PACS 03.67.Hk; 03.67.Mn

Кутриты в многочастичных системах

В.Н.Горбачев, А.И.Трубилко

Рассмотрена эволюция сложных составных квантовых систем, которые могут быть сведены к системам с небольшой размерностью гильбертова пространства (типа кутрита, кукварта и т. п). В случае взаимодействия ансамбля двухуровневых атомов со светом найдены условия, при которых возникает кутрит, сформированный из состояний света и атомов. Обсуждаются свойства и возможные применения кутрита на основе фоковских состояний света, где два фотона распределены по трем модам. Показано, что это состояние обладает неклассической статистикой фотонов, является перепутанным и может быть использовано как квантовый канал для телепортации, плотного кодирования и распределения ключа.

***Ключевые слова**: многочастичные системы, перепутанные состояния, квантовые коммуникации.*

1. Введение

Кутрит – система с тремя состояниями, составленная из нескольких частиц, хорошо известен в квантовой оптике. Его, например, образуют два бифотона, скомпонованные из поляризованных квантов света. Такое состояние продемонстрировано в эксперименте [1] и представляет интерес для задачи распределения ключа в квантовой криптографии [2]. В квантовой теории информации основным элементом является кубит, т. е. квантовая система с двумя состояниями. Однако использование систем большей размерности, таких как кутрит, кукварт и другие, может привести к расширению возможностей при решении задач квантовой передачи информации и др. Этим и определяется интерес к изучению методов генерации и свойств высокоразмерных состояний квантовых систем [4].

Состояние кутрита может быть перепутанным, что необходимо для решения задач квантовых коммуникаций, таких как телепортация, плотное кодирование, квантовое распределение ключа. Поэтому свойства, способы генерации и особенности применения кутритов интересны как с теоретической, так и с практической точки зрения и интенсивно изучаются. В частности в [5] обсуждались характеристики, или меры перепутанности трехуровневых систем, в [6] была введена геометрическая мера для трехчастичных чистых состояний. Генерация и восстановление (томография) состояния кутрита на основе экспериментальных характеристик для бифотонных полей были проведены в серии работ [7]. Квантовый протокол распределения ключа в случае трехуровневых систем исследовался в [8], а явление обмена перепутанностью многочастичного состояния многоуровневых систем – в [9]. Применение перепутанного состояния двух кутритов в вычислительном алгоритме Гровера было предложено в [10]. Важные особенности сохранения состояния многочастичной системы кутритов при коллективном взаимодействии обсуждались в [11].

В настоящей работе мы исследуем некоторые типы взаимодействий двух и трех систем, которые приводят к образованию кутрита. Физической основой редукции многокомпонентной системы к трехуровневой схеме является интеграл движения, описывающий сохранение общего числа возбуждений. Благодаря этому в тех случаях, когда число возбуждений невелико, в результате взаимодействия энергия возбуждения передается от одной системы к другой и в эволюции участвует небольшое число состояний. Мы рассматриваем несколько физических моделей, среди которых взаимодействие одной моды с ансамблем двухуровневых атомов и взаимодействие трех мод в нелинейной среде. В последнем случае может возникать кутрит, составленный из фоковских состояний света, в котором два фотона распределены по трем модам. Это состояние обладает субпуассоновской статистикой фотонов, является сжатым и перепутанным. Указаны протоколы телепортации, плотного кодирования и распределения ключа, в которых найденный кутрит может быть использован как квантовый канал.

2. Кутрит, образованный двумя системами

Рассмотрим формирование кутрита – трехуровневой системы – на примере взаимодействия систем A и B с большим числом степеней свободы, которые могут обладать разной физической природой. Физической причиной возможности редукции является интеграл движения, сохраняющий общее число возбуждений e. Тогда в случае $e = 2$ из двух систем можно сформировать кутрит, поскольку одно возбуждение может быть распределено между двумя системами, например следующими тремя способами: $\{y\} = |2, 0\rangle$; $|1, 1\rangle$, $|0, 2\rangle$. В данном случае при

В.Н.Горбачев. Северо-Западный институт печати Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна, 191180, Санкт-Петербург, пер. Джамбула, 13;
e-mail: valery.gorbachev@gmail.com
А.И.Трубилко. Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения, 190000 С.-Петербург, ул. Б.Морская, 67;
e-mail: tai@at3024.spb.edu

Поступила в редакцию 5 июля 2007 г.

