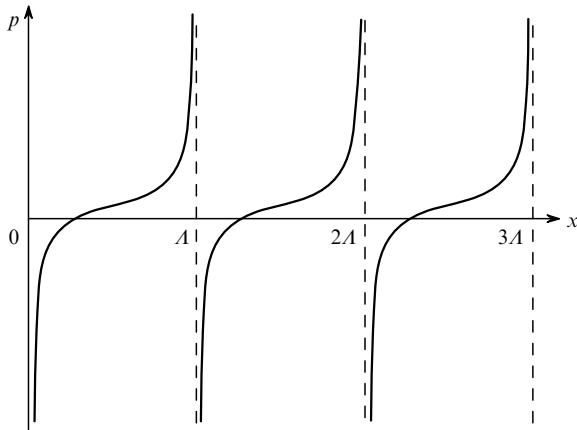


Рис.2. Логарифмическая производная  $p(x) = -u'/u$ .

Как видно из рис.1 и 2, замена (2) взаимно однозначна на промежутке между двумя последовательными нулями решения  $u(x)$ , где справедливо неравенство  $-\infty < p < +\infty$ . Длина этого промежутка

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + f(p)}. \tag{5}$$

Очевидно, что построенное таким образом решение

$$u(x) = C \exp\left(-\int p dx\right) = C \exp\left(-\int \frac{p dp}{p^2 + f(p)}\right) \tag{6}$$

можно периодически продолжить, сшивая в нулях  $u(x) = 0$  ( $x = L, 2L, \dots$ ), но при этом производная  $u'(x)$  окажется разрывной. Чтобы обеспечить гладкость решения, следует умножить  $u(x)$  на каждом следующем периоде на величину  $u'(L)/u'(0)$ , которая и определяет искомый декремент затухания

$$\mu L = \ln \frac{u'(0)}{u'(L)}.$$

Дифференцируя выражение (6), получаем

$$\mu L = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(p) dp}{p^2 + f(p)}. \tag{7}$$

На рис.1 наглядно показана связь механизма затухания поля с асимметрией  $n(x)$  на периоде  $L$ . Найдя явный вид (7) для декремента  $\mu L$ , легко сформулировать усло-

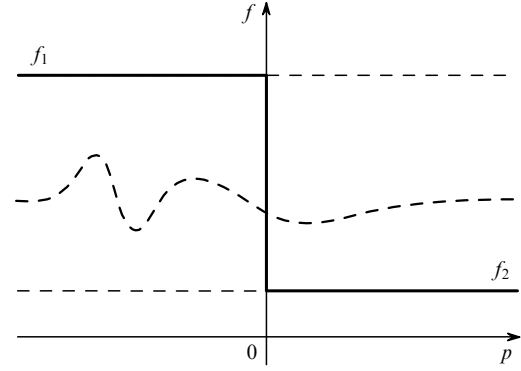


Рис.3. Произвольная функция  $f(p)$  (штриховая кривая) и оптимальное решение  $f(p)$  вариационной задачи (жирная кривая), соответствующие максимальному декременту затухания.

вие его максимизации, применяя классическую теорию вариационного исчисления. Поскольку уравнение Эйлера для интеграла (7) вырождается и не даёт никакого решения в классе гладких функций  $f(p)$ , мы преобразуем правую часть (7) к виду, не содержащему производной  $f'(p)$ :

$$\begin{aligned} \mu L &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \frac{2p + f'(p)}{p^2 + f(p)} dp + \int_{-L}^{+L} \frac{p dp}{p^2 + f(p)} \right] \\ &= \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p dp}{p^2 + f(p)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из физических соображений ясно, что функция  $f(p) = k^2 n^2(x)$  ограничена и положительна. Положим, что  $f_2 \leq f(p) \leq f_1$ ,  $f_1, f_2 > 0$  (рис.3). Область значений подынтегрального выражения в формуле (8) ограничена кривыми, построенными для постоянных  $f_1$  и  $f_2$  и изображенными на рис.4. Видно, что максимум декремента затухания получается при интегрировании ступенчатой функции

$$f(p) = \begin{cases} f_1, & p < 0, \\ f_2, & p > 0, \end{cases} \quad 0 < f_2 < f_1. \tag{9}$$

Отсюда с учётом (4), (6) находится оптимальный профиль показателя преломления

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & 0 < x < l_1, \\ n_2, & l_1 < x < l_1 + l_2 = L, \end{cases}$$

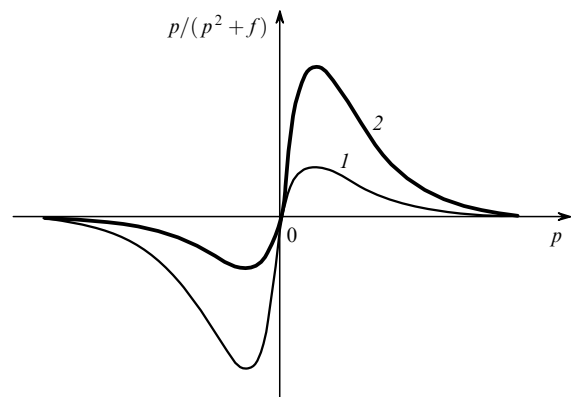


Рис.4. Вид функции  $p/(p^2 + f)$  при  $f(p) = f_1$  (1) и  $f(p) = f_2$  (2), а также оптимальное значение подынтегрального выражения в (8) (жирная кривая).

