

Изменение типа бифуркации рождения периодических осцилляций в полупроводниковых лазерах с запаздывающей обратной связью

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев

Аналитически и численно исследуется возникновение колебательных режимов генерации полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. В рамках модели Лэнга–Кобаяши изучена смена обычного механизма возникновения осцилляций, связанного с переходом через бифуркацию Хопфа, жёстким возбуждением пикового режима. Смена режима развития неустойчивости имеет характер фазового перехода. Выведено явное выражение для частоты малых гармонических осцилляций, возникающих при переходе через бифуркацию Андронова–Хопфа. Найдена граница в пространстве параметров, разделяющая два разных режима развития осцилляций лазерной мощности.

Ключевые слова: полупроводниковый лазер, динамика генерации, запаздывающая обратная связь, бифуркация.

1. Введение

Полупроводниковый лазер с запаздывающей оптической обратной связью (ОС) имеет множество применений в квантовой электронике благодаря богатству динамических режимов [1] работы. Разнообразие возникающих динамических режимов обусловлено наличием двух связанных резонаторов, один из которых образован торцами полупроводникового кристалла, а другой – глухим торцом и внешним зеркалом. Современная теория динамики лазерных диодов с запаздывающей ОС основана на уравнениях Лэнга–Кобаяши (ЛК) [2]. В приближении ЛК отражением падающего со стороны внешнего зеркала излучения от грани диода пренебрегается. Основы теории диодных лазеров с внешней ОС излагаются в книге [1]. Большое число параметров, входящих в уравнения ЛК, делает проблему классификации режимов динамики генерации трудноразрешимой.

Частные решения системы уравнений ЛК – так называемые стационарные состояния (СС), в которых интенсивность излучения не зависит от времени, могут быть легко найдены. Изменение фазы поля для СС характеризуется стационарной частотой Ω . Линеаризация уравнений ЛК относительно СС и поиск решения, экспоненциально зависящего от времени ($\exp(\lambda t)$), приводят к трансцендентному уравнению для показателей экспонент λ [1, 3]. Трансцендентность характеристического уравнения линейной теории возмущений связана с запаздыванием сигнала, отраженного от внешнего зеркала. В это уравнение входят пять физических параметров, что и обуславливает сложность проведения общего анализа характера возникающих неустойчивостей. Число корней трансцендентного уравнения, вообще говоря, не ограничено. В общем случае корни уравнения комплексны. По-

ложительность реальной части собственного числа означает неустойчивость стационарного решения (СС). Неустойчивость СС может развиваться путём аperiodического роста возмущения: такие неустойчивости развиваются при бифуркации типа седло–узел [4]. В этом случае в результате развития неустойчивости система переходит в другое устойчивое состояние. Особый интерес представляет неустойчивость СС по отношению к возникновению гармонических осцилляций в точке бифуркации Хопфа (БХ). В этой точке у трансцендентного уравнения появляется пара решений с нулевой реальной частью. Это означает, что при прохождении БХ возникают незатухающие гармонические осцилляции, амплитуда которых плавно нарастает от нуля по мере удаления от точки бифуркации. Частота осцилляций при этом меняется незначительно.

Большой интерес представляет задача поиска точек бифуркации и частоты возникающих осцилляций в пространстве параметров уравнений ЛК. Точки бифуркации обычно определяются численно. В работе [5] предложен подход к нахождению точек бифуркаций, основанный на линеаризации уравнений ЛК вблизи СС. Авторам удалось свести эту задачу к анализу двух трансцендентных уравнений для частоты возникающих колебаний, содержащих все физические параметры. В настоящей работе аналитически и численно показано, что при некоторых условиях вещественные решения для частоты осцилляций поля исчезают. Численный анализ поведения корней характеристического уравнения методом контурного интеграла [3] показывает, что при этих условиях мнимую ось пересекают также два корня, что обычно является признаком БХ. Однако предельный цикл, связанный с БХ, в данном случае неустойчив. В результате решение «уходит» на другой устойчивый предельный цикл, соответствующий пиковому режиму генерации. Прямой расчет динамики генерации показал, что этот процесс начинается с малых гармонических колебаний с частотой, равной частоте колебаний в точке БХ, и заканчивается формированием периодических негармонических пиков с большой амплитудой. Процесс смены режима при изменении параметров происходит за большое число ос-

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев. ФГУП «ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Россия, Московская обл., 142190 Троицк; e-mail: napart@mail.ru, sure@triniti.ru

Поступила в редакцию 23 ноября 2007 г., после доработки – 8 мая 2008 г.