физической реализации кутрита играет роль природа рассматриваемых систем. Дальше мы рассмотрим два случая взаимодействия: 1) взаимодействие двух мод электромагнитного поля; 2) взаимодействие одной моды с ансамблем двухуровневых атомов.

Пусть в качестве систем A и B выступают две моды электромагнитного поля, которые смешиваются на непоглощающей светоделительной пластинке. Это взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H_1 = \mathrm{i}\hbar g(a^\dagger b - ab^\dagger), \tag{1}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка; g – константа взаимодействия; $a^\dagger, a$ и $b^\dagger, b$ – операторы рождения и уничтожения первой и второй мод. Задача имеет интеграл, отвечающий сохранению общего числа фотонов в модах $a^\dagger a + b^\dagger b = \mathrm{const}$, откуда для операторов следуют простые решения: $a(t) = ca + sb$, $b(t) = -sa + cb$, где $c, s = \cos\theta, \sin\theta$; $\theta = gt$; t – время. Величины c и s можно рассматривать как коэффициенты пропускания и отражения пластинки.

Рассматривая эволюцию набора фоковских состояний $\{y\} = |1,1\rangle,\ |2,0\rangle,\ |0,2\rangle$, можно убедиться, что она описывается как

$$\begin{aligned}
&|1,1\rangle \to \sqrt{2}cs(|2,0\rangle - |0,2\rangle) + (c^2 - s^2)|1,1\rangle,\\
&|0,2\rangle \to s^2|2,0\rangle + c^2|0,2\rangle + \sqrt{2}cs|1,1\rangle,\\
&|2,0\rangle \to c^2|2,0\rangle + s^2|0,2\rangle - \sqrt{2}cs|1,1\rangle.
\end{aligned} \tag{2}$$

Это означает, что после прохождения пластинки возникает кутрит, индифферентный к рассматриваемому взаимодействию.

Рассмотрим второй пример, в котором в качестве системы A используется мода электромагнитного поля, а системой B является ансамбль из N двухуровневых атомов. Их взаимодействие опишем гамильтонианом

$$H_2 = \mathrm{i}\hbar g(aS_{10} - a^\dagger S_{01}), \tag{3}$$

где $S_{10} = \sum_a s_{10}(a)$ – коллективный атомный оператор; $s_{xy} = |x\rangle_a\langle y|$ $(x, y = 0, 1)$ – оператор атома с номером a, нижним состоянием 0 и верхним 1.

В системе имеется интеграл движения, который описывает сохранение полного числа возбуждений: $I = a^\dagger a - \Xi_z$, где $\Xi_z = (1/2)\sum_a (|0\rangle_a\langle 0| - |1\rangle_a\langle 1|)$. Результатом взаимодействия атомов и поля является образование кутрита. Возьмем, например, атомы в основном состоянии и будем считать исходное состояние поля фоковским с двумя фотонами. Тогда исходное возбуждение (энергия двух фотонов) будет периодически перераспределяться между ансамблем атомов и светом, и в этот процесс будет вовлечено три состояния. При этом в ансамбле атомов будут возникать состояния типа Дике $|h;N\rangle$, описывающие ансамбль из N двухуровневых атомов, в котором $h \leqslant N$ являются возбужденными,

$$|h;N\rangle = \sum_z P_z|1_1, 1_2, ..., 1_h, 0_{h+1}, ..., 0\rangle = S_{10}^h|0, ..., 0\rangle/h!, \tag{4}$$

где P_z – одна из $C_h^N = N!/[h!(N-h)!]$ различимых перестановок частиц. Состояния (4) нормированы условием $\langle h;N|h;N\rangle = C_h^N$. В нашем случае $h = 2$, и введенные состояния являются частным случаем состояний Дике с $j = m = N/2$, где j и m – собственные числа, отвечающие двум собственным векторам коллективных операторов $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ и J_z. Поскольку $j = N/2$, то эти состояния являются симметричными относительно перестановки частиц. Частный случай с $N = 3$ известен в квантовой теории информации как W-состояния: $W = (1/\sqrt{3})(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$.

