

# Теоретическое исследование силы светового давления, действующей на сферическую диэлектрическую частицу произвольного размера в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн

Д.В.Гузатов, Л.С.Гайда, А.А.Афанасьев

*Детально исследована сила светового давления, действующая на сферическую диэлектрическую частицу, находящуюся в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн, при разных радиусах частицы и углах падения волн.*

**Ключевые слова:** сила светового давления, интерференция электромагнитных волн, рассеяние света.

## 1. Введение

В 1986 г. впервые был продемонстрирован прибор, позволяющий удерживать и перемещать малые диэлектрические частицы лазерным излучением [1]. Годом позже исследователям из той же научной группы удалось пучком ИК лазерного излучения переместить живую клетку, не повреждая ее [2]. Устройство, позволяющее перемещать малые диэлектрические частицы и биологические объекты без их повреждения с помощью лазерного излучения, получило название «лазерный пинцет». В настоящее время лазерный пинцет находит все большее применение в биологии и медицине при исследовании вирусов и бактерий [3], молекул ДНК [4], процессов, происходящих внутри живой клетки [5], и др. Движение малых диэлектрических частиц в поле лазерного излучения становится возможным благодаря действию силы светового давления, которую условно разделяют на две части: градиентную силу и силу рассеяния [6]. В случае малых диэлектрических частиц силой рассеяния, как правило, можно пренебречь по сравнению с градиентной силой, направленной вдоль градиента интенсивности электромагнитного поля [7, 8]. Под действием градиентной силы, в зависимости от знака поляризуемости, малая диэлектрическая частица стремится попасть в зону максимальной (минимальной) интенсивности поля, где действие силы минимально.

Помимо биологических применений, сила светового давления может быть использована для создания искусственных гетерогенных сред в виде жидкой суспензии взвешенных диэлектрических частиц с управляемыми оптическими свойствами. Такие среды могут иметь большие значения оптического коэффициента Керра и приме-

няться в качестве широкополосных нелинейных сред для лазерного излучения с малой интенсивностью и большой длительностью импульса [9 – 11]. Простейшим способом создания регулярной модуляции интенсивности световых полей является интерференция двух световых пучков, приводящая к гармонической модуляции интенсивности лазерного излучения. Управление периодом модуляции интенсивности с помощью изменения угла схождения интерферирующих пучков позволяет варьировать действие силы светового давления на диэлектрическую частицу. На рис.1 показаны результаты эксперимента

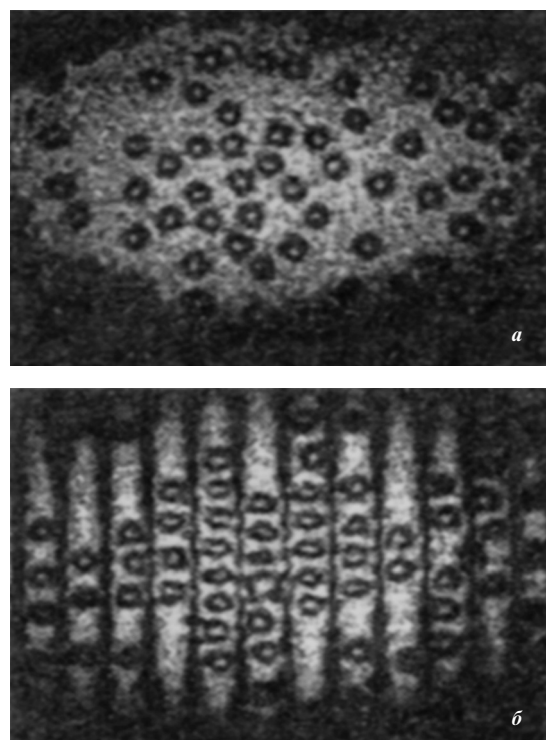


Рис.1. Пространственное распределение полистирольных микросфер, взвешенных в физиологическом растворе, в интерференционном поле [12] до эксперимента (а) и во время эксперимента (б). Диаметр сферических частиц 5.8 мкм, период модуляции светового поля 8.2 мкм.

Д.В.Гузатов, Л.С.Гайда. Научно-исследовательский центр проблем ресурсосбережения НАНБ, Белоруссия, 230023 Гродно, пл. Тизенгауза, 7; e-mail: dm\_guzatov@mail.ru, gls@grsu.by  
А.А.Афанасьев. Институт физики им. Б.И.Степанова НАНБ, Белоруссия, 220072 Минск, просп. Независимости, 68; e-mail: lvp@dragon.bas-net.by

Поступила в редакцию 5 февраля 2008 г., после доработки – 4 апреля 2008 г.

[12] по упорядочению полистирольных шариков диаметром 5.8 мкм, взвешенных в физиологическом растворе, в интерференционном поле двух пучков He-Ne-лазера. Видно, что при воздействии силы светового давления шарики, изначально распределенные неупорядоченно (рис.1,а), концентрируются в областях максимумов интерференционного поля (рис.1,б). При выключении установки упорядоченная картина сохраняется в течение нескольких секунд, затем вследствие диффузионных процессов распределение шариков снова становится неупорядоченным. Заметим, что аналогично ведут себя и диэлектрические частицы несферической формы, при этом они стремятся не только втянуться в область максимумов интерференционного поля, но и развернуться вдоль интерференционной полосы [12].

Силу светового давления, действующую на сферическую частицу в поле плоской монохроматической электромагнитной волны, впервые вычислил и исследовал Дебай в 1909 г. [13]. В настоящее время большое число работ посвящено расчету силы светового давления, оказываемого электромагнитным излучением на диэлектрические частицы. В этих работах преимущественно исследуется влияние лазерных (гауссовых) пучков на сферические частицы [14–19]. Цель настоящей работы – аналитическое решение задачи о силе светового давления, действующей на сферическую частицу произвольного состава (прозрачный диэлектрик или металл) и произвольного радиуса, находящуюся в простейшем интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн. При этом основное внимание уделено случаю диэлектрической частицы. Задача рассеяния интерференционного поля двух плоских электромагнитных волн на диэлектрической сферической частице уже рассматривалась ранее, однако сила светового давления, действующая со стороны поля на частицу, не была вычислена [20–22]. В настоящей работе мы постараемся восполнить этот пробел. Для вычисления силы светового давления, действующей на диэлектрическую (металлическую) частицу, используется формализм, связанный с тензором напряжений Максвелла [23], что позволяет найти аналитическое выражение для силы в случае сферической частицы произвольного радиуса.