цилляции. При обратном изменении параметров стационарный режим восстанавливается в другой точке, т. е. имеет место гистерезис. Жёсткое возбуждение пикового режима генерации, гистерезис при возникновении и исчезновении колебаний, а также возможность регулирования динамических режимов путём направленного подбора параметров могут представлять практический интерес.

2. Вывод основных соотношений

Приведём уравнения ЛК, описывающие в безразмерных переменных лазерный диод с оптической внешней ОС, в виде, предложенном в [6, 7]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (1 - i\alpha)NE(t) + ME(t - \tau) \exp \left[i \left(\kappa + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (1)$$

$$T \frac{\partial N}{\partial t} = P - N - (1 + 2N)|E|^2.$$

Первое уравнение описывает поведение амплитуды поля в диоде E , второе – динамику инверсии населённости N . При выводе уравнений исключена зависимость поля от времени в виде $\exp(-i\omega_0 t)$, где ω_0 – несущая частота. В (1) α – фактор уширения линии (антиволноводный параметр); τ – время задержки; κ – набег фазы поля в петле ОС за вычетом $\pi/2$ и числа, кратного 2π : $\kappa + \pi/2 = \omega_0 \tau \pmod{2\pi}$. Все величины, имеющие размерность времени, нормированы на время жизни фотона τ_{ph} в собственном резонаторе длиной L : $\tau_{ph}^{-1} = (c/n)[\alpha_{int} + (2L)^{-1} \ln r^{-1}]$ (c/n – скорость света в среде, n – её показатель преломления, α_{int} – внутренние потери, r – коэффициент отражения от грани кристалла); например, $T = \tau_s/\tau_{ph}$ (τ_s – время жизни носителей). Остальные безразмерные переменные введены следующим образом: $|E| = (\frac{1}{2}g\tau_s I)^{1/2}$ – амплитуда поля (I – плотность фотонов, g – дифференциальное усиление среды); $N = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(N_c - N_{th})$ – инверсная населённость, отсчитываемая от пороговой населённости N_{th} (N_c – концентрация носителей); $P = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(j\tau_s - N_{th})$ – нормированная интенсивность накачки ($j = J/(ed)$ – скорость инжекции носителей (в $\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$) в активный слой толщиной d при плотности тока J , e – заряд носителей). Константа связи $M = (1 - r)(R/r)^{1/2}[c\tau_{ph}(2nL)^{-1}]$, где R – коэффициент отражения внешнего зеркала.

Стационарное состояние определяется условиями $\partial N/\partial t = 0$, $\partial E/\partial t = i\Omega E$, где Ω – отстройка частоты излучения относительно ω_0 . Эти условия приводят к соотношениям

$$\frac{N}{M} = \sin(\kappa - \Omega\tau), \quad P - N = (1 + 2N)|E|^2,$$

а отстройка частоты Ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Omega\tau}{s} = \sin \left(\Omega\tau - \kappa + \arctan \frac{1}{\alpha} \right). \quad (2)$$

Число стационарных решений (2) зависит от эффективной силы ОС [1, 3], которая с точностью до множителя определяется как произведение константы связи и времени задержки: $s = M\tau(1 + \alpha^2)^{1/2}$. Число корней уравнения (2) растёт с ростом s . Устойчивость стационарных решений определяется положением на комплексной плоскости корней λ характеристического уравнения [1, 3]

$$g_2(\lambda) = \lambda(\gamma + \lambda)[1 + M^2 f^2 + 2Mf \sin(\Omega\tau - \kappa)] + \left[2 \frac{P + M \sin(\Omega\tau - \kappa)}{T} \right] \left[1 - Mf(1 + \alpha^2)^{1/2} \times \cos \left(\Omega\tau - \kappa + \arctan \frac{1}{\alpha} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь для компактности записи используются обозначения $f = [1 - \exp(-\lambda\tau)]/\lambda$ и $\gamma = T^{-1}(1 + 2P)(1 + 2N)^{-1}$. Устойчивость СС сохраняется до тех пор, пока число полюсов

$$m = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty}^{-i\infty} d\lambda \frac{\dot{g}_2(\lambda)}{g_2(\lambda)} \quad (4)$$

в правой полуплоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) равно нулю [3]. При потере устойчивости стационарных решений во временной зависимости мощности лазера с запаздывающей ОС появляются разнообразные типы колебаний, как периодических, так и хаотических. Мы рассмотрим параметрические условия появления БХ в решениях уравнений ЛК.