В рассматриваемом нами случае кутрит образуется набором состояний

$$\begin{aligned}
&|1,1\rangle = |1\rangle \otimes |1;N\rangle/\sqrt{N},\\
&|2,0\rangle = |2\rangle \otimes |0;N\rangle,\\
&|0,2\rangle = |0\rangle \otimes |2;N\rangle/\sqrt{C_2^N},
\end{aligned}$$

которые в результате взаимодействия преобразуются сами в себя:

$$\begin{aligned}
&|1,1\rangle \to \cos\theta|1,1\rangle + \theta\frac{1}{\sqrt{2N-1}}(\sqrt{N-1}\,|0,2\rangle - \sqrt{N}\,|2,0\rangle),\\
&|2,0\rangle \to \frac{1}{2N-1}\{\sqrt{(2N-1)N}\sin\theta\,|1,1\rangle + \sqrt{N(N-1)}\\
&\quad\times(1-\cos\theta) + [N(1+\cos\theta) - 1]|2,0\rangle\},\\
&|0,2\rangle \to \frac{1}{2N-1}\{-\sqrt{(N-1)(2N-1)}\sin\theta|1,1\rangle\\
&\quad + [N + (N-1)\cos\theta]|0,2\rangle + \sqrt{N(N-1)}\\
&\quad\times(1-\cos\theta)|2,0\rangle\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\theta = gt\sqrt{2(2N-1)}$. В пределе большого числа атомов ($N \gg 1$) структура состояний возникающего кутрита определяется выражением (2), где $\theta = gt \to gt\sqrt{N}$. Такая аналогия между состояниями света и атомов обусловлена тем, что в пределе $N \gg 1$ для атомных операторов S_{01} и S_{10} коммутационные соотношения сводятся к бозонным и гамильтониан H_2 сводится к H_1.

Квадраты модулей коэффициентов перед волновыми функциями определяют вероятности соответствующих состояний и зависят от длительности взаимодействия, причем последнее может быть прервано в любой момент, за счет чего можно сформировать одно из состояний кутрита. Для примера рассмотрим последнее уравнение в (5), в котором вероятности состояний в суперпозиции в пределе $N \gg 1$ есть

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(|0,2\rangle) = (1+\cos\theta)^2/4,\\
&\mathrm{Prob}(|1,1\rangle) = \sin\theta^2/2,\\
&\mathrm{Prob}(|2,0\rangle) = (1-\cos\theta)^2/4.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что после включения взаимодействия система переходит в суперпозицию трех состояний, статистический вес которых периодически меняется во времени. Это означает, что в системе будут записаны и храниться сразу три состояния: $|1,1\rangle$, $|2,0\rangle$ и $|0,2\rangle$. Два из них, $|0,2\rangle$ или $|2,0\rangle$, можно воспроизвести (или считать), выключив взаимодействие. Действительно, если $\theta = \pi$, то $\mathrm{Prob}(|2,0\rangle) = 1$, а если $\theta = 2\pi$, то $\mathrm{Prob}(|0,2\rangle) = 1$. Таким образом могут быть сформированы и другие состояния кутрита. Так, из первого уравнения (5) следует, что из состояния $|1,1\rangle$ при $\theta = \pi/2$ возникает максимально перепутанная пара Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР-пара), состоящая из двух фотонов и атомного ансамбля с двумя возбужденными атомами:

$$|\mathrm{EPR}\rangle = \left[\left(1/\sqrt{C_2^N}\right)|0\rangle \otimes |2,N\rangle - |2\rangle \otimes |0;N\rangle\right]/\sqrt{2}.$$

3. Кутрит, образованный тремя системами

В результате взаимодействия три системы (A, B и C) также могут образовывать кутрит. Здесь возникает много разных возможностей, среди которых мы рассмотрим случай с числом возбуждений $e = 1$ и 2. При $e = 2$ возможны следующие состояния: $\{y\} = |1,1,0\rangle$, $|1,0,1\rangle$, $|0,1,1\rangle$. Мы рассмотрим реализацию такого кутрита на основе трех мод электромагнитного поля. Этот случай представляется нетривиальным, поскольку для фотонов при $e = 2$ возникает более широкий набор возможных состояний: $\{y\} = |1,1,0\rangle$, $|1,0,1\rangle$, $|0,1,1\rangle$, $|2,0,0\rangle$, $|0,2,0\rangle$, $|0,0,2\rangle$.

