

# Усиление коротких световых импульсов со сферическим волновым фронтом

Т.И.Кузнецова, Л.Д.Михеев

*Рассмотрено прохождение конического светового пучка через оптический усилитель. В основу теоретического анализа положен аналог системы уравнений Франца–Нодвика, учитывающий специфику сферических волн. Сформулированы условия применимости укороченных уравнений для описания сферических волн, распространяющихся в нелинейной среде. Сопоставлены особенности процесса усиления для различных углов расходимости пучка. Исследовано изменение поперечной структуры расходящегося пучка, возникающее из-за насыщения усиления.*

**Ключевые слова:** оптический квантовый усилитель, конический световой пучок, двухуровневая резонансная среда, фемтосекундные импульсы, фотохимический лазер.

## 1. Введение

Разработке источников высокоинтенсивного оптического фемтосекундного излучения посвящено большое число исследований последних лет (см. обзор [1] и приведенные в нем ссылки). В этих исследованиях наряду с подходом, основанным на применении твердотельных оптических квантовых усилителей, в настоящее время наметилось новое направление, связанное с использованием в оконечных каскадах усиления газовых фотохимических усилителей [2–7]. Для достижения больших мощностей в таких усилителях применяются многопроходные схемы типа оптических ловушек [3–5] или неустойчивые конфокальные резонаторы [6, 8].

В расчете выходных параметров излучения лазерных систем существенное место занимает анализ взаимодействия светового поля с усиливающей средой в режиме насыщения. Для ряда оптических схем анализ может быть выполнен на основе результатов, полученных Францем и Нодвиком [9], для интенсивного короткого импульса, имеющего плоский волновой фронт. Если же в схеме усилителя используется неустойчивый резонатор, то эффект насыщения требуется рассматривать для сферических волн. Отметим, что эта задача привлекала внимание исследователей ранее в связи с предложением применять в эксперименте твердотельные усиливающие элементы в виде раструбов или набора дисков с последовательно увеличивающимся диаметром [10–12]. К рассмотрению световых пучков переменной диаметра обращались также авторы [13] при исследованиях вынужденного комбинационного рассеяния. В работах [10–13], в которых использовались уравнения энергетического баланса, указывалось на специфические особенности усиления расхо-

дящихся пучков. Однако коэффициенты усиления, которые определяются численным путем, были найдены для отдельных конкретных вариантов, отвечающих в основном случаям либо слабых, либо очень сильных сигналов.

В настоящей работе проводится расчет характеристик усилителей на газовых активных средах  $\text{XeF}(\text{C} - \text{A})$ ,  $\text{Kr}_2\text{F}$ ,  $\text{Xe}_2\text{Cl}$ , причем для нас представляют интерес такие параметры усилителя, при которых воспользоваться имеющимися в литературе результатами нельзя даже для ориентировочных оценок энергии выходного излучения. Прежде всего мы рассмотрим вопрос о применимости уравнений баланса к описанию распространения сферических волн в нелинейной среде. В ходе этого рассмотрения будут указаны условия, при которых становится возможным описание сферических полей (строго говоря, многокомпонентных) с помощью упрощенных укороченных уравнений. Кроме того, мы представим укороченные уравнения в таком виде, который позволит рассчитать деформацию поперечной структуры светового пучка, обусловленную эффектом насыщения.

## 2. Распространение конического светового пучка в усиливающей среде

Из уравнений Максвелла в отсутствие свободных зарядов и токов следует уравнение

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля;  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  – вектор электрической индукции (предполагается, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является скалярной функцией величины  $EE^*$ ). Будем считать, что эту функцию можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0$  – константа, а комплексная величина  $\tilde{\varepsilon}$  ( $|\tilde{\varepsilon}| \ll \varepsilon_0$ ) отвечает вкладу лазерного перехода в диэлектрическую

Т.И.Кузнецова, Л.Д.Михеев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: tkuzn@sci.lebedev.ru, mikhchev@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 17 ноября 2007 г., после доработки – 11 марта 2008 г.