В диодных лазерах с запаздывающей ОС, как правило, частота ω_r собственных релаксационных колебаний велика по сравнению с обратным временем жизни носителей: $\omega_r \approx (2P/T)^{1/2} \gg 1/T$. Вблизи точки бифуркации уравнения могут быть линеаризованы по малым возмущениям относительно стационарного решения. Представим поле в виде $E = E_{st} \exp \Psi \approx E_{st}(1 + \Psi)$, где $E_{st} = [P + M \sin(\Omega\tau - \kappa)]^{1/2} \exp(i\Omega t)$. Для малого комплексного возмущения фазы Ψ в [5] выведено дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом:

$$-\ddot{\Psi} = M \exp \left[-i\Omega\tau + i \left(\kappa + \frac{\pi}{2} \right) \right] (\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_\tau) + (1 - i\alpha)\omega_r^2 \text{Re} \Psi, \quad (5)$$

где $\Psi_\tau = \Psi(t - \tau)$;

$$\omega_r^2 = 2 \frac{P + M \sin(\Omega\tau - \kappa)}{T}. \quad (6)$$

Уравнение (5) из-за наличия запаздывания и неаналитического члена, содержащего $\text{Re} \Psi$, в точке БХ имеет решение в виде линейной комбинации двух сдвинутых по фазе гармонических колебаний: $\Psi = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \times \cos[\omega(t - \tau/2)]$, где $c_{1,2}$ – комплексные числа. Частота колебаний ω находится из условия существования нетривиальных решений уравнения (5). С помощью соотношений, выведенных ранее в [5] (см. также Приложение), это условие существования сводится к анализу корней кубического уравнения (П4), которое может быть представлено в виде

$$x^3 - px - q = 0, \quad (7)$$

где

$$x = \omega^2 - \Delta; \quad (8)$$

$$\Delta = \frac{2}{3} [\omega_r^2 + 2M^2 \cos^2(\Omega\tau - \kappa)];$$

$$p = 3\Delta^2 - \omega_r^2 \delta; \quad \delta = \omega_r^2 + 4M\Omega \cos(\Omega\tau - \kappa); \quad (9)$$

$$q = 2\Delta^3 - \Delta\omega_r^2 \delta - \omega_r^4 [M^2(1 + \alpha^2) - \Omega^2].$$

Число вещественных корней кубического уравнения с вещественными коэффициентами (7) при вариации параметра q скачком меняется с одного до трех. Как показано в Приложении, решение для $\omega^2 > 0$ появляется только при наличии трех корней (7). Поскольку экстремумы функции $y = x^3 - px - q$ лежат в точках $3x^2 = p$, то три вещественных корня могут существовать лишь в случае $p > 0$. Значения функции в локальных экстремумах $y_m = \pm 2(p/3)^{3/2} - q$. Смене числа корней соответствует касание функцией оси абсцисс, т. е. в этот момент $y_m = 0$. Три реальных корня существуют, если только $(q/2)^2 \leq (p/3)^3$. При этом решение может быть записано в виде

$$x_k = 2 \left(\frac{p}{3} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3}, \quad \cos \theta = \frac{q}{2} \left(\frac{p}{3} \right)^{-3/2}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (10)$$

Из трёх корней только один положительный корень удовлетворяет условию (ПЗ), гарантирующему отсутствие «лишних» решений.

Таким образом, число управляющих параметров задачи удаётся свести к двум (p, q). Условие

$$q^2 = \frac{4}{27} p^3 \quad (11)$$

разделяет области в пространстве параметров, в которых реализуется БХ или бифуркация с жёстким возбуждением пикового режима. Соответствующую условию поверхность раздела в пространстве параметров естественно назвать сепаратрисой. В терминах теории катастроф (см., напр., [8, 9])^{*} сепаратриса является «линией складки» катастрофы сборки A_3 .

Таким образом, при условии $-(p/3)^{3/2} \leq q/2 \leq (p/3)^{3/2}$ неустойчивость стационарного состояния связана с БХ. Отметим, что на сепаратрисе два корня сливаются в один кратный корень, соответствующий частоте $\omega^2 = \Delta + (p/3)^{1/2}$. На диаграмме в переменных p, q (рис. 1) сепаратриса разделяет область, где неустойчивость приводит к гармоническим колебаниям, амплитуда которых плавно растёт по мере углубления в область неустойчивости и в область, где установившиеся периодические осцилляции сильно ангармоничны.