В этом примере в качестве систем A и B выступают две моды электромагнитного поля (a и b), а система C образована ансамблем из N трехуровневых атомов Λ-конфигурации с системой переходов типа $0 \to 2 \to 1$. Взаимодействие мод и атомов выберем в виде

$$H_3 = \mathrm{i}\hbar g(aS_{20} - a^\dagger S_{02}) + \mathrm{i}\hbar g(bS_{21} - b^\dagger S_{12}), \qquad (6)$$

где S_{xy} $(x, y = 0,1,2)$ – коллективные атомные операторы (см. выше), а константы взаимодействия g для простоты положены одинаковыми. В данном случае кутрит образуется из состояний с одним возбуждением, когда $\{y\} = |0,0,1\rangle$, $|1,0,0\rangle$, $|0,1,1\rangle$, где $|0,0,1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes S_{20}|0;N\rangle/\sqrt{N}$; $|1,0,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0;N\rangle$; $|0,1,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes S_{10}|0;N\rangle/\sqrt{N}$. Так, рассматривая эволюцию исходного состояния $|1,0,0\rangle$, находим

$$|1,0,0\rangle \to \frac{1}{N+1}[(1 + N\cos\theta)|1,0,0\rangle$$

$$- \sqrt{N}(1 - \cos\theta)|0,1,1\rangle + \sin\theta\sqrt{N(N+1)}\,|0,0,1\rangle],$$

где $\theta = \sqrt{N+1}gt$.

Рассмотрим состояния света, в которых два возбуждения распределены по трем модам (a, b и c) таким образом, что на каждую из них приходится только одно возбуждение:

$$\eta = A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle, \qquad (7)$$

где $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 1$, а состояния света являются фоковскими. Для атомной системы из трех двухуровневых атомов такое состояние выглядит тривиальным и может возникать при поглощении атомами двух фотонов. Для фоковских состояний света это далеко не так, поскольку в одной моде могут находиться два фотона, например $|200\rangle$. Это означает, что с помощью линейных оптических элементов типа светоделительных пластинок получить η детерминированным способом нельзя. Однако такое состояние может быть получено в процессах трехфотонного взаимодействия в нелинейных средах. Так, рассматривая одновременный процесс невырожденного параметрического деления частоты, в котором три классические волны накачки преобразуется в пары фотонов $a - b$, $a - c$, $b - c$, найдем эффективный гамильтониан

$$H_{\mathrm{eff}} = \mathrm{i}\hbar(k_1 a^\dagger b^\dagger + k_2 a^\dagger c^\dagger + k_3 b^\dagger c^\dagger - k_1 ab - k_2 ac - k_3 bc), \qquad (8)$$

где a, b, c – операторы уничтожения соответствующих мод, а k_x $(x = 1,2,3)$ – константы взаимодействия. Такой процесс рассмотрен в [12] для резонаторной схемы, в которой световые поля описаны в рамках непрерывных переменных.

Для начального вакуумного состояния мод в линейном приближении по взаимодействию имеем

$$\eta' = \mu|\mathrm{vac}\rangle + \epsilon[A|110\rangle + B|101\rangle + C|011\rangle]_{abc}, \qquad (9)$$

где μ, ϵ полагаются вещественными и считается выполненным условие нормировки $\mu^2 + \epsilon^2 = 1$, а $\epsilon A = k_1 t$, $\epsilon B = k_2 t$, $\epsilon C = k_3 t$. В отличие от состояния η, в η' присутствует вклад вакуумного состояния, который в ряде случаев не играет никакой роли. Более того, его можно исключить путем постселекции.

При обсуждении физических свойств кутрита, сформированного из трех мод, мы будем учитывать вклад вакуума, уделяя основное внимание случаю $\epsilon \ll 1$, что позволяет провести рассмотрение с учетом возможности его реализации. Без каких-либо вычислений можно указать, что состояние η' имеет две существенно квантовые черты. Во-первых, оно образовано из фоковских состояний мод, что может приводить к субпуассоновской статистике фотонов, для характеризации которой воспользуемся параметром Манделя ξ, описывающим отличие дисперсии числа фотонов от пуассоновской через соотношение $\langle(\Delta n)^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle(1 + \xi)$. Во-вторых, поскольку состояние всего поля является чистым и описывается волновой функцией, то оно обладает когерентностью.

Состояние (9) характеризуется следующими статистическими свойствами.

1. Статистика фотонов в каждой моде является субпуассоновской с параметром $\xi_x = -\langle n_x\rangle$, где $x = a, b, c$. Так, $\xi_a = -\langle n_a\rangle = -(|A|^2 + |B|^2)\epsilon^2$, и при $\epsilon \ll 1$ отклонение от пуассоновского уровня невелико.