где

$$l_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{p^2 + f_1} = \frac{\pi}{2kn_1}, \quad l_2 = \int_0^{-\infty} \frac{dp}{p^2 + f_2} = \frac{\pi}{2kn_2}, \quad (10)$$

и решение  $u(x)$  (см. рис.1). Максимальный декремент вычисляется по формуле (8):

$$\max(\mu A) = \ln \frac{n_1}{n_2}. \quad (11)$$

Профиль показателя преломления (10) хорошо известен в оптике и соответствует так называемой четвертьволновой пластинке [5]. Таким образом, мы показали, что четвертьволновая пластинка обеспечивает абсолютный максимум декремента затухания не только для ступенчатых структур [5], но и для произвольного периодического профиля  $n(x)$ .

На практике резкие границы между слоями технологически не могут быть реализованы, но описанный выше метод применим и к задаче максимизации интеграла (8) с дополнительными ограничениями на производную показателя преломления. Так, например, если потребовать, чтобы было удовлетворено условие

$$\left| \frac{dn^2}{dx} \right| = \frac{1}{k^2} |f'(p)| [p^2 + f(p)] < \text{const}, \quad (12)$$

то, как показывает анализ, максимум декремента  $\mu A$  будет достигаться на кусочно-линейной функции  $n(x)$  (т. е. на трапециевидальном профиле) и выразится в терминах функций Эйри.

В цилиндрическом случае можно получить уравнение, аналогичное (3), введя параметризацию  $p = -\nabla u/u$ . Тогда

$$\nabla p = p^2 - \frac{\Delta u}{u} = p^2 + f(r, p). \quad (13)$$

Если воспользоваться свойствами дивергенции в полярных координатах и обозначить  $r$ -ю компоненту вектора  $p$  как  $p_r = p(r)$  ( $p_\phi = 0$ ), то уравнение (13) перейдет в уравнение

$$p' = \frac{p}{r} = p^2 + f(r, p). \quad (14)$$

Сделав замену  $\tilde{p} = p - 1/(2r)$  и  $\tilde{f}(\tilde{p}) = f(r, p) + 1/(4r^2)$ , получим уравнение типа (3)

$$\tilde{p}' = \tilde{p}^2 + \tilde{f}(\tilde{p}) \quad (15)$$

и, таким образом, цилиндрическая задача будет сведена к одномерной.

Поскольку волновое поле в периодической оболочке планарного брэгговского волновода описывается уравнением вида (1)

$$u'' + [k^2 n^2(x) - \beta^2] u = 0, \quad (16)$$

где  $\beta$  – продольное волновое число распространяющейся моды  $E_y = u(x) \exp(i\beta z)$ , полученный выше результат немедленно дает оптимальный профиль  $n(x)$ , обеспечивающий максимальную локализацию моды в сердечнике

волновода. Заменяв  $n(x)$  эффективным показателем преломления  $[n^2(x) - \beta^2/k^2]^{1/2}$ , получим из (10) условия на толщины слоёв периодической структуры оболочки в зависимости от показателей преломления  $n_1, n_2$  и постоянной распространения  $\beta$ :

$$l_1 = \frac{\pi}{2(k^2 n_1^2 - \beta_N^2)^{1/2}}, \quad l_2 = \frac{\pi}{2(k^2 n_2^2 - \beta_N^2)^{1/2}}. \quad (17)$$

Дискретный набор оптимальных значений  $\beta_N$  определяется условием обращения в нуль амплитуды поля на внутренней границе оболочки и для симметричной моды  $u(x) = \cos[x(k^2 n_0^2 - \beta_N^2)^{1/2}]$  имеет вид

$$\beta_N^2 = k^2 n_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \left( N + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (18)$$

где  $a$  – полутолщина сердцевинки волновода;  $n_0$  – показатель преломления сердцевинки;  $N$  – номер распространяющейся моды.

Рассматривая реальный БС, мы сталкиваемся с рядом проблем, усложняющих его оптимизацию, таких как технологические ограничения, связанные с изготовлением заготовки и вытяжкой волокна, цилиндрическая, а не планарная структура профиля показателя преломления, необходимость исследования характеристик сигнала в широком диапазоне длин волн. В связи с этим важной задачей является моделирование модовой структуры, затухания и дисперсии для БС с произвольным (теоретически заданным или экспериментально измеренным) профилем показателя преломления.

### 3. Уравнение для плоского волновода с вытекающими модами

При разработке численного метода расчета брэгговских волноводов целесообразно первоначально исследовать плоскую модель волновода, а затем обобщить применённый метод уже на реальный БС. Рассмотрим плоский волновод с периодически меняющейся диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = n^2(x)$  (рис.5).

Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$  и имеет только одну компоненту напряжённости электрического поля  $E_y = E(x, z)$ . Из уравнений Максвелла получаем волновое уравнение для  $E$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 n^2 E = 0, \quad (19)$$

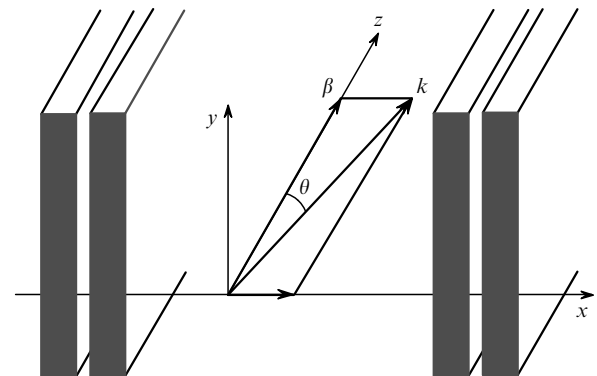


Рис.5. Схематическое изображение плоского волновода.

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число волны в свободном пространстве. Решение уравнения (19) будем искать в виде бегущей волны  $E(x, z) = u(x) \exp(i\beta z)$ . При этом возникает приведённое выше уравнение (16). Показатель преломления удобно представить в виде, определяемом соотношением  $n^2(x) = \tilde{n}^2[1 + \alpha(x)]$ , где  $\alpha(\infty) = 0$ ,  $\tilde{n} = n(\infty)$ . Если обозначить продольный волновой вектор как  $\beta = \tilde{k}(1 - \gamma^2)^{1/2}$ , где  $\tilde{k} = k\tilde{n}$ , а  $\gamma = \sin \theta$  – синус угла скольжения вытекающей моды (рис.5), то волновое уравнение (16) примет несколько другой, удобный для нас вид:

$$u'' + \tilde{k}^2[\alpha(x) + \gamma^2]u = 0. \tag{20}$$

Граничными условиями для четного решения уравнения (20) являются обращение в нуль производной и излучательное поведение на бесконечности:

$$u'(0) = 0, \quad u(x) \propto T \exp(i\tilde{k}\gamma x) \quad (x \rightarrow \infty). \tag{21}$$

Решая уравнение (20) с граничными условиями (21), получим спектр мод рассматриваемого планарного БС, т.е. дискретный набор собственных значений  $\gamma$  и собственных функций  $u(x; \gamma)$ . Величины  $\gamma$  и  $\beta$ , вообще говоря, комплексны, и если обозначить  $\beta = \beta' + i\beta''$ , а  $\gamma = \gamma' - i\gamma''$ , то в отсутствие поглощения ( $\text{Im } n = 0$ ) будет иметь место равенство  $\beta'\beta'' = \tilde{k}^2\gamma'\gamma''$ . Физический смысл имеют те моды, для которых  $\beta' \geq 0$  (т.е. распространяющиеся в положительном направлении оси  $z$ ) и  $\beta'' \geq 0$  (т.е. не возрастающие вдоль оси волновода), поэтому из условия

$$\beta' \geq 0, \quad \beta'' \geq 0 \tag{22}$$

следует, что  $\gamma'\gamma'' \geq 0$ , т.е.  $\gamma'$  и  $\gamma''$  имеют одинаковые знаки. Таким образом, пропорциональная  $\exp(i\tilde{k}\gamma x)$  вытекающая мода, бегущая в положительном направлении поперечной координаты  $x$  (при этом  $\gamma' \geq 0$ ), будет возрастать на бесконечности (поскольку  $\gamma'' \geq 0$ ). Брэгговскими модами назовём локализованные в сердцевине слабозатухающие решения, такие, что выполняется соотношение

$$|\beta''| \ll |\beta'|. \tag{23}$$

Потери, которые в волоконной оптике принято выражать в дБ/км, таковы:

$$A = \frac{20 \times 10^9}{\log 10} \beta'', \tag{24}$$

где  $\beta''$  измеряется в мкм<sup>-1</sup>.

Существенными характеристиками световода являются зависимость потерь брэгговской моды от длины волны и хроматическая дисперсия [6]

$$D = -\frac{k^2}{2\pi c} \frac{\partial^2 \beta'}{\partial k^2}, \tag{25}$$

где  $D$  измеряется в пс·нм<sup>-1</sup>·км<sup>-1</sup>.

#### 4. Конечно-разностная схема решения краевой задачи

Построим разностную схему для решения краевой задачи (20), (21). Сделаем замену  $u(x) = w(x) \exp(i\tilde{k}\gamma x)$ , и тогда уравнение (20) примет следующий вид:

$$w'' + 2i\tilde{k}\gamma w' + \tilde{k}^2\alpha(x)w = 0. \tag{26}$$

Нужно отметить, что, в отличие от исходного уравнения (20), спектральный параметр  $\gamma$  входит в уравнение (26) линейным образом. Граничные условия (21) преобразуются к виду

$$w'(0) + i\tilde{k}\gamma w(0) = 0, \quad w'(R) = 0, \tag{27}$$

где  $R$  – линейный размер области, на котором строится конечно-разностная схема. Параметр  $\gamma$  в (26) и в (27) входит линейно, что существенно упрощает формулировку задачи на собственные значения. Расширив эту область ( $x_m = mh \in [0; R]$ ,  $h$  – шаг сетки,  $m = 0, 1, \dots, M$ ) для уравнения (26) добавлением фиктивных узлов с  $m = -1, M + 1$ , получим разностный аналог уравнения (26):

$$\frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{h^2} + i\tilde{k}\gamma \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{h} + \tilde{k}^2\alpha_m w_m = 0, \tag{28}$$