проницаемость. Зависимость от насыщения испытывает только  $\tilde{\epsilon}$ , причем  $\tilde{\epsilon}$  может изменяться во времени и в пространстве лишь в зависимости от  $EE^*$ . Поскольку нам предстоит рассмотрение конических пучков, целесообразно использовать сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  ( $r$  – расстояние от начала координат,  $\theta$  – полярный угол,  $\varphi$  – азимутальный угол) и компоненты поля  $E_r, E_\theta, E_\varphi$ . При этом величина  $r$  будет соответствовать радиусу кривизны волнового фронта сферической волны, которую мы и будем рассматривать в дальнейшем. В ряде задач электродинамики оказывается удобным использовать не поля, а векторные потенциалы. Если  $\epsilon$  – константа, полное описание дается с помощью векторных потенциалов для ТМ- и ТЕ-мод, которые, в свою очередь, можно выразить через две функции Герца. Выражения для полей через функции Герца можно найти в монографиях [14, 15]. В нашем случае, однако,  $\epsilon$  не является константой, т.к. эффект насыщения приводит к зависимости  $\tilde{\epsilon}$  от пространственной и временной координат. Вследствие этого компоненты потенциалов подчиняются уравнениям более сложного вида, чем уравнения для однородной среды, и техника расчета, изложенная в [15], непригодна. В связи с трудностями, возникающими при исследовании наиболее общего случая, примем ряд ограничений, которые отвечают условиям, типичным для оптического квантового усилителя.

Будем рассматривать бегущие волны, у которых имеется несущая частота  $\omega_0$ , пространственные осцилляции описываются волновым числом  $k = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0}/c$ , а огибающая характеризуется временным масштабом  $\tau_0$  и пространственным масштабом  $l$ . Введем также поперечный масштаб изменения поля  $l_\perp = r\tilde{\theta}$ , где  $\tilde{\theta}$  – угловая ширина первоначального пучка (если в пучке есть еще и угловая структура, то в оценку  $l_\perp$  войдет масштаб этой структуры). Предположим, что выполняются условия  $l^{-1} \ll k, \tau_0^{-1} \ll \omega_0, l_\perp^{-1} \ll k$ . Последнее неравенство имеет место, если значение  $r$  не слишком мало ( $r > \lambda/\tilde{\theta}$ ), что заведомо выполняется в реальных схемах усилителей. Это условие позволяет нам отбросить производные по угловым переменным в уравнении (1) и получить из него следующие уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE_\theta(r, \theta, \varphi, t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D_\theta(r, \theta, \varphi, t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE_\varphi(r, \theta, \varphi, t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D_\varphi(r, \theta, \varphi, t) = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D_r(r, \theta, \varphi, t) = 0. \quad (5)$$

Неравенство  $\tau_0^{-1} \ll \omega_0$  вместе с предположением относительно величины вклада резонансного перехода в  $\epsilon$  позволяет нам отбросить величины порядка  $(\tilde{\epsilon}/\epsilon_0)(\omega_0\tau)^{-1}$  при вычислении временных производных в уравнениях (3), (4). После этого уравнения (3), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE_j(r, \theta, \varphi, t)] - \frac{1}{c^2} \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_j(r, \theta, \varphi, t) \\ &= \frac{1}{c^2} \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_j(r, \theta, \varphi, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь индекс  $j$  означает проекцию вектора  $E$  на направления  $\theta$  или  $\varphi$ . Из уравнения (5) следует, что при сделанных предположениях компонента  $E_r$  обращается в нуль. Именно уравнение (6) будет основой всего дальнейшего обсуждения.

Сделаем некоторые замечания по поводу уравнения (6). Прежде всего подчеркнем, что оно содержит только производные по  $r$ ; угловые переменные входят в (6) лишь как параметры. В этом отношении имеется аналогия с описанием квантово-механической волновой функции вблизи рассеивающего центра [16]. В ряде задач теории рассеяния структура волновой функции изменяется только в зависимости от расстояния до рассеивающего центра. В нашем случае отличие состоит в том, что в усилителе имеется нелинейность, поэтому рассматриваемое уравнение (6) является нелинейным, в него входит величина  $\tilde{\epsilon}$ , зависящая от  $EE^*$ . Благодаря этому уравнение (6) содержит члены, описывающие изменение угловой структуры.

Уравнение (6) не дает возможности анализировать дифракционные эффекты, поскольку в нем отброшены производные по угловым переменным. Впрочем роль дифракции не всегда оказывается существенной для расходящихся пучков. Так, если исходный угол расходимости значительно превышает дифракционный угол, то во многих случаях учет дифракции приведет лишь к малому относительно изменению полной расходимости пучка.

В отличие от дифракционных эффектов, эффекты насыщения, как уже было сказано, в уравнении (6) учтены, и на его основе можно рассматривать изменения угловой структуры в ходе нелинейного усиления, что будет продемонстрировано в п.4.3.