2. Для каждой пары мод совместная скорость счета фотонов и скорость случайных совпадений равны соответственно $\langle n_a n_b\rangle = \epsilon^2|A|^2$ и $\langle n_a\rangle\langle n_b\rangle = \epsilon^4(|A^2 + |BC|^2)$. Это означает, что при $\epsilon \ll 1$ возникает группировка фотонов, поскольку $\langle n_a n_b\rangle > \langle n_a\rangle\langle n_b\rangle$. Наличие в состоянии (9) только двух фотонов приводит к тому, что совместная скорость счета трех фотонов естественно равна нулю и $\langle n_a n_b n_c\rangle = 0$.

3. Разностная интенсивность пары мод имеет субпуассоновскую статистику. Рассматривая операторы разности и суммы числа фотонов $n_- = n_a - n_b$ и $n_+ = n_a + n_b$, находим параметры Манделя для дисперсии n_- и n_+. При $\epsilon \ll 1$ соответствующие выражения принимают вид

$$\xi_- \approx -\frac{2|A|^2}{2|A|^2 + |B|^2 + |C|^2}, \qquad \xi_+ \approx \frac{2|A|^2}{2|A|^2 + |B|^2 + |C|^2}. \qquad (10)$$

При $A = B = C$ параметр $\xi_- = -1/2$ и дисперсия меньше, чем у распределения Пуассона, в два раза, что обусловлено квантовой межмодовой парной корреляцией фотонов. В отличие от разностной интенсивности, статистика суммарной оказывается суперпуассоновской.

Наличие когерентности у состояния (9) (формально это означает наличие недиагональных элементов матрицы плотности) приводит к появлению у него фазочувствительных свойств, среди которых наибольший интерес представляют сжатые состояния света. Справедливы следующие свойства.

1. Любая пара мод может находится в сжатом состоянии. Пусть моды a и b смешиваются на светоделительной непоглощающей пластинке, которая осуществляет преобразование вида (1). Тогда дисперсия $\langle(\Delta X)^2\rangle$ квадратурного оператора $X(\theta) = d^\dagger \exp(\mathrm{i}\theta)$ + эрмит. сопр. на одном из выходов светоделителя, где $d = ca + sb$, будет равна $1 + 2\epsilon^2(|A|^2 + |cB + sC|^2) + \mu\epsilon 2cs(A\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$ + компл. сопр.), где θ – фаза опорной волны. При $c = s$, $B = C$, $\arg A - 2\theta = \pi$ и $\epsilon \ll \mu$ возникает сжатое состояние света, поскольку $\langle(\Delta X)^2\rangle = 1 - 2\epsilon\mu|A|(1 - (\epsilon/\mu)|A|) < 1$. Очевидно, что если мода является сжатой, то в силу соотношения неопределенностей она не может иметь субпуассоновской статистики фотонов. В рассматриваемых условиях мода d (или пара a, b) имеет параметр Манделя $\xi_d = |A|^2 - \epsilon^2$, который не может быть отрицательным в случае сжатия, когда $(\epsilon/\mu)|A| < 1$.

2. Состояние η' может быть сжатым и обладать субпуассоновской статистикой фотонов. Пусть на светоделителе смешиваются моды a и b и получаются моды d и r. Тогда состояние d может быть сжатым, а статистика разностного числа фотонов мод r и c – субпуассоновской.

Состояние η' обладает еще одним важным свойством. Оно является перепутанным, поскольку не может быть представлено в виде произведения волновых функций отдельных мод. Это свойство будет проявляться, например, в зависимости результата интерференции мод a и b при проекционном измерении третьей моды c. Пусть моды a и b смешиваются на светоделительной пластинке, на одном из выходов которой расположен детектор D_d, регистрирующий число фотонов моды d. Пусть мода c регистрируется детектором D_c, который осуществляет измерение в базисе $|0\rangle_c, |1\rangle_c$. Исходы этих измерений возникают с вероятностями $\mathrm{Prob}(0) = \mu^2 + \epsilon^2|A|^2$ и $\mathrm{Prob}(1) = \epsilon^2(|B|^2 + |C|^2)$. При этом волновая функция начального состояния η' проецируется в следующие состояния, $\eta' \to (\mu|\mathrm{vac}\rangle + \epsilon A|110\rangle)/\sqrt{\mathrm{Prob}(0)}$ и $\eta' \to (B|101\rangle + C|011\rangle)/\sqrt{\mathrm{Prob}(1)}$. Для этих двух исходов результат интерференции мод a и b оказывается существенно разным. Если детектором D_c зафиксирован исход 0, то среднее число фотонов, или интенсивность света на детекторе D_d будет

$$\langle d^\dagger d\rangle_0 = \frac{\epsilon^2|A|^2}{\mu^2 + \epsilon^2|A|^2} \propto \epsilon^2. \tag{11}$$