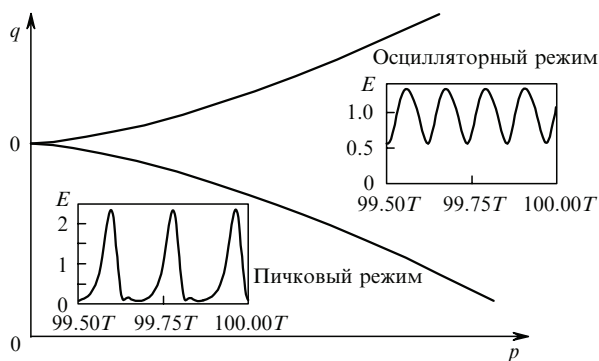


Рис. 1. Диаграмма в переменных p, q , показывающая области различных нестационарных режимов генерации. На вставках приведены характерные временные зависимости амплитуды поля E в различных режимах.

^{*}Заметим, что (7) является каноническим видом уравнения для описания катастрофы сборки A_3 по классификации типов элементарных катастроф, данной Томом.

3. Численные расчёты

Численная программа для решения и анализа уравнений (1) была разработана ранее [3]. Она включает в себя нахождение СС с последующим анализом их устойчивости на основе вычисления интеграла (4). Полученная информация позволяет выбирать конкретные значения набега фазы в петле ОС и для проведения расчётов динамики процесса. Тип нелинейного решения (детерминистические или хаотические колебания) определяется путём параллельного вычисления показателей Ляпунова и размерности фазового подпространства по формуле Каплана – Йорке. Прямое наблюдение динамики генерации вблизи точек бифуркации позволяет определить тип бифуркации. Аналитические соотношения, сформулированные выше, хорошо согласуются с результатами численного интегрирования. В частности, для БХ аналитически найденная частота осцилляций с хорошей точностью совпадает с результатом прямого расчёта. В расчётах мы использовали антиволноводный параметр $\alpha = 3$.

Расчёты установления динамики генерации выполнялись следующим образом: при заданных параметрах вблизи точки бифуркации численно находилось решение уравнений ЛК. Установившиеся значения поля E и населённости N в стационарном состоянии используются как начальные условия для расчёта с изменённым значением κ . Шаг по κ подбирался таким, чтобы исключить резкие изменения полей во времени сразу после изменения κ .

При прохождении через БХ наблюдается классическая картина: за время порядка времени одного колебания возникают осцилляции поля, амплитуда которых постепенно (за время, заметно превышающее время жизни носителей T) нарастает до стационарного значения. При удалении от точки БХ амплитуда модуляции поля растёт при почти постоянной её частоте. Численные расчёты показали, что для интенсивности накачки $P > 0.8$, константы связи $M > 0.02$ и времени задержки $\tau \geq 40$ неустойчивость СС развивается по сценарию БХ.

Для бифуркации с жёстким включением осцилляций установление периодического режима также происходит за время, превышающее T . Вначале возникают колебания амплитуды поля, частота которых соответствует мнимым корням $\lambda = \pm i\omega$ уравнения (3). В отличие от эволюции после прохождения БХ при жёстком включении колебаний их форма в процессе установления стационарного периодического режима сильно изменяется. В частности, изменяется период колебаний. Если текущую частоту определить через период колебаний, то для набора параметров $P = 0.8, M = 0.02, T = 1000, \tau = 20, 180^\circ/\pi = 225^\circ$ частота ω изменяется от 0.049 до 0.035. Такая динамика развития характерна для неустойчивости, приводящей к переходу в пиковый режим.

4. Смена режима развития осцилляторной неустойчивости как функция управляющих параметров

Из ряда физических параметров ($P, M, T, \tau, \kappa, \alpha$) фактор уширения линии α , определяется конструкцией лазера и поэтому не может меняться в ходе эксперимента. В расчётах использовалось фиксированное $\alpha = 3$. Поскольку значение T велико, то оно также фиксировано в расчётах и принято равным типичному значению 1000. Остальные параметры (P – интенсивность накачки,

M – константа связи, τ – время задержки, κ – набег фазы поля в петле ОС) могут целенаправленно варьироваться в эксперименте.