Таким образом, в качестве исходного уравнения мы берем уравнение (6). Преобразуем его с помощью подстановки

$$E_j(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{r} U_j(r, \theta, \varphi, t). \quad (7)$$

При этом уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \epsilon_0 \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Далее используем технику, основанную на введении медленно меняющихся амплитуд (см., напр., монографии [17, 18]), и применим ее для упрощения уравнения (8). Представляя функцию  $U_j$  в виде произведения медленно меняющейся функции  $u_j$  и осциллирующего множителя  $\exp(-i\omega_0 t + ikr)$ , т.е. в виде

$$\begin{aligned} &U_j(r, \theta, \varphi, t) = u_j(r, \theta, \varphi, t) \\ &\times \exp(-i\omega_0 t + ikr), \quad k = \frac{\omega_0}{v}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \quad (10)$$

– фазовая скорость, и предполагая выполненными условия

$$\left| \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial u_j}{\partial r} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right| \ll \omega_0 \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|, \quad (11)$$

из (8) находим

$$2ik \frac{\partial u_j}{\partial r} + 2i\omega_0 \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\tilde{\varepsilon} \frac{\omega_0^2}{c^2} u_j(r, t). \quad (12)$$

Отсюда можно получить уравнение для произведения  $u_j u_j^*$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} u_j u_j^* + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \frac{\partial}{\partial t} u_j u_j^* = -\frac{\text{Im} \tilde{\varepsilon} \omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{\varepsilon_0 c} u_j u_j^*. \quad (13)$$

Для усиливающей среды имеем  $\text{Im} \tilde{\varepsilon} < 0$ , причем величина  $|\text{Im} \tilde{\varepsilon}|$  пропорциональна коэффициенту усиления. Обозначим

$$-\frac{\text{Im} \tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \beta \frac{N}{N_0}, \quad (14)$$

где  $N$  – плотность инверсной населенности;  $N_0$  – та же плотность в отсутствие насыщения. Далее из (13) можно получить уравнение для величины  $\sum_j u_j u_j^*$  – суммы квадратов модулей всех компонент  $u_j$ . Используя (14) и (10), на основе уравнения (13) находим

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \sum_j u_j u_j^* = \beta \frac{\omega_0}{v} \frac{N}{N_0} \sum_j u_j u_j^*. \quad (15)$$

Теперь перейдем к рассмотрению интенсивности  $I$  электрического поля, просуммированной по всем компонентам:

$$\sum_j E_j E_j^* = I. \quad (16)$$

С помощью (7), (9) и (15) находим соотношение

$$\sum_j u_j u_j^* = Ir^2, \quad (17)$$

и уравнение (15) принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) (Ir^2) = \beta \frac{\omega_0}{v} \frac{N}{N_0} Ir^2. \quad (18)$$

Отметим, что уравнение (18) можно получить более простым путем, если не акцентировать внимание на различиях амплитуд электрического и магнитного полей и пренебречь продольными компонентами полей, вклад которых является существенным лишь вблизи центра кривизны расходящегося пучка. При изложенном здесь выводе мы установили условия применимости уравнения (18): необходимость выполнения неравенства  $r > \lambda/\theta$ . Кроме того, уравнение (18) позволяет исследовать не только зависимость интенсивности излучения от радиальной координаты, но и ее параметрическую зависимость от угловых переменных.

Далее анализ взаимодействия сверхкороткого импульса, имеющего расходящийся волновой фронт, с нелинейно усиливающей средой будет проводиться на основе уравнения (18), которое будет рассматриваться совместно с уравнением для среды.

### 3. Насыщение усиления в случае конического пучка

Переходя к анализу взаимодействия светового поля с активной средой, введем вместо диэлектрической проницаемости более удобный для обсуждения параметр задачи: – сечение усиления

$$\sigma = \beta \frac{\omega_0}{v N_0}. \quad (19)$$

С использованием (19) уравнение (18) примет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) (Ir^2) = \sigma N Ir^2. \quad (20)$$

Полученное уравнение имеет формальное сходство с первым уравнением системы Франца–Нодвика. Отличие состоит лишь в том, что здесь оно написано относительно переменной  $Ir^2$ , а не переменной  $I$ , как это было сделано в работе [9].