где  $m = 0, 1, \dots, M$ ;  $w_m = w(x_m)$ ;  $\alpha_m = \alpha(x_m)$ . Уравнение (28) можно переписать в векторном виде:

$$A\vec{w} = i\mu B\vec{w}, \tag{29}$$

где введены обозначения  $\mu = \tilde{k}h\gamma$ ,  $q_m = \tilde{k}^2h^2\alpha_m$ ,  $\vec{w} = \{w_m\}$  и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & q_1 - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 - 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{M-1} - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & q_M - 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеющие размерность  $(M + 1) \times (M - 1)$ . Таким образом, решение дифференциального уравнения (26) свелось к линейно-алгебраической задаче на собственные значения. Уравнение (29) имеет  $M + 1$ -решение  $(\mu_t, \{w_m^{(t)}\})$  ( $t = 0, 1, \dots, M$ ) (конечно-разностные моды). Нужные нам моды дифференциального уравнения (26) выделяются из всего набора решений условием существования конечного предела  $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma = \lim_{h \rightarrow 0} (\mu/kh)$  при стремлении к нулю шага сетки  $h$ . Для нахождения брэгговских мод используем критерий малости потерь (23), дополненный условием локализации амплитуды моды в сердцевине волновода

$$\int_0^a |u(x)|^2 dx > \int_a^R |u(x)|^2 dx. \tag{30}$$

Результаты численного решения уравнения (29) представлены в виде поперечной структуры моды и зависимости излучательных потерь от длины волны на рис.6 и 7 для

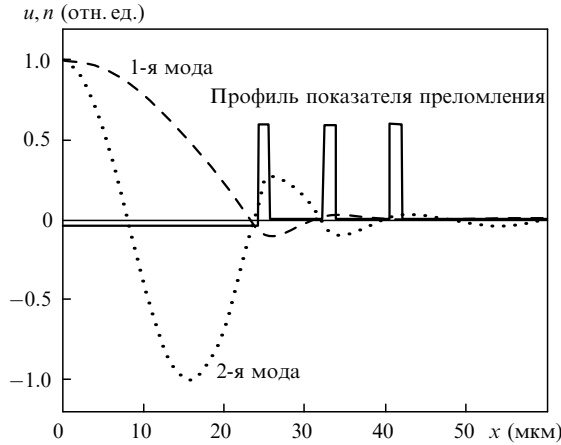


Рис.6. Результаты численного решения уравнения (29) – амплитуда поля двух низших брэгговских мод при  $\lambda = 1$  мкм.

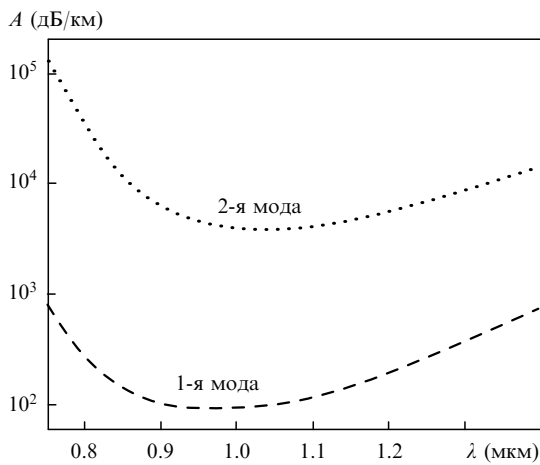


Рис.7. Результаты численного решения уравнения (29) – зависимости потерь в плоском волноводе от длины волны.

волновода со следующими параметрами профиля показателя преломления:  $a = 24.23$  мкм,  $l_1 = 1.4$  мкм,  $l_2 = 6.75$  мкм,  $l_3 = 1.47$  мкм,  $l_4 = 6.66$  мкм,  $l_5 = 1.49$  мкм,  $n_0 = 1.4485$ ,  $n_1 = 1.459$ ,  $n_2 = 1.449$ ,  $n_3 = n_1$ ,  $n_4 = n_2$ ,  $n_5 = n_1$ ,  $n_{\text{clad}} = n_2$ .