Сепаратриса, соответствующая смене сценария развития осцилляций из СС, определяется равенством (11), фиксирующим отношение $27q^2/(4p^3)$, которое, как можно показать, зависит только от двух ключевых параметров: $\beta = \omega_r/M$ и $\chi = \Omega\tau - \kappa$ (χ – фаза изменения населенности, для СС $\sin \chi = -N/M$). Численно найдено, что для интервала $1 \leq \omega_r/M \leq 4$ уравнение (11) имеет четыре корня χ_i , каждый из которых зависит от ω_r/M . Для каждой ветки соотношения (8), (9) вместе с формулами из Приложения (П1) и (П3) позволяют найти квадрат частоты осцилляций в точках сепаратрисы $\omega^2(\beta, \chi) = \Delta + (\Delta^2 - \omega_r^2 \delta/3)^{1/2}$ и величину $\omega\tau$. Определив время задержки τ , можно с помощью (2) также восстановить по отдельности Ω и κ – координаты точки бифуркации на диаграмме СС. Практический интерес может представить функция $\tau(P)$ в точках сепаратрисы, показанная на рис.2 для каждой ветки $\chi(\omega_r/M)$ при $\omega_r/M = 2$. Изменение параметров, соответствующее пересечению кривых на рис.2, как ожидается, должно приводить к смене режима возникновения колебаний в неустойчивом СС.

Кривая 3 на рис.2 относится к случаю, когда число корней дисперсионного уравнения (3) в правой полуплоскости изменяется от одного до трёх, что не имеет практического значения. Выяснилось, что пересечение кривой 4 не соответствует пересечению сепаратрисы в координатах p, q , так что реально по обе стороны от кривой реализуется БХ.

Таким образом, только при пересечении кривых 1 и 2 происходит смена сценария развития неустойчивости СС. Из приведенных выше формул следует, что частота осцилляций и время задержки в петле ОС связаны, например, вдоль кривой 2 соотношением $\tau = 2.067/\omega$. Вдоль этой кривой также неизменны величины $\Omega\tau/s = 0.25$, $\kappa/\pi = 1.38$, $\chi = 2.56$. Для иллюстрации того, что происходит при пересечении кривых 1 и 2, на рис.3 приведены диаграммы устойчивости СС. Они построены для времен задержки $\tau = 20$ и 40 при фиксированных $P = 0.8$ и $M = 0.02$.

На диаграмме рис.3,а имеются два значения κ , при которых устойчивость СС нарушается путём перехода двух корней (3) в правую полуплоскость. Одна из бифуркаций ($\kappa = \pi/12$) расположена на левой границе участка с $m = 2$ (число корней m уравнения (3) определяется по формуле (4)), а другая – на правой границе участка с

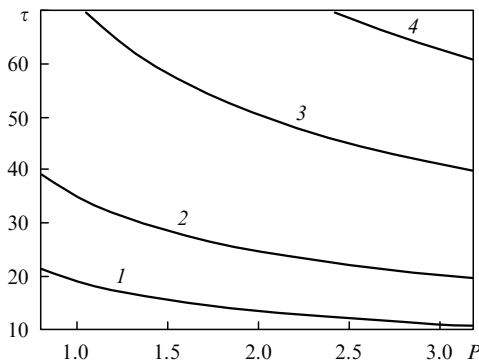


Рис.2. Четыре сепаратрисы в координатах τ, P при $\omega_r/M = 2, \alpha = 3, T = 1000$, соответствующие решениям $\chi_i(\omega_r/M)$ уравнения (11) совместно с уравнениями (П1) – (П4).

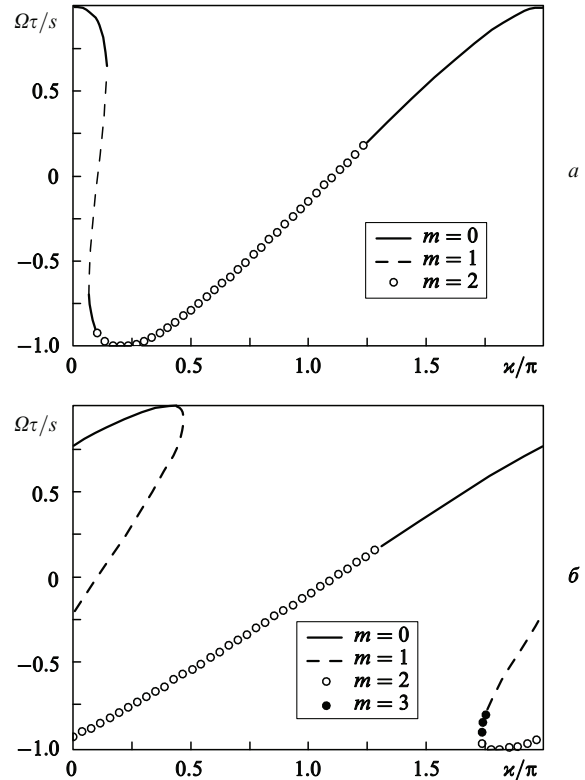


Рис.3. Диаграммы устойчивости СС при $P = 0.8, M = 0.02, \tau = 20$ (а) и 40 (б) (m – число корней при $\text{Re } \lambda > 0$).