Уравнение для плотности инверсной населенности в условиях медленной (по отношению к длительности излучения) релаксации уровней, как известно, имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) NI, \quad (21)$$

где  $g_1$  ( $g_2$ ) – статистический вес нижнего (верхнего) рабочего уровня. В работе [9] исследовался случай невырожденных уровней, когда  $g_1 = g_2 = 1$ . Для рассматриваемых нами переходов эксимерных молекул, у которых нижний уровень – разлетный, в (21) следует положить  $g_2/g_1 = 0$ , так что уравнение для  $N$  будет иметь вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} NI. \quad (22)$$

Уравнения (20), (22) представляют собой основную систему уравнений для задачи об импульсах со сферическим фронтом. В соответствии с методикой Франца–Нодвика прежде всего введем локальную временную координату  $\tau = t - r/v$ , оставляя  $r$  в качестве пространственной координаты. При этом уравнения (20), (22) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (Ir^2) = \sigma N Ir^2, \quad (23)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = -\frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} NI. \quad (24)$$

Приведем для удобства краткое изложение методики Франца–Нодвика (с учетом особенностей нашего случая). Объединяя уравнения (23) и (24), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} (Ir^2) + \frac{\hbar \omega_0}{v} r^2 \frac{\partial N}{\partial \tau} = 0. \quad (25)$$

Кроме того, интегрируя (24), находим

$$N(r, \theta, \varphi, \tau) = N(r, \theta, \varphi, -\infty) \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \int_{-\infty}^{\tau} I(r, \theta, \varphi, \tau') d\tau' \right]. \quad (26)$$

Введем обозначение

$$y(r, \theta, \varphi, \tau) = \frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \int_{-\infty}^{\tau} I(r, \theta, \varphi, \tau') d\tau'. \quad (27)$$

Тогда формулу (26) можно записать следующим образом:

$$N(r, \theta, \varphi, \tau) = N(r, \theta, \varphi, -\infty) \exp[-y(r, \theta, \varphi, \tau)], \quad (28)$$

после чего уравнение (25) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} r^2 \right) + \sigma r^2 \frac{\partial N}{\partial \tau} = 0. \quad (29)$$

Изменим порядок дифференцирования в первом слагаемом в левой части уравнения (29) и проинтегрируем (29) по  $\tau$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{ [y(r, \theta, \varphi, \tau) - y(r, \theta, \varphi, -\infty)] r^2 \} \\ + \sigma r^2 [N(r, \theta, \varphi, \tau) - N(r, \theta, \varphi, -\infty)] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее используем выражение (28) и примем следующие допущения:  $y(r, \theta, \varphi, -\infty) = 0$ ,  $N(r, \theta, \varphi, -\infty) = N_0$  (это означает, что при  $\tau = -\infty$  излучение отсутствует и что среда изначально однородна). При этом уравнение (30) сведется к простому виду:

$$\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{2}{r} y = N_0 \sigma [1 - \exp(-y)]. \quad (31)$$

Это уравнение должно решаться совместно с граничным условием, задающим форму и амплитуду импульса на входе в усиливающую среду. Обозначим через  $r_0$  начальное значение радиуса кривизны волнового фронта (на входе в усиливающую среду). При  $r = r_0$  характеристики входного импульса известны, т. е. известна функция  $I(r_0, \theta, \varphi, \tau)$ . При этом в силу соотношения (27) известной является также функция  $y(r_0, \theta, \varphi, \tau)$ . Функция

$$y(r_0, \theta, \varphi, \tau) = \frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \int_{-\infty}^{\tau} I(r_0, \theta, \varphi, \tau') d\tau'$$

представляет собой граничное условие для уравнения (31), т. е. дает вид функции  $y$  на входе в среду. Из уравнения (31) видно, что локальное время  $\tau$  входит в него только как параметр. Решая задачу, мы можем для произвольной формы входного импульса найти зависимость  $y(r, \theta, \varphi, \tau)$  и затем с помощью дифференцирования определить функцию  $I(r, \theta, \varphi, \tau)$ , т. е. получить информацию об изменении как интенсивности, так и формы импульса на протяжении всего усилителя. Впрочем, для практических целей часто представляет интерес более простая задача – количественная оценка возрастания энергии, заключенной во всем импульсе. Следующий раздел статьи посвящен получению именно этой оценки.

## 4. Особенности усиления сверхкороткого импульса в случае сферического волнового фронта

### 4.1. Зависимость плотности энергии от координаты

Перейдем к анализу изменения плотности электромагнитной энергии импульса при распространении его в усилителе. Основываясь на уравнении (31), будем рассматривать квадрат модуля напряженности электрического поля  $I(r, \theta, \varphi, \tau)$ , проинтегрированный по всей длительности импульса. Введем обозначение

$$Y(r, \theta, \varphi) = y(r, \theta, \varphi, \infty) = \frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, \theta, \varphi, \tau') d\tau'. \quad (32)$$

Уравнение для величины  $Y$

$$\frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{2}{r} Y = N_0 \sigma [1 - \exp(-Y)] \quad (33)$$

имеет, разумеется, ту же структуру, что и приведенное ранее уравнение (31) для величины  $y$ .