## 2. Рассеяние интерференционного поля двух плоских монохроматических электромагнитных волн на диэлектрической сферической частице

Решение задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны на диэлектрической (металлической) сферической частице (решение Ми) известно уже сто лет [24]. Оно используется при решении большого числа задач, связанных с рассеянием электромагнитного излучения сферическими частицами [25]. Широкое применение решения Ми обусловлено удобным аналитическим методом вычислений и хорошим согласием теоретических результатов с экспериментальными данными. В данном разделе мы обобщим решение Ми для падающего электромагнитного поля вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i &= \mathbf{e}_y \exp(-i\omega t)(E_1 + E_2) \\ &= \mathbf{e}_y \exp(-i\omega t)\{E_{10} \exp[ik_m(x \sin \alpha_1 + z \cos \alpha_1)] + \end{aligned}$$

$$+ E_{20} \exp[ik_m(x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2)]\},$$

$$H^i = -\frac{i}{k_m} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \operatorname{rot} \mathbf{E}^i = -\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} E_{10}$$

$$\times \exp[ik_m(x \sin \alpha_1 + z \cos \alpha_1) - i\omega t](\mathbf{e}_x \cos \alpha_1 - \mathbf{e}_z \sin \alpha_1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &- \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} E_{20} \exp[ik_m(x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2) - i\omega t] \\ &\times (\mathbf{e}_x \cos \alpha_2 - \mathbf{e}_z \sin \alpha_2), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – орты декартовой системы координат;  $\omega$  – частота колебаний поля;  $E_{10}$  и  $E_{20}$  – комплексные амплитуды волн;  $k_m = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_m \mu_m}$  – волновое число в среде, в которой расположена сферическая частица;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\epsilon_m$  и  $\mu_m$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости рассматриваемой среды соответственно;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между направлениями волн и положительным направлением оси  $z$  ( $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$ ) (рис.2). Выражение для падающего поля (1) представим в виде разложения по фундаментальной системе сферических векторных функций, являющихся решением векторного уравнения Гельмгольца в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  ( $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ) [23]. В общем случае выражения для сферических векторных функций (далее просто векторных функций) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_{mnc} \\ \mathbf{m}_{mno} \end{array} \right\} &= \frac{m}{kr \sin \theta} Z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{array} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ &- \frac{1}{kr} Z_n(kr) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array} \right\} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_{mnc} \\ \mathbf{n}_{mno} \end{array} \right\} &= \frac{n(n+1)}{(kr)^2} Z_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array} \right\} \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{kr} Z_n'(kr) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{m}{kr \sin \theta} Z_n'(kr) P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{array} \right\} \mathbf{e}_\varphi. \quad (3) \end{aligned}$$

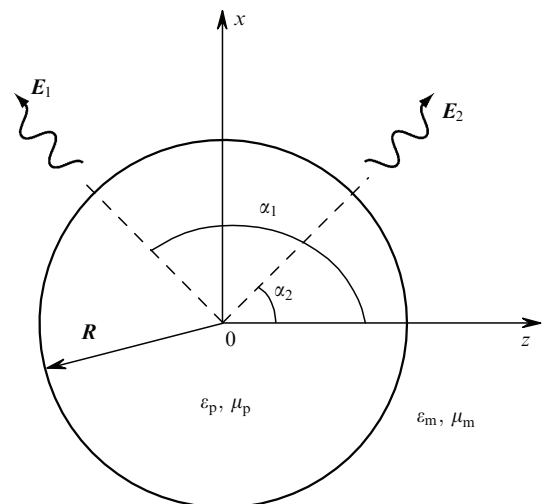


Рис.2. Геометрия задачи о световом давлении на сферическую частицу.

В выражениях (2) и (3)  $n = 0, 1, 2$ ;  $m = 0, 1, \dots, n$ ; индексы «е» и «о» обозначают четность векторной функции: в случае четной функции (с индексом «е») берется верхняя строка выражений в фигурных скобках, а в случае нечетной (с индексом «о») – нижняя;  $k$  – волновое число в рассматриваемой среде;  $Z_n(kr)$  – одна из функций Риккати – Бесселя [26], вид которой зависит от области, где ищется решение; штрих у функции здесь и далее означает производную этой функции по ее аргументу;  $P_n^m$  – присоединенная функция Лежандра [26];  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  – орты сферической системы координат. Используя соотношения (2) и (3), представим выражения для падающих электрического и магнитного полей в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i &= \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{mne} \mathbf{m}_{mne}^i + Q_{mno} \mathbf{n}_{mno}^i) \\ &+ \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{mno} \mathbf{m}_{mno}^i + Q_{mne} \mathbf{n}_{mne}^i), \\ \mathbf{H}^i &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (Q_{mne} \mathbf{m}_{mne}^i + G_{mne} \mathbf{n}_{mne}^i) \\ &- i \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (Q_{mno} \mathbf{m}_{mno}^i + G_{mno} \mathbf{n}_{mno}^i). \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для векторных функций  $\mathbf{m}_{mne}^i, \mathbf{m}_{mno}^i$  и  $\mathbf{n}_{mne}^i, \mathbf{n}_{mno}^i$ , входящих в (4), получаются из (2) и (3) при замене  $k \rightarrow k_m$  и  $Z_n(kr) \rightarrow \psi_n(k_m r) = \sqrt{\pi k_m r / 2} J_{n+1/2}(k_m r)$ , где  $J_{n+1/2}(k_m r)$  – функция Бесселя [26]. Для нахождения неизвестных коэффициентов  $G_{mne}, G_{mno}$  и  $Q_{mne}, Q_{mno}$  в разложениях (4) воспользуемся свойствами ортогональности векторных функций [23]. Интегрируя по углам сферической системы координат скалярные произведения  $\mathbf{E}^i$  (4) на комплексно сопряженные функции  $\mathbf{m}_{mne}^{i*}$  и  $\mathbf{m}_{mno}^{i*}$ , получаем выражения для  $G_{mne}$  и  $G_{mno}$  соответственно. Аналогичным образом, интегрируя по углам сферической системы координат скалярные произведения  $\mathbf{H}^i$  (4) на комплексно сопряженные векторные функции  $\mathbf{m}_{mne}^{i*}$  и  $\mathbf{m}_{mno}^{i*}$ , находим выражения для  $Q_{mne}$  и  $Q_{mno}$ . В результате для искомых коэффициентов можно получить соотношения