### 5. Сравнение конечно-разностной схемы с методом матрицы перехода для плоского периодического волновода

Для проверки конечно-разностного метода рассмотрим слоистую периодическую структуру с постоянным показателем преломления каждого слоя. В этом случае строгое решение краевой задачи (20), (21) может быть найдено классическим методом матрицы перехода [7]. Переход от слоя к слою выражается законом Снеллиуса:  $n_m \cos \theta_m = \tilde{n} \cos \theta$ , где  $\theta_m$  – угол скольжения плоских волн в  $m$ -м слое, а  $\theta$  – угол выхода волны в оболочку. В предположении слабого оптического контраста  $n^2(x) = \tilde{n}^2[1 + \alpha(x)]$ ,  $|\alpha(x)| \ll 1$ , упрощённая форма закона Снеллиуса имеет вид  $\theta_m^2 = \theta^2 + \alpha_m$ . Общее решение уравнения (20) для амплитуды поля  $u(x)$  и его производной  $u'(x)$  можно в явном виде выписать для каждого слоя. Учитывая непрерывность тангенциальных компонент поля  $E_y = u(x) \times \exp(i\beta z)$  и  $H_z = (ik)^{-1}u'(x) \exp(i\beta z)$  на границах раздела, получаем рекуррентное соотношение в матричном виде:

$$U_m = \|Z_m\| U_{m-1}, \tag{31}$$

где

$$\|Z_m\| = \begin{vmatrix} \cos(\tilde{k}\theta_m l_m) & -\frac{\theta}{\theta_m} \sin(\tilde{k}\theta_m l_m) \\ \frac{\theta_m}{\theta} \sin(\tilde{k}\theta_m l_m) & \cos(\tilde{k}\theta_m l_m) \end{vmatrix},$$

$$U_m = \begin{vmatrix} u_m \\ -\frac{u'_m}{k\theta_m} \end{vmatrix};$$

$l_m$  – толщина  $m$ -го слоя. Распределение поля в сердцевине  $u(x) = \cos(\tilde{k}\theta_0 x)$  при  $0 < x < x_a$  соответствует начальному условию

$$U_{-1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Используя формулу (31), получаем выражение для поля  $U_M$  на внешней стороне периодической структуры. Сшивая его с волной, уходящей в оболочку, приходим к дисперсионному уравнению

$$\frac{u'_m(\theta)}{u_m(\theta)} = -ik\theta. \tag{32}$$

Из уравнения (32) находим угол  $\theta$ , а с ним и продольную компоненту волнового вектора  $\beta = \tilde{k} \cos \theta$ , откуда определяются потери мод. На рис.8 приведены зависимости потерь  $A(\lambda)$  в волноводе, вычисленные при помощи метода матрицы перехода и конечно-разностной схемы (параметры волновода см. в разд.4). Видно, что разностный метод даёт удовлетворительное совпадение с «точным» решением, полученным из дисперсионного уравнения (32). Некоторое различие объясняется вычислительными погрешностями [8, 9], возникающими при использовании обоих методов для расчета весьма малой мнимой части собственных значений  $\gamma$  ( $|\gamma''| \ll |\gamma'|$ ). При необходимости точность вычисления потерь может быть повышена использованием интегрального равенства

$$\gamma'' = i\gamma' \frac{|w(R)|^2}{\int_0^R (ww'^* - w'w^*) dx}, \tag{33}$$

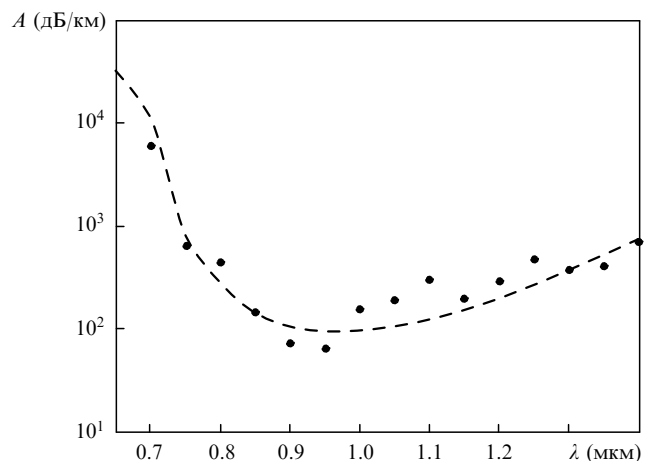


Рис.8. Потери в плоском волноводе, вычисленные методом конечных разностей (кривая) и методом матрицы перехода (точки).

которое легко находится стандартным способом из уравнения (26).

**6. Уравнения Максвелла и скалярное приближение для БС**

Рассмотрим цилиндрический волновод с радиальным профилем диэлектрической проницаемости  $\epsilon(r)$ . Электромагнитное поле бегущей волны будем искать в виде  $E(r, \varphi) \exp(i\beta z)$  и  $H(r, \varphi) \exp(i\beta z)$ . Из уравнений Максвелла несложно получить систему волновых уравнений в цилиндрических координатах для поперечных составляющих  $E_r$  и  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) \frac{\partial E_r}{\partial r} + \left[k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)'\right] E_r \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \left[k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{1}{r^2}\right] E_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi^2} \\ = -\left(\frac{2}{r^2} + \frac{\epsilon'}{r\epsilon}\right) \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{34}$$

Векторные угловые гармоники  $E_r = P_l(r) \sin l\varphi$  и  $E_\varphi = Q_l(r) \cos l\varphi$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) определяются системой связанных уравнений

$$\begin{aligned} P_l'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) P_l' + \left[k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{l^2 + 1}{r^2} + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)'\right] P_l \\ = -\frac{2l}{r^2} Q_l, \\ Q_l'' + \frac{1}{r} Q_l' + \left(k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{l^2 + 1}{r^2}\right) Q_l = -l \left(\frac{2}{r^2} + \frac{\epsilon'}{r\epsilon}\right) P_l. \end{aligned} \tag{35}$$