Отметим, что значению  $Y = 1$ , или

$$\frac{\sigma v}{\hbar \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, \theta, \varphi, \tau') d\tau' = 1,$$

отвечает существенное насыщение. Вклад вынужденных переходов в энергию поля, как видно из (33), определяется величиной  $N_0 \sigma [1 - \exp(-Y)]/Y$ , так что значениям  $Y \geq 1$  действительно отвечает заметное обеднение населенности рабочего уровня.

В этом разделе и в п.4.2 рассматривается случай, когда плотность энергии входного излучения равномерно заполняет конус с углом раствора  $2\theta_0$ , так что  $Y(r_0, \theta, \varphi) = Y_0$  при  $\theta \leq \theta_0$  и  $Y(r_0, \theta, \varphi) = 0$  при  $\theta > \theta_0$ .

Приведем ряд решений уравнения (33) в графическом виде. Для расчетов были выбраны параметры, соответствующие проектируемому в настоящее время фотохимическим усилителям. Мы взяли ненасыщенный коэффициент усиления  $N_0 \sigma = 0.05 \text{ см}^{-1}$ , в качестве начального радиуса кривизны в этой серии расчетов был выбран радиус  $r_0 = 2 \text{ см}$ . Длину усилителя приняли равной  $r_f - r_0 = 100 \text{ см}$ , где  $r_f$  – радиус кривизны на выходе усилителя. Было взято несколько значений плотности входной энергии, соответствующих значениям  $Y_0$  на входе усилителя 0.1, 0.5 и 1.0. Зависимости величины  $Y$  от безразмерной координаты  $N_0 \sigma r$  (длины, отнесенной к длине усиления) приведены на рис.1,а. Они демонстрируют немонотонную зависимость  $Y$  от координаты, что связано с противодействием двух факторов: усиления и расширения пучка. Самое заметное ослабление интенсивности из-за расширения пучка происходит при наименьших значениях радиуса кривизны  $r$ .

Отметим, что в предельном случае малого насыщения, т. е. при  $Y \ll 1$ , решение уравнения (33) имеет вид

$$Y = Y_0 \frac{r_0^2}{r^2} \exp[N_0 \sigma (r - r_0)], \quad (34)$$

а в случае сильного насыщения, т. е. при  $Y \gg 1$ , имеем

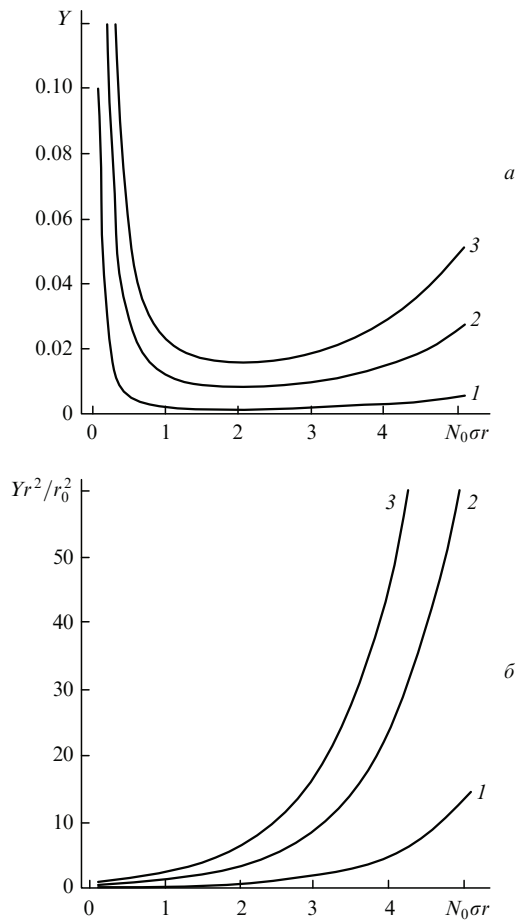


Рис.1. Зависимости интегрального по времени квадрата модуля напряженности электрического поля  $Y$  в единицах плотности энергии насыщения (а) и величины  $Yr^2/r_0^2$  (б) от безразмерной радиальной координаты  $N_0\sigma r$  при  $Y_0 = 0.1$  (1), 0.5 (2) и 1.0 (3).

$$Y = Y_0 \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{N_0\sigma r}{3} - \frac{N_0\sigma r_0^3}{3r^2}. \quad (35)$$

Структура этих двух выражений также свидетельствует о немонотонном характере зависимости плотности энергии от длины усиления. Переход от участка ослабления интенсивности к области ее роста определяется условием  $N_0\sigma r > 2Y/[1 - \exp(-Y)]$ . Исследование предельных случаев и указание на немонотонный характер изменения интенсивности имеется в работах [11, 12].