$$\begin{aligned} G_{mne} &= E_{10} a_{mne}^i(\alpha_1) + E_{20} a_{mne}^i(\alpha_2), \\ G_{mno} &= 0, \\ Q_{mne} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Q_{mno} = E_{10} b_{mno}^i(\alpha_1) + E_{20} b_{mno}^i(\alpha_2),$$

где

$$\begin{aligned} a_{mne}^i(\alpha_{1,2}) &= -(2 - \delta_{0m})(1 - \delta_{0n}) i^n \\ &\times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} P_n^m(\cos \alpha_{1,2}) \right]; \\ b_{mno}^i(\alpha_{1,2}) &= -(1 - \delta_{0n}) 2m i^{n+1} \\ &\times \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \alpha_{1,2})}{\sin \alpha_{1,2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\delta_{0n}$  – символ Кронекера. Заметим, что, как это и должно быть, в предельном случае  $E_{20} = 0, \alpha_1 = 0, \pi$  и формулы (5) переходят в хорошо известные выражения для плоской волны, поляризованной вдоль оси  $y$  и распространяющейся вдоль оси  $z$  [23].

Таким образом, с учетом (5) выражения для падающего электромагнитного поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i &= \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{mne} \mathbf{m}_{mne}^i + Q_{mno} \mathbf{n}_{mno}^i), \\ \mathbf{H}^i &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (Q_{mno} \mathbf{m}_{mno}^i + G_{mne} \mathbf{n}_{mne}^i). \end{aligned} \quad (7)$$

Электрическое ( $\mathbf{E}^t$ ) и магнитное ( $\mathbf{H}^t$ ) поля, прошедшие внутрь ( $r < R$ ) сферической частицы радиусом  $R$ , будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^t &= \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{mne}^t \mathbf{m}_{mne}^t + Q_{mno}^t \mathbf{n}_{mno}^t), \\ \mathbf{H}^t &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_p}{\mu_p}} \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (Q_{mno}^t \mathbf{m}_{mno}^t + G_{mne}^t \mathbf{n}_{mne}^t). \end{aligned} \quad (8)$$

В диэлектрической среде ( $r > R$ ), в которой взвешена частица, для рассеянных электрического ( $\mathbf{E}^s$ ) и магнитного ( $\mathbf{H}^s$ ) полей можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s &= \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{mne}^s \mathbf{m}_{mne}^s + Q_{mno}^s \mathbf{n}_{mno}^s), \\ \mathbf{H}^s &= -i \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (Q_{mno}^s \mathbf{m}_{mno}^s + G_{mne}^s \mathbf{n}_{mne}^s). \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) коэффициенты  $G_{mne}^t, Q_{mno}^t$  и  $G_{mne}^s, Q_{mno}^s$  подлежат определению; векторные функции  $\mathbf{m}_{mne}^t, \mathbf{m}_{mno}^t$  и  $\mathbf{n}_{mne}^t, \mathbf{n}_{mno}^t$  находятся из (2) и (3) с помощью замены  $k \rightarrow k_p = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_p \mu_p}$  и  $Z_n(kr) \rightarrow \psi_n(k_p r)$ , где  $\epsilon_p$  и  $\mu_p$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала сферической частицы соответственно; векторные функции  $\mathbf{m}_{mne}^s, \mathbf{m}_{mno}^s$  и  $\mathbf{n}_{mne}^s, \mathbf{n}_{mno}^s$  получаются из (2) и (3) заменой  $k \rightarrow k_m$  и  $Z_n(kr) \rightarrow \zeta_n(k_m r) = \sqrt{\pi k_m r / 2} H_{n+1/2}^{(1)}(k_m r)$ , где  $H_{n+1/2}^{(1)}(k_m r)$  – функция Ханкеля первого рода [26]. Для нахождения неизвестных коэффициентов разложений (8) и (9) воспользуемся условиями равенства тангенциальных компонент электромагнитного поля с двух сторон от поверхности сферической частицы, из которых получим уравнения для искомых коэффициентов. Решая данные уравнения, находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} G_{mne}^t &= \frac{k_p}{k_m} G_{mne} \left[ \frac{\psi_n(k_m R)}{\psi_n(k_p R)} + \sigma_n \frac{\zeta_n(k_m R)}{\psi_n(k_p R)} \right], \\ Q_{mno}^t &= \frac{k_p}{k_m} Q_{mno} \left[ \frac{\psi_n'(k_m R)}{\psi_n'(k_p R)} + \tau_n \frac{\zeta_n'(k_m R)}{\psi_n'(k_p R)} \right], \\ G_{mne}^s &= G_{mne} \sigma_n, \\ Q_{mno}^s &= Q_{mno} \tau_n, \end{aligned} \quad (10)$$