Если зарегистрирован исход 1, то

$$\langle d^\dagger d\rangle_1 = \frac{|cB + sC|^2}{2(|B|^2 + |C|^2)} \leqslant 2. \tag{12}$$

Легко видеть, что при $\epsilon \ll 1$ интенсивность света для исхода 1 оказывается существенно выше.

Будучи перепутанным, состояние кутрита, составленного из трех мод, может быть использовано в качестве квантового канала для различных задач квантовой теории информации. Далее при обсуждении протоколов мы ограничимся идеальным случаем состояния η. Основой для его использования в этих задачах служат два наблюдения. Так, η связано с W-состоянием $A|001\rangle + B|010\rangle + C|001\rangle$ локальной унитарной операцией. Это означает, что с информационной точки зрения свойства обоих состояний одинаковы и оба они могут быть использованы для решения одних и тех же задач. Частным случаем W^* является несимметричное состояние $W^* = (1/\sqrt{2})|011\rangle + (1/2)(|110\rangle + |101\rangle)$, которое можно связать с трехчастичным GHZ-состоянием (Greenberger – Horne – Zeilinger)

$$\mathrm{GHZ} = 1/\sqrt{2}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{13}$$

с помощью двухчастичной унитарной, но нелокальной операции V

$$(1 \otimes V)|GHZ\rangle_{ABC} = |W^*\rangle, \tag{14}$$

где $V = |\Psi^+\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 10| + |\Psi^-\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 00|$; $\Psi^\pm = (|10\rangle \pm |01\rangle)/\sqrt{2}$. Состояние GHZ может быть использовано в качестве квантового канала для телепортации как одной частицы [13], так и неизвестного перепутанного состояния [14]. Квантовый канал, образованный W-состояниями в этих же случаях, исследован в работах [15] и [16] соответственно.

Рассмотрим процесс телепортации неизвестного чистого перепутанного состояния вида

$$|A\rangle = (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle)_{12}, \tag{15}$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. В процессе участвуют пять частиц с исходным состоянием $|A\rangle_{12} \otimes |\Omega\rangle_{ABC}$, причем частицы канала Ω находятся в распоряжении пространственно разделенных отправителя A и двух получателей – B и C. Если отправитель A желает отправить состояние (15) получателям B и C, то необходимо провести измерение над тремя частицами (1, 2 и A) в определенном базисе $\{\Phi_x\}$. Так, при использовании канала GHZ (13) измерительный базис имеет вид

$$\{\Phi_x : \pi_1^\pm \otimes \Phi_{2A}^\pm, \pi_1^\pm \otimes \Psi_{2A}^\pm\}, \tag{16}$$

где $\Phi^\pm = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$; $\pi^\pm = [|0\rangle \pm \exp(\mathrm{i}\theta)|1\rangle]/\sqrt{2}$. Проведенное измерение с одинаковой вероятностью $\mathrm{Prob}(\Phi_x) = 1/8$ проецирует все частицы в одно из восьми состояний $|\Phi_x\rangle_{12A} \otimes |BC_x\rangle_{BC}$, где $|BC_x\rangle_{BC}$ – состояние частиц у получателей. Вероятность каждого измерения не зависит от свойств исходного состояния $|A\rangle_{12}$, определяемых его коэффициентами. Это означает, что задача может быть выполнена, поскольку существует набор восстанавливающих унитарных операторов $\{U_x\}$, которые, действуя в этом случае на частицы B и C независимо, $U_x = B_x \otimes C_x$, восстанавливают неизвестное состояние. Уравнение, описывающее телепортацию при использовании такого канала, имеет вид

$$|A\rangle_{12} \otimes |\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} = \sum_x |\Phi_x\rangle_{12A} \sqrt{\mathrm{Prob}(\Phi_x)} \times (B_x \otimes C_x)|A\rangle BC, \tag{17}$$