Введем в рассмотрение фактор, учитывающий расширение пучка. Умножим решение уравнения (33) на квадратичную функцию  $r^2/r_0^2$ . Новая функция  $Yr^2/r_0^2$  уже будет монотонно зависеть от координаты. Монотонный рост функции  $Yr^2/r_0^2$  при увеличении переменной  $N_0\sigma r$  иллюстрирует рис.1,б.

С формальной точки зрения приведенные выражения, как и зависимости на рис.1,а, б, дают достаточно полное представление о свойствах усилителя, т. к. уравнение для усилителя содержит единственную независимую переменную, произведение  $N_0\sigma r$ , а граничное условие задается единственным параметром  $Y(r_0)$ . Однако результаты такого рассмотрения не позволяют получить в явной форме зависимость усиления от угла расходимости светового пучка. Роль этого угла будет более наглядной, если в качестве исходной характеристики пучка взять его диаметр на входе усилителя, а не радиус кривизны. Пусть исходный диаметр пучка составляет  $2a$ , а угол расходи-

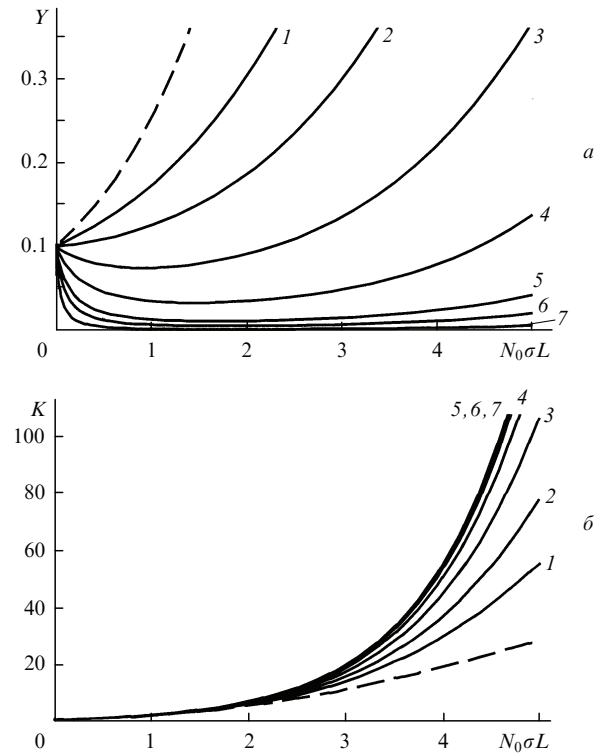


Рис.2. Зависимости интегрального по времени квадрата модуля напряженности электрического поля  $Y$  в единицах плотности энергии насыщения (а) и коэффициента усиления интегрального по времени и поперечной координате квадрата модуля напряженности электрического поля  $K$  (б) от безразмерной координаты  $N_0\sigma L \equiv N_0\sigma(r - r_0)$  для углов расходимости пучка  $\theta_0 = 0.625^\circ$  (1),  $1.25^\circ$  (2),  $2.5^\circ$  (3),  $5^\circ$  (4),  $10^\circ$  (5),  $15^\circ$  (6) и  $30^\circ$  (7). Штриховые кривые отвечают случаю плоского волнового фронта.

мости –  $2\theta_0$ . При этом радиус кривизны волнового фронта на входе  $r_0 = a/\sin \theta_0$ . Построим ряд решений уравнения (33), считая, что для всех вариантов исходный диаметр составляет одну и ту же величину ( $2a = 2$  см), ненасыщенный коэффициент усиления  $N_0\sigma = 0.05$  см<sup>-1</sup>, а плотность энергии на входе во всех случаях одинакова и соответствует  $Y = 0.1$  (параметр насыщения 0.1). Теперь в качестве независимой переменной мы выбираем величину  $N_0\sigma L \equiv N_0\sigma(r - r_0)$ , т. е. строим зависимость от длины усилителя  $L$ , помещая точку, соответствующую входу в усилитель, в начало координат для всех исследуемых вариантов. Результаты расчета приводятся на рис.2,а. Очевидно, что немонотонный характер зависимости  $Y$  от координаты проявляется сильнее при бóльших углах расходимости.

#### 4.2. Зависимость полной энергии импульса от координаты

До сих пор мы имели дело не с полной энергией импульса, а с энергией, отнесенной к единичной площадке поперечного сечения. Перейдем теперь к интегральной характеристике, т. е. к величине  $Y$ , проинтегрированной по поперечной координате.