где выражения для коэффициентов  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  имеют вид [23]

$$\sigma_n = -\frac{\psi_n(k_m R)}{\zeta_n(k_m R)} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\mu_p}} \frac{\psi'_n(k_p R)}{\psi_n(k_p R)} - \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\mu_m}} \frac{\psi'_n(k_m R)}{\psi_n(k_m R)} \right] \times \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\mu_p}} \frac{\psi'_n(k_p R)}{\psi_n(k_p R)} - \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\mu_m}} \frac{\zeta'_n(k_m R)}{\zeta_n(k_m R)} \right]^{-1}; \quad (11)$$

$$\tau_n = -\frac{\psi_n(k_m R)}{\zeta_n(k_m R)} \left[ \sqrt{\frac{\mu_p}{\varepsilon_p}} \frac{\psi'_n(k_p R)}{\psi_n(k_p R)} - \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}} \frac{\psi'_n(k_m R)}{\psi_n(k_m R)} \right] \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_p}{\varepsilon_p}} \frac{\psi'_n(k_p R)}{\psi_n(k_p R)} - \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}} \frac{\zeta'_n(k_m R)}{\zeta_n(k_m R)} \right]^{-1};$$

производные берутся при  $r = R$ . Найденные коэффициенты (10) можно использовать для вычисления усредненной по времени мощности рассеяния [23]

$$W_{sc} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (e_r [\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^{s*}]) r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (12)$$

Используя асимптотики функций Риккати–Бесселя при  $r \rightarrow \infty$  [26], после интегрирования в (12) получим искомое выражение

$$W_{sc} = \frac{c}{4k_m^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\mu_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \times [(1 + \delta_{0m}) |G_{mnc}^s|^2 + (1 - \delta_{0m}) |Q_{mno}^s|^2]. \quad (13)$$

Таким образом, выражения для полей (8) и (9) с коэффициентами (10) и (11) являются решением задачи о рассеянии интерференционного поля двух плоских монохроматических электромагнитных волн на сферической диэлектрической (металлической) частице.

### 3. Сила светового давления, действующая на сферическую диэлектрическую частицу, находящуюся в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн

Общее выражение для силы светового давления произвольного электромагнитного поля на частицу с произвольными формой и размером имеется, например, в [27]. Без учета механических деформаций частицы и диэлектрической среды, в которую она погружена, возникающих под действием электромагнитного излучения, выражение для усредненной по времени силы светового давления  $\mathbf{F}$  принимает вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\mathbf{v} \hat{T}) dS, \quad (14)$$

$$\hat{T} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi} \left( \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \hat{I} \right) + \frac{\mu_m}{4\pi} \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^* - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \hat{I} \right),$$

где  $S$  – произвольная поверхность, охватывающая рассматриваемую частицу;  $\mathbf{v}$  – вектор внешней нормали к  $S$ ;  $\hat{T}$  – тензор напряжений Максвелла [23];  $\otimes$  – означает прямое произведение векторов;  $\hat{I}$  – единичный тензор. Для вычисления силы (14) поверхность  $S$  удобно взять в

форме сферы бесконечно большого радиуса. В результате (14) преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{E}^i + e_\theta \mathbf{E}^s|^2 + |e_\varphi \mathbf{E}^i + e_\varphi \mathbf{E}^s|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty} - \frac{\mu_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{H}^i + e_\theta \mathbf{H}^s|^2 + |e_\varphi \mathbf{H}^i + e_\varphi \mathbf{H}^s|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty}, \quad (15)$$

где было учтено, что при  $r \rightarrow \infty$  радиальные компоненты сферических векторных функций убывают быстрее, чем  $1/r$ , и не дают вклада в (15). Используя разложение (7), можно показать, что

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\varepsilon_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{E}^i|^2 + |e_\varphi \mathbf{E}^i|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty} - \frac{\mu_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{H}^i|^2 + |e_\varphi \mathbf{H}^i|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (16)$$

Следовательно, выражение (15) может быть записано в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\varepsilon_m}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi [(e_\theta \mathbf{E}^i)(e_\theta \mathbf{E}^{s*}) + (e_\varphi \mathbf{E}^i)(e_\varphi \mathbf{E}^{s*})] e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty} - \frac{\mu_m}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi [(e_\theta \mathbf{H}^i)(e_\theta \mathbf{H}^{s*}) + (e_\varphi \mathbf{H}^i)(e_\varphi \mathbf{H}^{s*})] e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty}, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_3 = -\frac{\varepsilon_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{E}^s|^2 + |e_\varphi \mathbf{E}^s|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty} - \frac{\mu_m}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi (|e_\theta \mathbf{H}^s|^2 + |e_\varphi \mathbf{H}^s|^2) e_r r^2 \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (19)$$

Используя (7) и (9), после интегрирования в (18) и (19) получаем

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x} \mathbf{e}_x + F_{2z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_3 = F_{3x} \mathbf{e}_x + F_{3z} \mathbf{e}_z. \quad (20)$$

Явный вид выражений для  $F_{2x}$ ,  $F_{2z}$  и  $F_{3x}$ ,  $F_{3z}$  вследствие их громоздкости дан в Приложении. Таким образом, из (20) следует, что сила светового давления, действующая на

сферическую частицу в падающем поле (1), не имеет компоненты, направленной вдоль оси  $y$ , а действует в плоскости интерференции. Пусть для определенности

$$E_{10} = E_0 \exp[ik_m(X \sin \alpha_1 + Z \cos \alpha_1)], \quad (21)$$

$$E_{20} = E_0 \exp[ik_m(X \sin \alpha_2 + Z \cos \alpha_2)],$$

где величины  $X$  и  $Z$  имеют смысл смещения положения центра сферической частицы относительно максимума выбранной интерференционной полосы. Условия образования максимумов и минимумов интерференции электрического поля (1) с учетом (21) имеют вид

$$\begin{aligned} k_m(x + X)(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + k_m(z + Z) \\ \times (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 2q\pi, \end{aligned} \quad (22)$$

$$k_m(x + X)(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + k_m(z + Z)$$

$$\times (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = (2q + 1)\pi,$$

где  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Из (21) следует, что при  $X = Z = 0$  линия максимумов интерференции падающего поля проходит через центр сферической частицы, совпадающий с началом системы координат. Если же  $X$  или  $Z$  не равно нулю, то линия максимумов интерференционной картины, вообще говоря, не проходит через центр частицы, что можно интерпретировать как смещение частицы на величину  $X$  или  $Z$  по отношению к выбранному максимуму (минимуму) интерференции.