$m = 2$ и области с $m = 0$ для устойчивого СС ($\kappa = 5\pi/4$). Первая бифуркация оказывается близкой к левому краю сепаратрисы 1 (см. рис.2). Поскольку устойчивое СС, граничащее на рис.3,а с первой бифуркацией при $\kappa = \pi/12$, ограничено с другой стороны развитием аperiодической неустойчивости при $\kappa = \pi/16$, то интервал κ , где оно может существовать, очень узок, что представляет незначительный интерес с точки зрения эксперимента. Вторая точка бифуркации на рис.3,а, как показывают численные расчёты, соответствует жёсткому возбуждению пикового режима, динамика установления которого описана в предыдущем разделе. Для смены типа бифуркации этой точки на БХ достаточно изменить время задержки τ в соответствии с данными для кривой 2 на рис.2.

Численные расчёты показали, что выше сепаратрисы 2 (рис.2) происходит мягкое возбуждение осцилляций, тогда как ниже её реализуется жёсткий режим возбуждения колебаний. Вблизи сепаратрисы, когда точки бифуркации обоих типов близки в пространстве параметров, конечные состояния резко меняются при малых вариациях физических параметров. Из рис.2 видно, что при $P = 0.8, M = 0.02, \tau = 40$ точка бифуркации должна быть близка к сепаратрисе 2. Диаграмма на рис.3,б показывает такую точку бифуркации при $180^\circ\kappa/\pi = 235^\circ$ (при этом $\Omega\tau/s = 0.2$). Вблизи неё имеется БХ и устанавливаются гармонические колебания. При изменении κ на один градус до 234° развитие колебаний занимает время $\sim 50T$. При этом текущая частота изменяется от 0.055 до 0.042, а форма осцилляций становится сильно ангармонической. Переход в стационарный режим из этого состояния при обратном изменении параметров происходит при $180^\circ\kappa/\pi = 252^\circ$, т. е. имеет место гистерезис.

Двигаясь вдоль сепаратрисы 2 (рис.2), можно добиться смены типа бифуркации рождения осцилляций при

меньшем времени задержки ($\tau = 20$). Для этого нужно выбрать $P = 3.2$ (и соответственно $M = 0.04$), что также отвечает близости к сепаратрисе. БХ наблюдается при $180^\circ/\pi = 229^\circ$, и в узком интервале κ ($229^\circ > 180^\circ/\pi > 227^\circ$) имеют место малые гармонические осцилляции с частотой $\omega = 0.11$. На границе интервала при $180^\circ/\pi = 227^\circ$ происходит жёсткое включение интенсивных колебаний, имеющих почти 100 %-ную модуляцию амплитуды поля. Возвращение из пикового режима в СС осуществляется при $180^\circ/\pi = 242^\circ$. Согласно изложенной теории, во всей области под сепаратрисой 2 ($\tau < 40$ для $P = 0.8$ и $\tau < 20$ для $P = 3.2$) имеет место жёсткое возбуждение пикового режима, а возвращение в СС происходит с гистерезисом.

В исследованной области параметров только кривая 2 на рис.2 представляет практический интерес для изучения смены сценариев развития неустойчивости стационарной генерации от мягкого к жёсткому режиму возбуждения осцилляций. Линейная теория устойчивости для условий жёсткого возбуждения колебаний также предсказывает переход двух корней характеристического уравнения в правую полуплоскость. Численные и аналитические расчеты позволяют дать следующую интерпретацию обнаруженному явлению. Бифуркация Андронова – Хопфа приводит к развитию колебаний, рост амплитуды которых стабилизируется выходом решения на предельный цикл, охватывающий точку СС. Анализ, описанный выше, показал, что с приближением к сепаратрисе область притяжения к предельному циклу сужается. В момент пересечения сепаратрисы теряется устойчивость предельного цикла. Пиковый режим генерации является результатом развития неустойчивости предельного цикла.

В работе [4] была проведена классификация режимов работы диодного лазера, управляемого сигналом с заданными амплитудой и частотой. В частности, было найдено, что предельный цикл, порождаемый БХ, может испытать бифуркацию типа седло – узел с переходом на новый предельный цикл. Взаимодействие предельных циклов – нелинейный процесс. Используя линейную теорию, нам удалось найти параметры задачи, при которых изменяется установившийся нелинейный режим генерации.

Нашу интерпретацию процессов поддерживает также наблюдавшийся в режимах с пиковой генерацией гистерезис: возвращение в стационарный режим путём обратного изменения параметров происходит при других значениях этих параметров, так что в зоне перекрытия при одних и тех же параметрах существуют два устойчивых режима генерации – собственно стационарный и динамический пиковый.