Начнем с того, что перейдем от рассматриваемых нами величин к общепринятым определениям энергии и плотности энергии. Обозначим плотность энергии, связанную с компонентами электрического поля усиленного импульса, через  $w$ . Пользуясь стандартным выражением для плотности энергии квазимонохроматического поля и формулой (16), можем написать



$$w(r, \tau) = \frac{1}{16\pi} \epsilon_0 \sum_j E_j E_j^* \equiv \frac{1}{16\pi} \epsilon_0 I(r, \tau). \tag{36}$$

Для полной энергии  $W$  имеем

$$W = \iiint w(r, \tau) r^2 dr d\Omega = \frac{\Omega_0}{16\pi} \int w r^2 dr, \tag{37}$$

где  $\Omega_0 = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$  – телесный угол, соответствующий коническому пучку. Отметим, что плотность энергии  $w$  сосредоточена в шаровом слое, приближенная толщина которого составляет  $\tau_p v$ , где  $\tau_p$  – длительность импульса. Поскольку эта величина мала ( $\tau_p v \equiv l \ll r$ ), то в области локализации функции  $w$  радиус  $r$  можно считать постоянным. По этой причине множитель  $r^2$  в (37) может быть вынесен за знак интеграла. Другой множитель ( $w$ ) зависит от  $r$  в основном через  $\tau = t - r/v$ . Поэтому в выражении (37) можно с хорошей точностью положить  $\int w r^2 dr = r^2 v \int w d\tau$ . С помощью этого упрощения и с учетом соотношений (36) и (32), связывающих  $w, y, Y$ , из (37) получаем следующее выражение для энергии импульса:

$$W = \frac{\Omega_0 \epsilon_0 \hbar \omega_0}{16\pi \sigma} r^2 Y. \tag{38}$$

При  $r = r_0$  из (38) находим энергию импульса на входе в усилитель

$$W_0 = \frac{\Omega_0 \epsilon_0 \hbar \omega_0}{16\pi \sigma} r_0^2 Y_0. \tag{39}$$

В соответствии с (38), (39) коэффициент усиления по энергии  $K$  можно представить в виде

$$K = \frac{W}{W_0} = \frac{r^2 Y}{r_0^2 Y_0}. \tag{40}$$

Если же перейти от радиуса кривизны волнового фронта к расстоянию  $L = r - r_0$ , отсчитываемому от входа в усилитель, то получаем следующее выражение для коэффициента усиления:

$$K = \frac{(r_0 + L)^2 Y(r_0 + L)}{r_0^2 Y(r_0)}. \tag{41}$$

На рис.2,б показана зависимость коэффициента усиления от расстояния, отсчитываемого от входа в усилитель, при нескольких значениях угла расходимости пучка. В отличие от локальной плотности энергии, приведенной на рис.2,а, интегральный коэффициент усиления монотонно возрастает при увеличении длины усилителя. Большим углом расходимости соответствует большее усиление. Из рис.2,б видно, что при углах расходимости свыше  $5^\circ$  увеличение угла не дает выигрыша в коэффициенте усиления по энергии. Для сравнения на рис.2,б приведена также зависимость коэффициента усиления для импульса с плоским волновым фронтом. В этом случае коэффициент усиления имеет существенно меньшие значения, чем в случае расходящихся пучков.

### 4.3. Изменение поперечного профиля интенсивности излучения при усилении

Рассмотрим входной импульс, имеющий плавную зависимость интенсивности излучения от поперечной координаты. Положим, что поперечная структура исходного

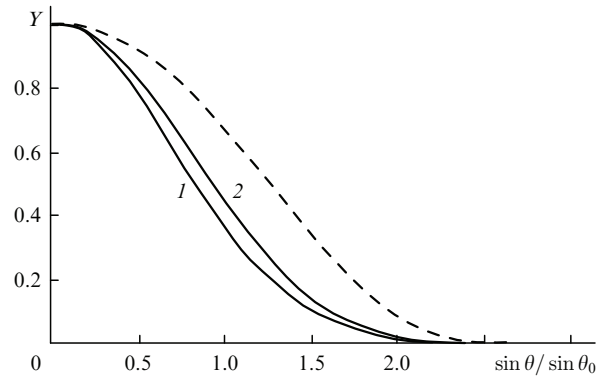


Рис.3. Поперечная структура расходящегося пучка в усилителе на входе (1) и на выходе при угле расходимости  $2.5^\circ$  и коэффициенте усиления  $N_0 \sigma L = 5.0$  (2). Штриховой кривой изображена поперечная структура усиленного светового пучка с плоским волновым фронтом.