Разложим выражение для силы (17), действующей на сферическую диэлектрическую (без потерь) частицу, в ряд по степеням  $\omega R/c \ll 1$ . Используя (20), (21) и явный вид выражений для  $F_{2x}$ ,  $F_{2z}$  и  $F_{3x}$ ,  $F_{3z}$  (см. Приложение), а также ограничиваясь первым исчезающим членом разложения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \approx -\frac{1}{2} k_m R^3 |E_0|^2 \varepsilon_m \\ \times \left[ \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_m}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_m} + \frac{\mu_p - \mu_m}{\mu_p + 2\mu_m} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \\ \times \sin\{k_m[X(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + Z(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)]\} \\ \times [(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)\mathbf{e}_x + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)\mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует, что при симметричном относительно оси  $x$  падении плоских электромагнитных волн, т.е. в том случае, когда выполняется условие  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  (см. рис.2), компонента силы (23), направленная вдоль оси  $x$ , равна нулю. Если же при указанном симметричном падении волн также выполняется условие  $Z = 0$ , то равны нулю обе векторные компоненты силы.

В работах [28, 29] в качестве градиентной силы, действующей на сферическую диэлектрическую частицу, используется следующее выражение ( $\varepsilon_m = 1$  и  $\mu_m = \mu_p = 1$ ):

$$\mathbf{F}_{\text{grad}} = \frac{1}{2} \Pi \text{grad}(\text{Re}E^i)^2, \quad (24)$$

где

$$\Pi = \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} R^3$$

– поляризуемость сферической диэлектрической частицы в однородном поле. В рассматриваемом случае интерференции двух плоских монохроматических электромагнитных волн после усреднения по времени из (24) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{grad}} = -\frac{\omega}{2c} R^3 |E_0|^2 \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} \\ \times \sin \left\{ \frac{\omega}{c} [(x + X)(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + (z + Z) \right. \\ \left. \times (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)] \right\} [(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)\mathbf{e}_x \\ + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)\mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнивая (23) и (25) ( $\varepsilon_m = 1$  и  $\mu_m = \mu_p = 1$ ), видим, что эти выражения идентичны, если в (25) положить  $x = z = 0$  (центр сферической частицы). Таким образом, как этого и следовало ожидать, выражение для градиентной силы (24), вычисленной в центре рассматриваемой сферической диэлектрической частицы, является первым приближением для силы (14) и может быть использовано в качестве асимптотического выражения для силы светового давления, действующей на сферическую диэлектрическую (без потерь) частицу достаточно малого радиуса ( $R \ll c/\omega$ ). Заметим, что учет дальнейших членов разложения (17) в ряд по степеням малого параметра  $\omega R/c \ll 1$  приводит не только к уточнению асимптотического выражения для градиентной силы (23), но и к учету вкладов силы рассеяния. Вследствие громоздкости полученных выражений для  $F_{2x}$ ,  $F_{2z}$  и  $F_{3x}$ ,  $F_{3z}$  (см. Приложение) нахождение явного выражения для первого исчезающего вклада силы рассеяния черезвычайно затруднено, что не позволяет представить его в настоящей работе.

#### 4. Обсуждение результатов

Для иллюстрации полученных в предыдущих разделах аналитических результатов мы рассмотрим кварцевую сферическую диэлектрическую частицу ( $\varepsilon_p = 2.4$ ,  $\mu_p = 1$ ), находящуюся в водной среде ( $\varepsilon_m = 1.7$ ,  $\mu_m = 1$ ). Пусть падающее излучение имеет длину волны 1.064 мкм (в вакууме). Не уменьшая общности, рассмотрим случай симметричного относительно оси  $x$  падения плоских электромагнитных волн ( $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ ).

На рис.3,а показана мощность рассеяния (13) двух плоских электромагнитных волн на кварцевой частице как функция разности их углов падения для нескольких заданных значений радиуса частицы. Хорошо видно, что наибольшая мощность рассеяния достигается в том случае, когда волны падают на сферическую частицу сонаправленно. При увеличении радиуса частицы число осцилляций мощности рассеяния увеличивается (рис.3,а). На рис.3,б представлена мощность рассеяния как функция радиуса сферической частицы для двух взаимных направлений падения плоских электромагнитных волн: в одном (совпадающем) направлении и навстречу друг