Таким образом, именно сепаратриса 2 (рис.2) наиболее интересна для классификации нелинейных режимов генерации лазера. В пространстве трёх параметров (τ , P , M) искомая сепаратриса может быть изображена в виде функции $\tau(P, M)$, представляющей собой поверхность в трёхмерном пространстве. Рельеф этой функции похож на склон холма с максимумом в левом нижнем углу области определения (рис.4). Рельеф поверхности показан в виде линий уровня. Кривая 2 на рис.2 является пересечением поверхности $\tau(P, M)$ с поверхностью, соответствующей $\omega_r/M = 2$, и проходит через левый нижний и правый верхний углы области определения.

При заданных параметрах τ , P , M , подобрав набег фазы поля в петле ОС κ , можно обеспечить режим малых

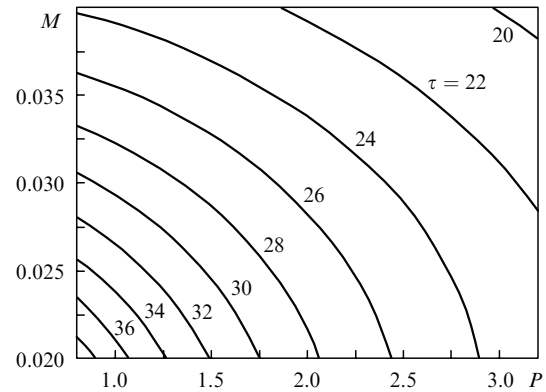


Рис.4. Представление сепаратрисы 2 на рис.2 в виде линий равного уровня функции $\tau(P, M)$.

гармонических колебаний или периодических негармонических пиков (скачок $m = 0 \rightarrow 2$ на рис.3). Выше поверхности сепаратрисы $\tau(P, M)$ реализуется БХ, которая приводит к малым осцилляциям, а ниже происходит жёсткое возбуждение колебаний. В общем случае вектор нормали $\{-\delta\tau/\delta P, -\delta\tau/\delta M, 1\}$ к поверхности $\tau(P, M)$ в трёхмерном пространстве $PM\tau$ задаёт направление изменения параметров в сторону сценария с мягким возбуждением осцилляций.

Следовательно, для перехода из режима малых осцилляций в режим пиковой генерации нужно уменьшить время обхода излучением петли ОС, подобрав при этом мощность накачки. В частности, при фиксированном M и уменьшении P тип бифуркации рождения осцилляций сменяется с БХ на режим с жёстким возбуждением колебаний. Так, при $\tau = 30$ и $M = 0.02$ БХ возможна, если $P(M) > 1.75$. При фиксированном P смена БХ на режим с жёстким возбуждением колебаний происходит при уменьшении константы связи M .

5. Заключение

Выполненный анализ показал существование областей параметров диодного лазера с запаздывающей ОС, в которых малые колебания генерируемого поля, возникшие в результате БХ, становятся неустойчивыми и преобразуются в пикки с новым периодом следования. В рамках линейной по близости к точке бифуркации теории выведено алгебраическое уравнение, из которого может быть найдена вещественная частота осцилляций. Обнаружено, что хотя осцилляторная неустойчивость остаётся, решение алгебраического уравнения, дающее частоту осцилляций, при определённых условиях исчезает. Такое поведение системы может быть проинтерпретировано как смена сценария развития неустойчивости. Численные расчёты показали, что при проходе через точку в пространстве параметров, в которой исчезает частота осцилляций, получаемая из алгебраического уравнения, характер возбуждения осцилляций резко меняется. Малые осцилляции, типичные для БХ, за время, превышающее время релаксации носителей, преобразуются в периодические колебания конечной амплитуды, по форме близкие к пикам. Иными словами, при сколь угодно малом изменении параметров, приводящем в зону неустойчивости, амплитуда установившихся колебаний оказывается конечной, а их форма заметно отличается от гармонической.

Проведённый анализ позволил свести пять исходных физических параметров, от которых зависит лазерная генерация, всего к двум их комбинациям. Выведено простое уравнение, определяющее параметры, при которых происходит смена режима развития неустойчивости стационарной генерации, имеющая характер фазового перехода. Указана связь проведённого анализа с теорией катастроф. В частности, сепаратриса, разделяющая в пространстве параметров различные режимы развития неустойчивости, в терминах теории катастроф является «линией складки» на поверхности сборки. В численных расчётах установлено, что время выхода на режим стационарных колебаний тем больше, чем ближе система к критической точке. Обнаружено также, что в случае, когда возбуждение колебаний имеет жёсткий характер, в динамике генерации лазера существует гистерезис. В области гистерезиса режим генерации зависит от предыстории.