излучения имеет вид  $Y(r, \theta, \varphi) = Y_0 \exp(-\sin^2 \theta / \sin^2 \theta_0)$ , причем плотность энергии на оси пучка составляет 0.1 в единицах плотности энергии насыщения. Параметры усилителя выберем такими же, как и в предыдущих расчетах:  $2a = 2$  см,  $L = 100$  см,  $\sigma_0 N = 0.05$  см $^{-1}$ . Возьмем угол  $\theta_0 = 2.5^\circ$ . На рис.3 изображены исходный профиль плотности энергии и профиль на выходе усилителя. Для сравнения показано также, какой вид приобретает такой же исходный профиль при усилении плоскопараллельного пучка ( $\theta_0 \rightarrow 0$ ). Видно, что в расходящемся пучке поперечная структура искажается значительно меньше, чем в пучке с плоским волновым фронтом.

## 5. Выводы

Настоящая работа связана с задачей получения мощных сверхкоротких световых импульсов и направлена на формирование теоретического подхода к оптимизации практических конструкций усилителя. Кратко перечислим основные результаты работы.

Получены условия применимости укороченного уравнения для сферических волн, распространяющихся в нелинейной среде.

На основе уравнения для сферических волн и уравнения для двухуровневой резонансной среды, у которой время релаксации инверсной населенности превышает длительность импульса, проанализированы особенности изменения плотности энергии в усилителе.

Показано, что интегральный по поперечной координате коэффициент усиления оказывается большим для больших углов расходимости и (при одинаковых сечениях входного пучка) может многократно превышать коэффициент усиления импульса с плоским волновым фронтом.

Исследована деформация поперечного профиля интенсивности светового пучка в усилителе. Показано, что искажения в случае расходящегося пучка оказываются значительно слабее, чем в случае плоскопараллельного пучка. Варьирование исходного угла расходимости позволяет целенаправленно изменять поперечный профиль интенсивности выходного излучения.

Авторы благодарны В.С.Лебедеву за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке программ «Оптическая спектроскопия и стандарты частоты» Отделения

физических наук РАН и «Фемтосекундная оптика и новые оптические материалы» Президиума РАН, а также РФФИ (грант № 07-02-00873).

1. Mourou G.A., Tajima T., Bulanov S.V. *Rev. Mod. Phys.*, **78**, 309 (2006).
2. Mikheev L.D. *Laser Part. Beams*, **10**, 473 (1992).
3. Малиновский Г.Я., Мамаев С.Б., Михеев Л.Д., Москалев Т.Ю., Сентис М.Л., Черемискин В.И., Яловой В.И. *Квантовая электроника*, **31**, 617 (2001).
4. Tcheremiskine V.I., Sentis M.L., Mikheev L.D. *Appl. Phys. Lett.*, **81** (3), 403 (2002).
5. Clady R., Coustillier G., Gastaud M., Sentis M., Spiga P., Tcheremiskine V., Uteza O., Mikheev L.D., Mislavskii V., Chambaret J.P., Cheriaux G. *Appl. Phys. B*, **82**, 347 (2006).
6. Losev V., Ivanov N., Mikheev L., Wojchenko A., Tkachev A., Yakovlenko S. *Abstr. Int. Conf. Ultrahigh Intensity Lasers (ICUIL 2006)* (Cassis, France, 2006, pp 197–199).
7. Mikheev L., Kuznetsova T., Sentis M., Tcheremiskine V., Uteza O. *Abstr. Int. Conf. Ultrahigh Intensity Lasers (ICUIL 2006)* (Cassis, France, 2006, pp 64–66).
8. Hoffman Th., Sharp T.E., Dane C.B., et al. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28** (5), 1366 (1992).
9. Frantz L.M., Nodvik J.S. *J. Appl. Phys.*, **34**, 2346 (1963).
10. Huhges J.L. *Appl. Opt.*, **6**, 1411 (1967).
11. Jago J.M. *Appl. Opt.*, **9**, 227 (1970).
12. Баранова Н.Б., Сенатский Ю.В., Тюрин Ю.Л., Щеглов В.А., *Квантовая электроника*, № 5, 57 (1973).
13. Васин А.П., Ефимков В.Ф., Зубарев И.Г., Петрухин А.Р., Соболев В.Б. *Квантовая электроника*, **17**, 920 (1990).
14. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Сов. радио, 1957).
15. Harrington R.F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields* (New York, Toronto, London: McGraw Hill, 1961).
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1988).
17. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988).
18. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).