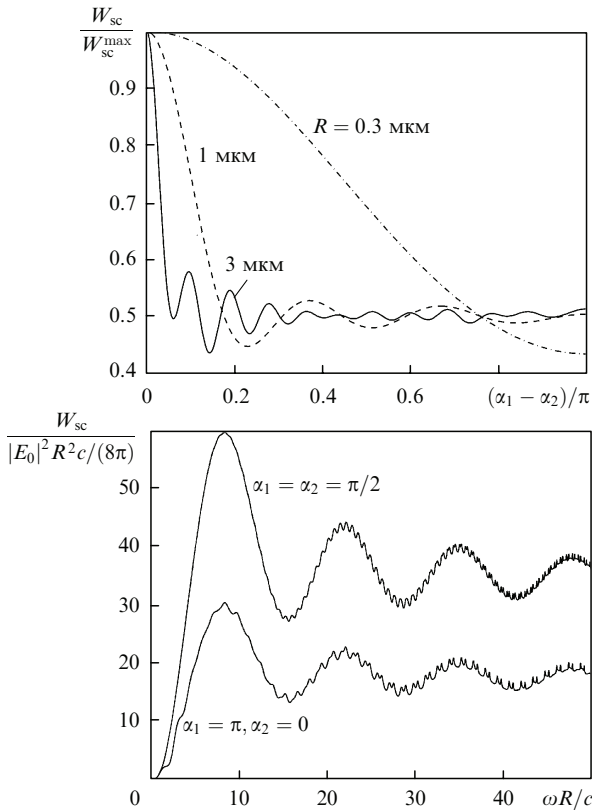


Рис.3. Зависимости нормированной мощности рассеяния (13) двух плоских электромагнитных волн на кварцевой сферической частице ( $\epsilon_p = 2.4, \mu_p = 1$ ), расположенной в воде ( $\epsilon_m = 1.7, \mu_m = 1$ ), от разности углов падения плоских волн (при  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ ) для разных радиусов частицы (а) и от нормированного радиуса частицы для волн, падающих в одном направлении ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ ) и навстречу друг другу ( $\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0$ ) (б). Длина волны падающего излучения 1.064 мкм, смещение частицы  $X = Z = 0$ .

другу. Как уже было отмечено, мощность рассеяния больше для волн, распространяющихся в одном направлении (рис.3,б). При этом она осциллирует, и на фоне этих осцилляций заметны небольшие по амплитуде быстрые колебания, что согласуется с известными результатами [25].

На рис.4,а показана сила светового давления (17) как функция разности углов падения плоских электромагнитных волн  $\alpha_1 - \alpha_2$ . При симметричном падении плоских волн компонента силы, направленная вдоль оси  $z$ , равна нулю, как это следует из геометрии задачи (рис.2). Единственная отличная от нуля компонента силы светового давления  $F_x = F_{2x} + F_{3x}$  принимает максимальное значение в случае совпадающих направлений распространения падающих волн ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), что также имеет место для мощности рассеяния (ср. с рис.3,а). Минимальное (нулевое) значение сила светового давления принимает в случае падающих волн, распространяющихся навстречу друг другу, как это видно из рис.4,а. С увеличением радиуса сферической частицы возрастает частота осцилляций силы в зависимости от разности углов падения волн (рис.4,а) и радиуса частицы (рис.4,б). При этом, как и для мощности рассеяния, с увеличением радиуса быстрые осцилляции наблюдаются на фоне относительно медленных осцилляций (рис.4,б), что согласуется с результатами работы [25].

На рис.5 приведена сила светового давления (17), действующая на рассматриваемую кварцевую частицу в по-

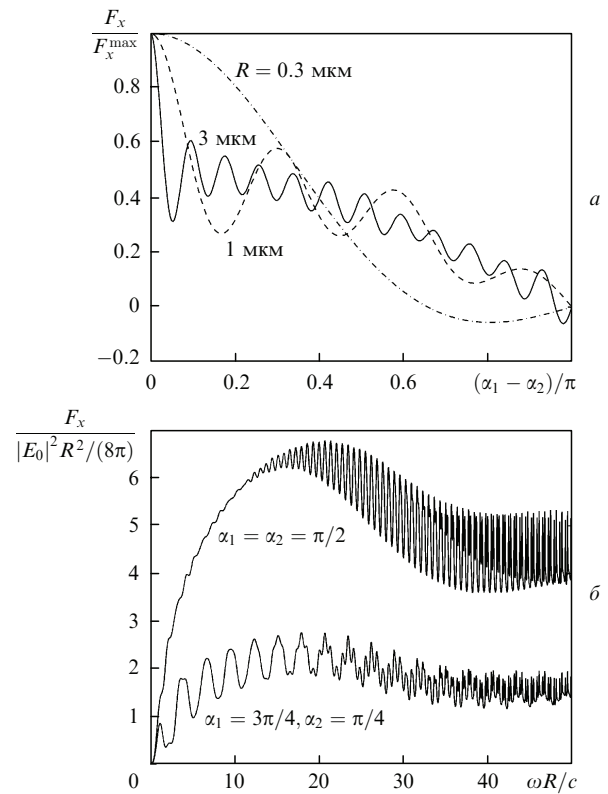


Рис.4. Зависимости нормированной компоненты  $F_x$  силы светового давления (17), действующей на кварцевую сферическую частицу ( $\epsilon_p = 2.4, \mu_p = 1$ ), расположенную в воде ( $\epsilon_m = 1.7, \mu_m = 1$ ), в интерференционном поле двух плоских электромагнитных волн от разности углов падения плоских волн (при  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ ) для разных радиусов частицы (а) и от нормированного радиуса частицы для волн, падающих в одном направлении ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ ) и под углом  $\pi/2$  друг к другу ( $\alpha_1 = 3\pi/4, \alpha_2 = \pi/4$ ) (б). Длина волны падающего излучения 1.064 мкм, смещение частицы  $X = Z = 0$ .

ле двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся под углами  $\alpha_1 = 3\pi/4$  и  $\alpha_2 = \pi/4$ , как функция смещения частицы  $Z$  ( $X = 0$ ). Хорошо видно, что компоненты силы, направленные вдоль осей  $x$  (рис.5,а) и  $z$  (рис.5,б), осциллируют с периодом

$$\frac{\omega Z}{c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon_m \mu_m} |\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2|} \approx 3.4$$

при увеличении смещения. При увеличении радиуса сферической частицы, средняя линия, относительно которой наблюдаются осцилляции  $x$ -компоненты силы светового давления, смещается в сторону увеличения силы (рис.5,а). В случае же  $z$ -компоненты градиентной силы при увеличении радиуса сферической частицы линия, относительно которой происходят осцилляции, остается на неизменном уровне:  $F_z = F_{2z} + F_{3z} = 0$  (рис.5,б).