Высокодобротные брэгговские моды близки по форме к модам полого металлического волновода [10], в чём можно убедиться, сделав замену

$$\begin{aligned} P_l &= u_l(r) + v_l(r), \\ Q_l &= -u_l(r) + v_l(r). \end{aligned} \tag{36}$$

Функции  $u_l(r)$  и  $v_l(r)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} u_l'' + \frac{1}{r} u_l' + \left[k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{(l-1)^2}{r^2}\right] u_l = -\frac{1}{2r^l} \left(\frac{r^l \epsilon'}{\epsilon} P_l\right)', \\ v_l'' + \frac{1}{r} v_l' + \left[k^2 \epsilon - \beta^2 - \frac{(l+1)^2}{r^2}\right] v_l = -\frac{r^l}{2} \left(\frac{\epsilon'}{r^l \epsilon} P_l\right)'. \end{aligned} \tag{37}$$

Эта система распадается при  $\epsilon'(r) = 0$  (например, в однородной сердцевине брэгговского волновода) на два независимых уравнения, а в интересующем нас случае малого контраста ( $\epsilon = \bar{n}^2[1 + \alpha(r)]$ ,  $|\alpha(r)| \ll 1$ ) уравнения системы (37) слабо связаны в его квазипериодической оболочке. В нулевом приближении правой частью первого уравнения (37) можно пренебречь; при этом возникают две независимые серии собственных значений  $\beta_{ln}$ , соответствующих собственным функциям

$$\begin{pmatrix} u_{ln} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ v_{ln} \end{pmatrix},$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Поправки, учитывающие слабую связь уравнений (37), могут быть найдены методами теории возмущений [11].

Декартовы компоненты поперечного электрического поля имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &= u_l \sin(l-1)\varphi + v_l \sin(l+1)\varphi, \\ E_y &= u_l \cos(l-1)\varphi - v_l \cos(l+1)\varphi. \end{aligned} \tag{38}$$

В наиболее интересном случае  $l = 1$  возникает мода, имеющая осесимметричное распределение поля с малой «примесью» квадрупольной гармоники:  $E_y = u_1(r) - v_1(r) \times \cos 2\varphi$ ,  $E_x = v_1(r) \sin 2\varphi$  (здесь  $|v_1| \ll |u_1|$ ). Пренебрегая квадрупольными компонентами и считая, что  $u_1(r) = u(r)$ , приходим к скалярному волновому уравнению

$$u'' + \frac{1}{r} u' + \tilde{k}^2 [\alpha(r) + \gamma^2] u = 0, \tag{39}$$

описываемому в приближении малого контраста ( $|\epsilon'/\epsilon| \ll 1$ ) линейно поляризованные моды брэгговского волновода. В однородной сердцевине регулярным решением (39) является функция Бесселя нулевого порядка  $u(r) = J_0[\tilde{k}r(\alpha_0 + \gamma^2)^{1/2}]$ , имеющая максимум на оси волновода, откуда следует первое граничное условие

$$u'(0) = 0. \tag{40}$$

В однородной внешней оболочке решение уравнения (39) ведёт себя как функция Ханкеля первого рода, т. е.  $u(r) = TH_0^{(1)}(\tilde{k}\gamma r)$ ,  $T = \text{const}$ . Исключая коэффициент  $T$ , получаем второе граничное условие

$$\frac{u'(R)}{u(R)} = -\tilde{k}\gamma \frac{H_1^{(1)}(\tilde{k}\gamma R)}{H_0^{(1)}(\tilde{k}\gamma R)}. \tag{41}$$

Краевая задача (39)–(41) аналогична задаче на собственные значения, рассмотренной в разд.3 при изучении мод планарного брэгговского волновода. Отличие состоит в дополнительном сингулярном члене  $u'/r$  в уравнении (39) и в более сложном виде второго граничного условия (41). Подстановка  $u(r) = w(r) \exp(i\tilde{k}\gamma r)$  и замена в граничном условии (41) функций Ханкеля их асимптотикой приводит краевую задачу к виду

$$w'' + \frac{1}{r} w' + 2i\tilde{k}\gamma \left(w' + \frac{w}{2r}\right) + \tilde{k}^2 \alpha w = 0, \tag{42}$$

$$w'(0) = -i\tilde{k}\gamma w(0), \quad w'(R) \approx -\frac{1}{2R} w(R),$$

содержащему, в отличие от (39),  $\gamma$  в первой степени. Уравнение в (42) допускает простую конечно-разностную аппроксимацию и решается стандартными методами линейной алгебры, аналогично решению рассмотренного выше уравнения (29).

