PACS 42.65.Ky; 42.65.Yj; 42.65.Tg; 05.45.–a

Многокомпонентные кноидальные волны при каскадном параметрическом преобразовании частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Показано, что процесс взаимодействия четырех мод при квазисинхронном каскадном преобразовании частоты на квадратичной нелинейности может быть описан в терминах эффективной кубической нелинейности, что сводит задачу к решению системы из двух связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) относительно амплитуд волн, задействованных в двух нелинейных процессах. Для соответствующей системы найдены аналитические решения нового типа, имеющие форму кноидальных волн, компоненты которых представляют собой сумму и разность идентичных фундаментальных решений НУШ со сдвинутыми аргументами. Полученные решения перекрывают весь диапазон изменения граничных условий, что позволяет оптимизировать эффективность процесса преобразования в каждой конкретной ситуации.

Ключевые слова: *квадратичная нелинейность, каскадное преобразование частоты, эффективная кубическая нелинейность, стационарное нелинейное уравнение Шредингера, многокомпонентная кноидальная волна.*

1. Введение

Кноидальные волны (КВ) представляют собой самосогласованные периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков – нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), Кортевега – де Вриза (КдВ), sin-Гордона (СГ) и др. [1 – 7] – и, по существу, являются модами соответствующих нелинейных задач. В тех случаях, когда КВ содержат несколько составляющих, говорят о многокомпонентных КВ (МКВ). Термин МКВ используется в нелинейной гидродинамике [1, 8] и физике плазмы [2, 9], при описании пакетов электронных волновых функций (экситонов, биэкситонов, сверхпроводящих пар и др.), в физике одномерных (1D) цепочек (сопряженные полимеры) [10] и двумерных (2D) плоскостей (ферромагнетики и высокотемпературные сверхпроводники) [11]. В оптике понятие МКВ также достаточно универсально, т. к. к уравнениям такого типа обычно приводит учет низших членов в разложении волны нелинейной поляризации. МКВ являются решениями 1D-задач о бездисперсионном распространении цугов импульсов по оптическим волокнам [3 – 6, 12] и о параметрической генерации в режиме синхронной накачки [13], 2D-задач о бездифракционном распространении волновых фронтов со специальной периодической поперечной структурой через фоторефрактивные кристаллы [7, 14] и кристаллы с квадратичной нелинейностью [15].

В [16] было показано, что решения НУШ в форме МКВ играют ключевую роль и в одной из классических задач нелинейной оптики – в описании процессов параметрического преобразования частоты вверх и вниз в средах с квадратичной нелинейностью [17]. Было установлено, что точное аналитическое решение задачи стационарного взаимодействия трех мод с частотами ω_{1-3} можно провести нетрадиционным способом – повышая порядок системы укороченных нелинейных уравнений. При этом задача сводится к решению трех независимых НУШ, каждое из которых связано с двумя другими только через граничные условия и описывает комплексную КВ, сформированную из квадратурных составляющих. Возможность такого редуцирования исходной задачи была интерпретирована как переход к описанию результата конкуренции двух процессов – слияния ($\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$) и распада ($\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) квантов, протекающих на квадратичной нелинейности, через эффективную каскадную кубическую нелинейность керровского типа [18].

Ниже с использованием подхода, аналогичного [16], показано, что в тех случаях, когда волновыми расстройками можно пренебречь (квазисинхронизм), процесс параметрического взаимодействия четырех мод при каскадном преобразовании частоты на квадратичной нелинейности также можно описать в терминах эффективной кубической нелинейности. При этом исходная задача сводится к стандартной системе из двух связанных НУШ относительно комплексных амплитуд волн, задействованных в двух нелинейных процессах [14, 19]. Показано также, что эту систему можно трансформировать в два идентичных независимых уравнения, что определяет ее решения в необычной форме – суммы и разности двух одинаковых решений одного и того же НУШ со сдвинутыми аргументами. За счет полного перекрытия диапазона возможных изменений граничных условий полученные таким образом аналитические решения обеспечивают возможность оптимизации эффективности преобразования в любой конкретной ситуации.

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 16 апреля 2008 г.