На рис.6 представлена сила светового давления (17) как функция радиуса рассматриваемой частицы для разных смещений  $X = Z$ . Штриховыми кривыми показано асимптотическое решение (23). Плоские электромагнитные волны падают под углами  $\alpha_1 = 3\pi/4$  и  $\alpha_2 = \pi/4$ . На рис.6 видно, что при стремлении радиуса частицы к нулю, сила также стремится к нулю. При этом асимптотическое решение (23) для отличной от нуля  $z$ -компоненты силы (рис.6,б) хорошо согласуется с точным решением (17), если радиус частицы  $R \leq 0.5c/\omega$ . При

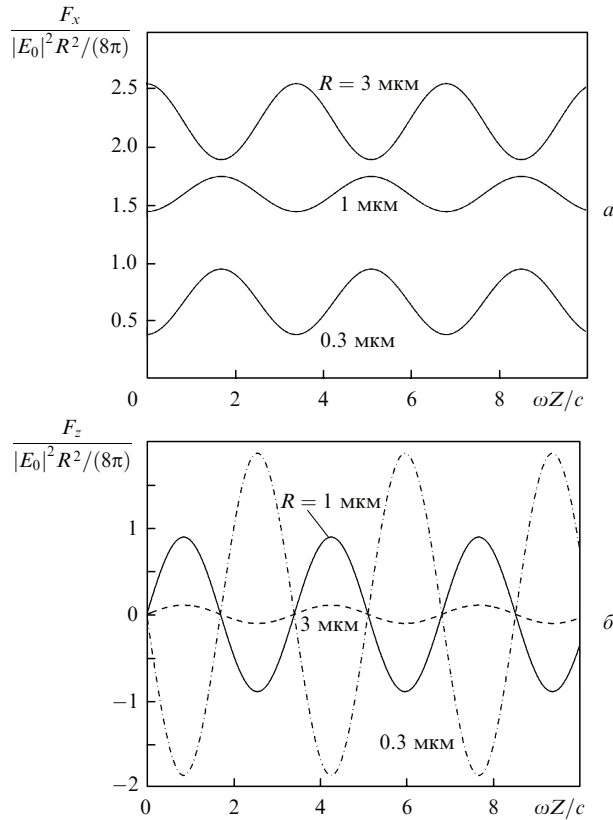


Рис.5. Зависимости нормированных компонент  $F_x$  (а) и  $F_z$  (б) силы светового давления (17), действующей на кварцевую сферическую частицу ( $\epsilon_p = 2.4, \mu_p = 1$ ), расположенную в воде ( $\epsilon_m = 1.7, \mu_m = 1$ ), в интерференционном поле двух плоских электромагнитных волн с длиной волны 1.064 мкм от нормированного смещения частицы  $\omega Z/c$  ( $X = 0$ ) для разных радиусов частицы. Плоские волны падают под углами  $\alpha_1 = 3\pi/4$  и  $\alpha_2 = \pi/4$ .

исследовании сферических частиц большего радиуса для расчета силы светового давления необходимо использовать выражение (17).

### 5. Заключение

В настоящей работе детально рассмотрено решение задачи о сферической диэлектрической частице, находящейся в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн. Исследована зависимость мощности рассеяния от разности углов падения плоских волн и радиуса сферической частицы. С использованием тензора напряжений Максвелла рассчитана сила светового давления, действующая со стороны падающего поля на сферическую диэлектрическую частицу, как функция разности углов падения плоских волн и радиуса частицы. Получено асимптотическое выражение для силы светового давления при достаточно малых радиусах диэлектрической (без потерь) частицы, совпадающее с известным выражением для градиентной силы. Найденные аналитические выражения (см. Приложение) пригодны для расчета силы светового давления, действующей как на диэлектрические, так и на металлические сферические частицы произвольного радиуса.

Результаты настоящей работы могут быть использованы для расчета силы светового давления, действующей на диэлектрические (металлические) сферические частицы в интерференционном поле двух плоских монохрома-

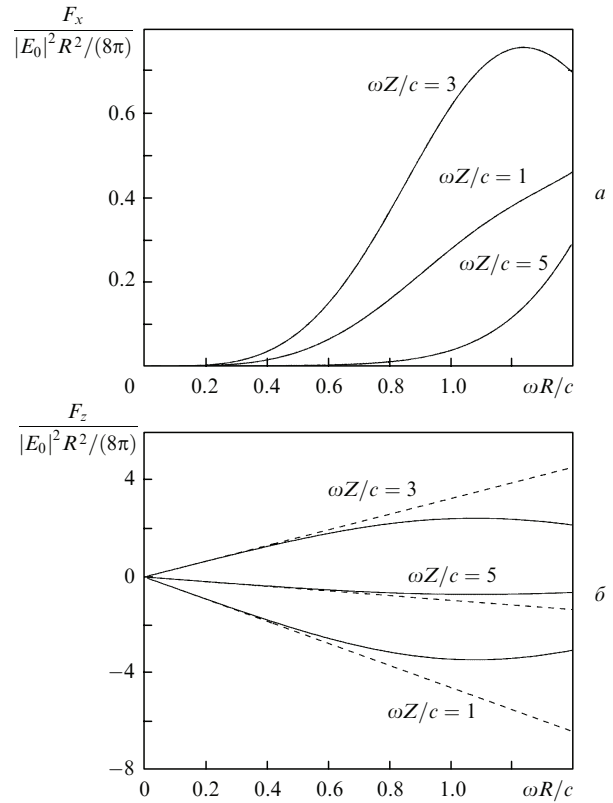


Рис.6. Зависимости нормированных компонент  $F_x$  (а) и  $F_z$  (б) силы светового давления (17), действующей на кварцевую сферическую частицу ( $\epsilon_p = 2.4, \mu_p = 1$ ), расположенную в воде ( $\epsilon_m = 1.7, \mu_m = 1$ ), в интерференционном поле двух плоских электромагнитных волн с длиной волны 1.064 мкм от нормированного радиуса частицы для разных смещений  $Z$  ( $X = 0$ ) частицы. Плоские волны падают под углами  $\alpha_1 = 3\pi/4$  и  $\alpha_2 = \pi/4$ . Штриховыми кривыми показаны соответствующие асимптотики (23).