На рис.9 и 10 представлены результаты численного моделирования амплитуды моды и радиальных потерь для реального световода БС-541, изготовленного в Научном центре волоконной оптики [12]. Первоначально сравнение теоретического и измеренного спектров потерь

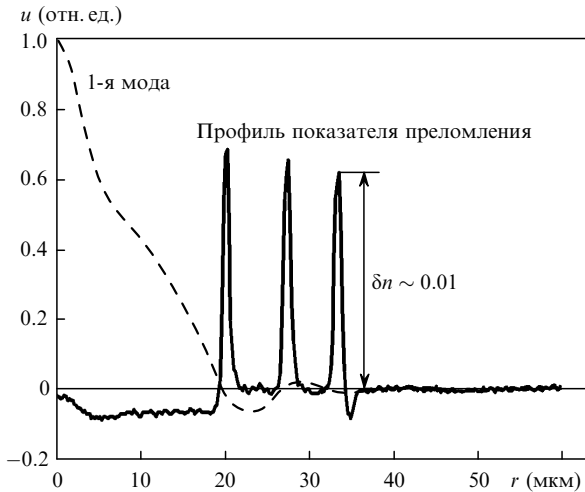


Рис.9. Амплитуда  $u(r)$  поля 1-й брэгговской моды для БС без полимерной оболочки при  $\lambda = 0.9$  мкм.

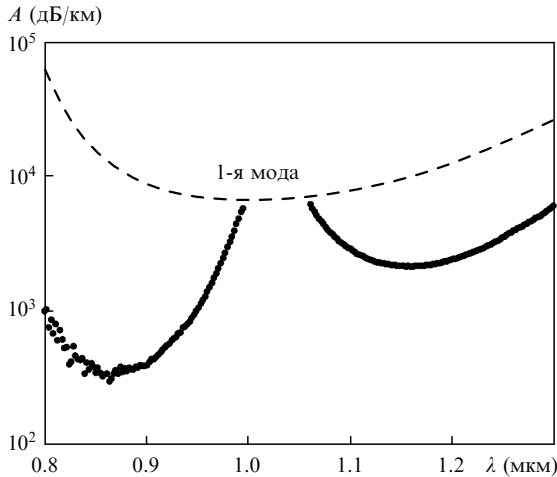


Рис.10. Зависимость потерь от длины волны для БС без полимерной оболочки: численный расчёт (штриховая кривая) и эксперимент (кривая из точек) [12].

показывало довольно сильное различие результатов вычислений и эксперимента (рис.10). Как было отмечено в недавней работе [13], это различие объясняется влиянием полимерной оболочки световода, приводящей к допол-

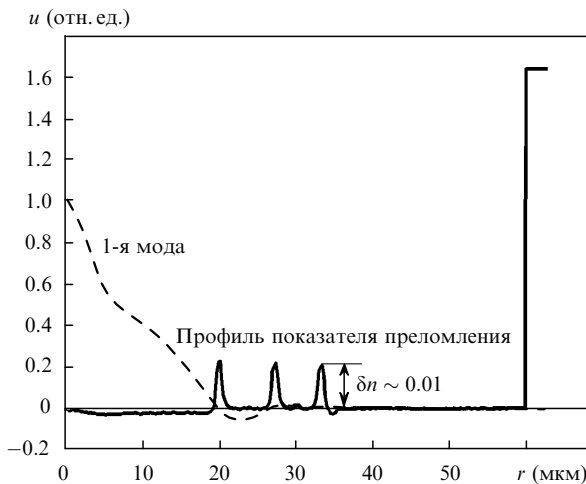


Рис.11. Амплитуда  $u(r)$  поля 1-й брэгговской моды для БС с полимерной оболочкой при  $\lambda = 0.9$  мкм.

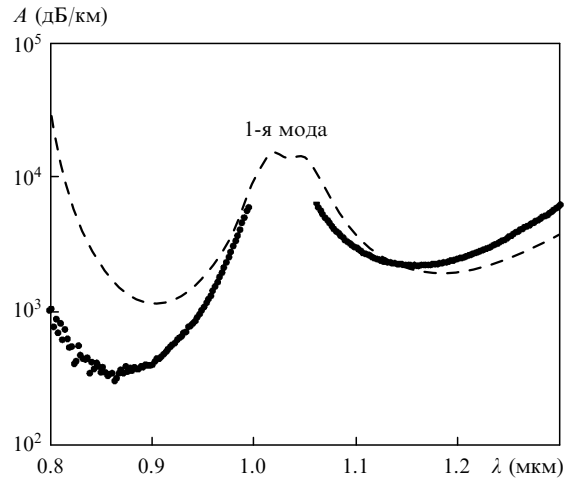


Рис.12. Зависимость потерь от длины волны для БС с полимерной оболочкой: численный расчёт (штриховая кривая) и эксперимент (кривая из точек) [12].

нительным резонансным эффектам. Наши вычисления подтверждают этот вывод. На рис.11, 12 иллюстрируются результаты расчета 1-й брэгговской моды и спектра её потерь для того же световода, окружённого защитной оболочкой с высоким показателем преломления ( $n_{pol} = 1.52$ ). Видно, что при практически неизменном распределении поля в сердечнике при  $\lambda = 0.9$  мкм потери на этой длине волны уменьшились почти на порядок, в то время как при  $\lambda = 1.038$  мкм вместо минимума потерь наблюдался локальный максимум. Этот максимум можно объяснить перетеканием энергии в кольцевую моду, сосредоточенную между брэгговскими кольцами и полимерной оболочкой и имеющую большие излучательные потери (рис.13). Качественно рассчитанный спектр потерь хорошо согласуется с результатами эксперимента. Для получения полного количественного совпадения требуются более точные данные о профиле показателя преломления и материальных потерях в оболочке.