где операторы B_x, C_x определяются известными операторами Паули. Например, если зафиксирован исход, отвечающий базисной функции $\Phi_0 = \pi^+ \otimes \Phi^+$, то эти операторы определятся как $B_0 = \sigma_x$, $C_0 = 1$. Изменение канала с помощью соотношения (14) приводит и к изменению уравнения

$$|A\rangle_{12} \otimes (1 \otimes V)|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} = \sum_x |\Phi_x\rangle_{12A}\sqrt{\mathrm{Prob}(\Phi_x)}\,V(B_x \otimes C_x)|A\rangle_{BC}, \qquad (18)$$

что означает модификацию восстанавливающих операторов и новый их набор. Более того, если при использовании канала GHZ-состояния восстанавливающие операторы имели локальный характер и независимо действовали на свои частицы B и C, то теперь восстанавливающие операторы имеют нелокальный характер и их нельзя представить в виде прямого произведения операторов, действующих на соответствующие подсистемы. Именно это обстоятельство является отличительной чертой использования канала W-состояния.

Другим протоколом квантовой теории информации, в котором может быть использовано состояние (14), является протокол плотного кодирования. Соответствующая схема позволяет увеличить пропускную способность квантового канала при передаче классической информации. Она содержит кодировщик и схему измерения. Первый осуществляет кодирование классической информации воздействием на квантовое состояние, что описывается некоторым унитарным оператором. Схема измерения позволяет извлечь информацию из передаваемого состояния. В случае двух независимых кубитов измерение над каждым из них проводится в двух независимых базисах, и в итоге пропускная способность канала равна единице. Свойство сцепленности, или перепутанности двухчастичного состояния типа ЭПР-пары позволяет существенно увеличить пропускную способность. Действительно, поскольку частицы в этом случае обладают квантовой корреляцией, кодирование классической информации осуществляется воздействием только на одну из частиц пары. Извлечение информации переданного состояния производится измерением в базисе Белла. В итоге пропускная способность квантового канала достигает значения, равного двум. В случае использования трехчастичного перепутанного канала GHZ- или W-состояния кодирование информации осуществляется воздействием только на две подсистемы канала, а измерение проводится в трехчастичном базисе, определяемом на основе восьми различимых состояний. В итоге пропускная способность такого канала имеет промежуточное значение, равное $3/2$.

Рассмотрим теперь этот протокол для трехчастичного случая более детально. Пусть имеется квантовый канал GHZ-состояния вида (13). Отправитель для передачи трех битов классической информации из множества 000, 001, ... , 111 осуществляет их кодирование одним из восьми различимых состояний трехчастичной системы. Эти состояния могут быть получены воздействием на частицы B и C канала (13) набора локальных унитарных операторов $U_x = B_x \otimes C_x$:

$$|D_x\rangle_{ABC} = \mathbb{1} \otimes B_x \otimes C_x|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC}. \qquad (19)$$

В итоге формируется набор всех функции, каждая из которых отвечает определенному трехчастичному биту классической информации; например, бит 000 кодируется состоянием $|D_{000}\rangle_{ABC} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC}$. Последующее измерение состояния канала в трехчастичном перепутанном базисе позволяет идентифицировать и различить каждое из переданных состояний и, сопоставив результат с тем или иным битом, извлечь информацию. Использование в качестве ресурса W-состояния вида (14) приводит к изменению вида состояний, которыми кодируются три бита классической информации. Поскольку (13) и (14) связаны нелокальным двухчастичным оператором V, то новые состояния могут быть получены нелокальным преобразованием производящих операторов U_x:

$$|D_x'\rangle_{ABC} = (\mathbb{1} \otimes V)(\mathbb{1} \otimes B_x \otimes C_x)(\mathbb{1} \otimes V)^{\dagger}|W\rangle_{ABC}. \qquad (20)$$

Естественно, что при реализации протокола необходимо адекватным образом изменить и измерительный базис.