С практической точки зрения проведённый анализ полезен для контролируемого изменения динамики генерации полупроводникового лазера с ОС. Представленная теория позволяет выбрать физические параметры для получения лазерной генерации в режиме формирования коротких импульсов. Область параметров, где такой режим реализуется, оказывается шире для лазеров с малым временем задержки поля в петле ОС. При высоком уровне накачки глубина модуляции доходит почти до 100 %. Гармонические осцилляции, возникающие при БХ, легче реализуются в лазерах с большими временами задержек в петле ОС.

Приложение

В работе [5] было показано, что нетривиальное решение уравнения (5) существует, если частота ω удовлетворяет системе двух трансцендентных уравнений

$$\omega^2 = \omega_r^2 + 4M^2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}, \tag{П1}$$

$$M\omega \sin(\omega\tau) = \frac{1}{2} \omega_r^2 (1 + \alpha^2)^{1/2} \sin(\Omega\tau - \varkappa - \arctan \alpha) - \omega^2 \sin(\Omega\tau - \varkappa). \tag{П2}$$

При условии, что

$$M\omega \sin(\omega\tau) \left[\frac{1}{2} \omega_r^2 (1 + \alpha^2)^{1/2} \sin(\Omega\tau - \varkappa - \arctan \alpha) - \omega^2 \sin(\Omega\tau - \varkappa) \right] \geq 0, \tag{П3}$$

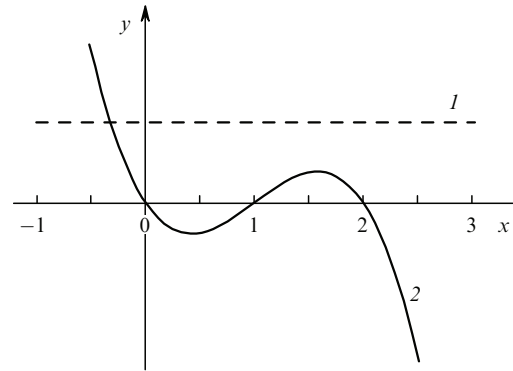


Рис.П1. Иллюстрация к решению уравнения (П4): $y = \text{const} > 0$ (1), $y = x(x - x_1)(x_2 - x)$, $x = \omega^2$, $x_1 = \omega_r^2$, $x_2 = \omega_r^2 + 4M^2$ (2).

система уравнений (П1), (П2) эквивалентна следующему бикубическому уравнению:

$$\begin{aligned} &\omega^2(\omega^2 - \omega_r^2)(4M^2 + \omega_r^2 - \omega^2) \\ &= 4M^2 \left[\frac{1}{2} \omega_r^2 (1 + \alpha^2)^{1/2} \sin(\Omega\tau - \varkappa - \arctan \alpha) - \omega^2 \sin(\Omega\tau - \varkappa) \right]^2. \end{aligned} \tag{П4}$$

Из вида левой части уравнения (П4) можно заключить, что один из его корней всегда отрицателен (рис.П1). Следовательно, этот корень не соответствует БХ. У кубического уравнения может быть либо один, либо три вещественных корня. Только в последнем случае можно ожидать появления вещественных частот колебаний (т. е. корней при $\omega^2 > 0$). Таким образом, для возникновения БХ необходимо, чтобы все три корня кубического уравнения были вещественными.

1. Verduyn Lunel S.M., Krauskopf B., in *Fundamental Issues of Non-linear Laser Dynamics* (Melville, NY: AIP Conf. Proc., 2000, Vol. 548, p. 66).
2. Lang R., Kobayashi K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
3. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **34** (7), 630 (2004).
4. Wiczorek S., Krauskopf B., Lenstra D. *Opt. Commun.*, **172**, 279 (1999).
5. Сухарев А.Г., Напартович А.П. *Квантовая электроника*, **37** (2), 149 (2007).
6. Winful H.G., Rahman L. *Phys. Rev. Lett.*, **65** (13), 1575 (1990).
7. Winful H.G., Wang S.S. *Appl. Phys. Lett.*, **53** (20), 1894 (1988).
8. Гилмор Р. *Прикладная теория катастроф* (М.: Мир, 1984, кн. 1, с. 17, 69, 175).
9. Арнольд В.И. *УМН*, **30** (5), 3 (1975).