На рис.14 показана волновая дисперсия, рассчитанная для световода БС-541. Видно, что дисперсия волновода без оболочки невелика и линейно растёт в широком диапазоне длин волн. Влияние полимерной оболочки проявляется в резком росте дисперсии и смене её знака в области резонансного максимума потерь.

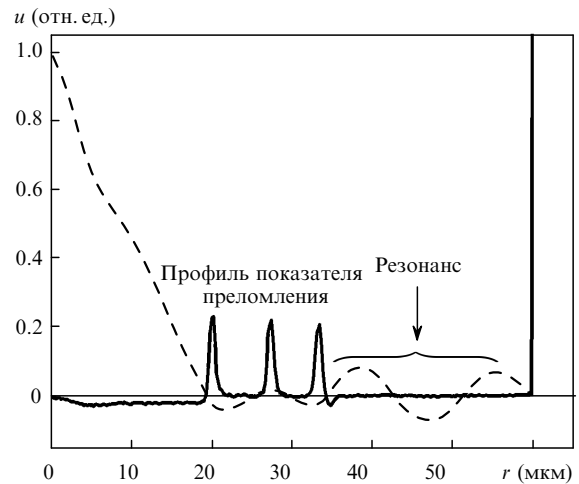


Рис.13. Резонансный эффект, возникающий в области между брэгговскими кольцами и полимерной оболочкой при  $\lambda = 1.038$  мкм.

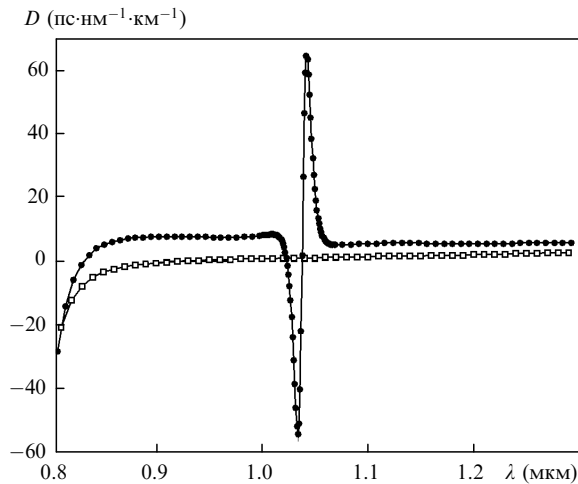


Рис.14. Волновая дисперсия  $D$ , рассчитанная по формуле (25) для реального световода BC-541 без оболочки (светлые точки) и с полимерной оболочкой (тёмные точки).

## 7. Выводы

Предложен аналитический подход к задаче оптимизации многослойного зеркала. Показано, что набор четвертьволновых слоёв обеспечивает абсолютный максимум декремента затухания не только для ступенчатых структур, но и для произвольного периодического профиля показателя преломления.

Выполнено моделирование реальных брэгговских световодов, основанное на численном решении скалярного волнового уравнения с условием излучения на бес-

конечности. Найден полный комплексный спектр мод БС, описывающий направляемые и вытекающие моды. Разработанный конечно-разностный метод расчёта мод сводит краевую задачу к задаче на собственные значения, решение которой выполняется стандартными методами линейной алгебры.

Показано, что для брэгговских световодов с малыми вариациями показателя преломления периодической оболочки скалярная аппроксимация уравнений Максвелла в цилиндрических координатах обеспечивает хорошее согласование с экспериментальными результатами.

Авторы благодарны К.М.Голанту и Ю.А.Успенскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-02-01244-а).

1. Yeh P., Yariv A., Marom E. *J. Opt. Soc. Am.*, **68**, 1196 (1978).
2. Popov A.V., Vinogradov A.V., Fechtchenko R.M., et al. *Proc. Conf. ICTON'2003* (Warsaw, 2003, v. 1, p. 206).
3. Fevrier S., Viale S., Gerome F., et al. *Electron. Lett.*, **39**, 1240 (2003).
4. Fevrier S., Jamier R., Blondy J.M., et al. *Proc. 31-th Conf. ECOC'2005* (Glasgow, UK, 2005, th 4.4.3).
5. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973, гл. 1).
6. Ramaswami R., Sivarajan K. *Optical Networks: A Practical Perspective* (London: Acad. Press, 1998).
7. Yeh P. *Optical Waves in Layered Media* (New York: Wiley, 1988).
8. Mayer A., Vigneron J. *Phys. Rev. E*, **59**, 4659 (1999).
9. Голант Е.И., Голант К.М. *ЖТФ*, **76**, 100 (2006).
10. Johnson S., Ibanescu M., Skorobogatiy M., et al. *Opt. Express*, **9**, 748 (2001).
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1989).
12. Jamier R., Viale P., Fevrier S., et al. *Tech. Dig. OFC/NFOEC'2006* (Anaheim, Cal., USA, 2006).
13. Uspenskii Yu.A., Likhachev M.E., Semjonov S.L., et al. *Opt. Lett.*, **32**, 1202 (2007).