тических электромагнитных волн, и для проверки алгоритмов численного расчета силы светового давления в случае частиц более сложной формы.

### Приложение

Приведем явные выражения для величин  $F_{2x}, F_{2z}$  и  $F_{3x}$ ,  $F_{3z}$ , входящих в формулу (20):

$$\begin{aligned}
 F_{2x} = & \frac{\epsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
 & \times \text{Im}(G_{nmc} G_{m-1n-1e}^{s*} + G_{nmc}^s G_{m-1n-1e}^*) \\
 & + \frac{\epsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
 & \times \text{Im}(G_{nmc} G_{m-1n+1e}^{s*} + G_{nmc}^s G_{m-1n+1e}^*) \\
 & - \frac{\epsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
 & \times \text{Im}(Q_{mno} G_{m-1ne}^{s*} + Q_{mno}^s G_{m-1ne}^*) \\
 & + \frac{\epsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \text{Im}(G_{mnc} Q_{m-1n0}^s + G_{mnc}^s Q_{m-1n0}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
& \times \text{Im}(Q_{mno} Q_{m-1n-10}^{s*} + Q_{mno}^s Q_{m-1n-10}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{8k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
& \times \text{Im}(Q_{mno} Q_{m-1n+10}^{s*} + Q_{mno}^s Q_{m-1n+10}^{s*}), \quad (\text{П1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2z} &= \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \\
& \times \text{Im}(G_{mnc} G_{mn+1e}^{s*} + G_{mnc}^s G_{mn+1e}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\
& \times \text{Im}(G_{mnc} Q_{mno}^{s*} + G_{mnc}^s Q_{mno}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \\
& \times \text{Im}(Q_{mno} Q_{mn+10}^{s*} + Q_{mno}^s Q_{mn+10}^{s*}), \quad (\text{П2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{3x} &= \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
& \times \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(G_{mnc}^s G_{m-1n-1e}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \\
& \times \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(G_{mnc}^s G_{m-1n+1e}^{s*}) \\
& - \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (1 + \delta_{1m}) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(Q_{mno}^s G_{m-1ne}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(G_{mnc}^s Q_{m-1n0}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(Q_{mno}^s Q_{m-1n-10}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{4k_m^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(Q_{mno}^s Q_{m-1n+10}^{s*}), \quad (\text{П3}) \\
F_{3z} &= \frac{\varepsilon_m}{2k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \text{Im}(G_{mnc}^s G_{mn+1e}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{2k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{Im}(G_{mnc}^s Q_{mno}^{s*}) \\
& + \frac{\varepsilon_m}{2k_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \\
& \times \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \text{Im}(Q_{mno}^s Q_{mn+10}^{s*}). \quad (\text{П4})
\end{aligned}$$

1. Ashkin A., Dziedzic J.M., Bjorkholm J.E., Chu S. *Opt. Lett.*, **11**, 288 (1986).
2. Ashkin A., Dziedzic J.M., Yamane T. *Nature*, **330**, 769 (1987).
3. Ashkin A., Dziedzic J.M. *Science*, **235**, 1517 (1987).
4. Austin R.H., Brody J.P., Cox E.C., Duke T., Volkmuth W. *Phys. Today*, **50**, 32 (1997).
5. *Live Cell Imaging*. Ed. by R.D.Goldman, D.L.Spector (Cold Spring Harbor, NY: CSHL Press, 2005).
6. Rohrbach A., Stelzer E.H.K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 839 (2001).
7. Аскарьян Г.А. *ЖЭТФ*, **42**, 1567 (1962).
8. Ashkin A. *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 156 (1970).
9. Smith P.W., Ashkin A., Tomlinson W.J. *Opt. Lett.*, **6**, 284 (1981).
10. Palmer A.J. *Opt. Lett.*, **5**, 54 (1980).
11. Афанасьев А.А., Рубинов А.Н., Михневич С.Ю., Ермолаев И.Е. *ЖЭТФ*, **128**, 451 (2005).
12. Афанасьев А.А., Катаркевич В.М., Рубинов А.Н., Эфендиев Т.Ш. *ЖПС*, **69**, 675 (2002).
13. Debye P. *Ann. Physik*, **30**, 57 (1909).
14. Davis L.W. *Phys. Rev. A*, **19**, 1177 (1979).
15. Gouesbet G., Maheu B., Grehan G. *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1427 (1988).
16. Barton J.P., Alexander D.R. *J. Appl. Phys.*, **66**, 2800 (1989).
17. Gouesbet G. *Appl. Opt.*, **35**, 1543 (1996).
18. Neves A.A.R., Fontes A., Pozzo L.D.Y., de Thomaz A.A., Chillce E., Rodriguez E., Barbosa L.C., Cesar C.L. *Opt. Express*, **14**, 13101 (2006).
19. Niemen T.A., Loke V.L.Y., Stigoe A.B., Knoner G., Branczyk A.M., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **9**, S196 (2007).
20. Jones A.R. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **7**, 1369 (1974).
21. Chu W.P., Robinson D.M. *Appl. Opt.*, **16**, 619 (1977).
22. Li J., Chylek P. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 687 (1993).
23. Стрэттон Дж.А. *Теория электромагнетизма* (М.-Л.: ГИТТЛ, 1948).
24. Mie G. *Ann. Physik*, **25**, 377 (1908).
25. Kerker M. *The Scattering of Light* (New York: Acad. Press, 1969).
26. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана (М.: Наука, 1979).
27. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1986).
28. Harada Y., Asakura T. *Opt. Commun.*, **124**, 529 (1996).
29. Rubinov A.N., Afanas'ev A.A., Kurochkin Yu.A., Mikhnevich S.Yu. *Nonlin. Phen. Compl. Syst.*, **4**, 123 (2001).