Симметричное состояние (7), в котором амплитуды вероятностей базисных функций имеют одинаковые значения $A = B = C = 1/\sqrt{3}$, может быть использовано для решения проблемы квантового распределения ключа. Пусть такое состояние распределено между сторонами A, B, C. Наблюдатель A над своей частицей канала проводит измерение в базисе $|0\rangle_A, |1\rangle_A$. Полученные в таком измерении исходы приводят, согласно проекционному постулату, к двум совершенно разным состояниям частиц у сторон B, C. Пусть исход измерения A отвечает состоянию $|1\rangle_A$, тогда состояние у сторон B и C будет перепутанным состоянием ЭПР-пары $(1/\sqrt{2})(|10\rangle + |01\rangle)_{BC}$. Напротив, исход измерения $|0\rangle_A$ отвечает наличию у других партнеров независимого состояния $|11\rangle_{BC}$. Коррелированное состояние двух получателей очень важно в данном протоколе и означает, что некоторое действие может быть совершено только в том случае, если все участники будут в этом заинтересованы. Отметим, что сторона A применяет процедуру измерения, отвечающую его базисным состояниям случайным образом. При этом состояние с квантовой корреляцией появляется с вероятностью $2/3$, а независимое – с вероятностью $1/3$, что определяется видом (7) применяемого симметричного состояния кутрита.

4. Заключение

В работе рассмотрена одна из особенностей поведения сложной физической системы, когда в процесс эволюции вовлекается лишь небольшая часть квантовых состояний из ее гильбертова пространства. В этом случае поведение системы можно описать с помощью простой системы с небольшим числом уровней типа кутрита. Показано, что физической причиной такого поведения служат интегралы движения, описывающие сохранение общего числа возбуждений в системе. В качестве примера рассмотрен кутрит, образованный путем смешения двух световых мод в фоковском состоянии на светоделительной пластинке, а также кутрит, образованный в результате взаимодействия ансамбля духуровневых атомов и электромагнитного поля в фоковском состоянии. Эти два примера отвечают случаю, когда одно возбуждение распределено по трем степеням свободы. На основе трехфотонного параметрического взаимодействия в прозрачной нелинейной среде рассмотрен другой случай – возникновение состояния света при распределении двух возбуждений по трем модам. С точки зрения квантовой статистики такое состояние бозонов выглядит нетривиальным, поскольку в нем на каждую моду приходится не больше одного возбуждения. Найденное состояние света оказывается перепутанным, что позволяет использовать его в качестве квантового канала для телепортации, плотного кодирования и квантового распределения ключа.

1. Кривицкий Л.А., Кулик С.П., Пенин А.Н., Чехова М.В. *ЖЭТФ*, **124**, 943 (2003).
2. Bechmann-Pasquinucci H., Peres A. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3313 (2000).
3. Bechmann-Pasquinucci H., Tittel W. http://trefoil.math.ucdavis.edu/9910.4095.
4. Maslennikov G., Moreva E., Spraupe S., Kulik S.P. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 023602 (2006).
5. Caves C.M., Milburn G.J. *Opt. Commun.*, **179**, 439 (2000).
6. Kazakov A.Ya. *Int. J. Quantum Inform.*, **4**, 907 (2006)
7. Бурлаков А.В., Кривицкий Л.А., Кулик С.П., Масленников Г.А.,Чехова М.В. *Оптика и спектроскопия*, **94**, 743 (2003); Жуков А.А., Масленников Г.А., Чехова М.В. *Письма в ЖЭТФ*, **76**, 696 (2002); Bogdanov Yu., Chekhova M., Krivitsky L., Kulik S.P., Kwekh C., Tey M.K., Oh C., Zhukov A. *Phys. Rev. A*, **70**, 042303 (2004).
8. Bruss D., Macchiavello C. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 127901 (2002).
9. Bouda J., Buzek V. *J. Phys. A Math. Gen.*, **34**, 4301 (2001).
10. Chamoli A., Bhandari C.M. http://front.math.ucdavis.edu/0609.4010.
11. Mandilara A., Akulin V.M. http://front.math.ucdavis.edu/0609.4121v1.
12. Bradley A.S., Olsen M.K., Pfister O., Pooser R.C. *Phys. Rev. A*, **72**, 053805, (2005).
13. Karlsson A., Bourennane M. *Phys. Rev. A*, **58**, 4394 (1998).
14. Горбачев В.Н., Трубилко А.И. *ЖЭТФ*, **118**, 1036 (2000); Marinatto L., Weber T. *Found. Phys. Lett.*, **13**, 119 (2000).
15. Agrawal P., Pati A. *Phys. Rev. A*, **74**, 0602320 (2006).
16. Gorbachev V.N., Trubilko A.I., Rodichkina A.A., Zhiliba A.I. *J. Quantum Inform. Comput.*, **2**, 367 (2002).
17. Gorbachev V. N., Trubilko A. I., Rodichkina A. A. *Phys. Lett. A*, **314**, 267 (2003).