2. Каскадное преобразование частоты и эффективная кубическая нелинейность

Рассмотрим процесс параметрического взаимодействия четырех (нижний индекс $i = 1 - 4$) плоских коллинеарных монохроматических волн – мод в среде с квадратичной нелинейностью. По аналогии с [16] будем считать, что моды имеют частоты ω_1, $\omega_2 = \omega_1$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_4 = \omega_1 + \omega_3 = 3\omega_1$, волновые векторы $\boldsymbol{k}_{1-4}$ и комплексные амплитуды A_{1-4}. Предположим, что в среде реализованы условия для нелинейных процессов двух типов, $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$, с волновыми расстройками $\Delta\boldsymbol{k}_{1,2} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_{2,3} - \boldsymbol{k}_{3,4}$ и константами нелинейной связи $\beta_{1,2}$ соответственно. Считая, что нелинейность имеет нерезонансный характер, и направив ось z вдоль $\boldsymbol{k}_{1-4}$, запишем систему укороченных уравнений, описывающих взаимодействие мод, в следующем виде:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\mathrm{i}\beta_1 A_2^* A_3 \exp(-\mathrm{i}\Delta k_1 z) - \mathrm{i}\beta_2 A_3^* A_4 \exp(-\mathrm{i}\Delta k_2 z), \quad (1а)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = -\mathrm{i}\beta_1 A_1^* A_3 \exp(-\mathrm{i}\Delta k_1 z), \quad (1б)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = -\mathrm{i}2\beta_1 A_1 A_2 \exp(\mathrm{i}\Delta k_1 z) - \mathrm{i}2\beta_2 A_1^* A_4 \exp(-\mathrm{i}\Delta k_2 z), \quad (1в)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial z} = -\mathrm{i}3\beta_2 A_1 A_3 \exp(\mathrm{i}\Delta k_2 z). \quad (1г)$$

Легко убедиться, что хотя система (1) имеет пять интегралов второго порядка $J_{0-4} = \mathrm{const}$, соответствующих закону сохранения потока энергии

$$J_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (2)$$

и соотношениям Мэнли – Роу

$$J_1 = I_1 - 2I_2 - \tfrac{1}{2}I_3, \quad J_2 = I_1 - I_2 + \tfrac{1}{3}I_4,$$
$$J_3 = I_1 + \tfrac{1}{2}I_3 + \tfrac{2}{3}I_4, \quad J_4 = I_2 + \tfrac{1}{2}I_3 + \tfrac{1}{3}I_4, \quad (3)$$

только два из них являются независимым (здесь $I_i = A_i A_i^*$ пропорциональны интенсивностям волн). Поэтому можно записать, например, что

$$I_2 - I_{20} = \tfrac{1}{2}(I_1 - I_{10}) - \tfrac{1}{4}(I_3 - I_{30}),$$
$$I_4 - I_{40} = -\tfrac{3}{2}(I_1 - I_{10}) - \tfrac{3}{4}(I_3 - I_{30}) \quad (4)$$

($I_{i0} = A_i A_i^*|_{z=0}$).

Следуя подходу [16], проведем замену переменных

$$A_i(z) = \tilde{A}_i(z)\exp(-\mathrm{i}\alpha_i z) \quad (5)$$

и выберем такие константы α_i, чтобы были выполнены условия

$$\Delta\alpha_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_{2,3} - \alpha_{3,4} = \Delta k_{1,2}. \quad (6)$$

Подставив (5) в (1), с учетом (6) получим

$$\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_1\tilde{A}_1 = -\mathrm{i}\beta_1\tilde{A}_2^*\tilde{A}_3 - \mathrm{i}\beta_2\tilde{A}_3^*\tilde{A}_4, \quad (7а)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_2\tilde{A}_2 = -\mathrm{i}\beta_1\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3, \quad (7б)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_3\tilde{A}_3 = -\mathrm{i}2\beta_1\tilde{A}_1\tilde{A}_2 - \mathrm{i}2\beta_2\tilde{A}_1^*\tilde{A}_4, \quad (7в)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial z} - \mathrm{i}\alpha_4\tilde{A}_4 = -\mathrm{i}3\beta_2\tilde{A}_1\tilde{A}_3. \quad (7г)$$

Построим теперь функционал H так, чтобы система (7) следовала из соотношений

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial z} = -\mathrm{i}\frac{\omega_i}{\omega_1}\frac{\partial H}{\partial \tilde{A}_i^*}. \quad (8)$$

Отсюда найдем, что

$$H = \beta_1\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3^* + \beta_1\tilde{A}_1^*\tilde{A}_2^*\tilde{A}_3 + \beta_2\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_4^* + \beta_2\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3^*\tilde{A}_4$$
$$- \alpha_1\tilde{A}_1\tilde{A}_1^* - \alpha_2\tilde{A}_2\tilde{A}_2^* - \tfrac{1}{2}\alpha_3\tilde{A}_3\tilde{A}_3^* - \tfrac{1}{3}\alpha_4\tilde{A}_4\tilde{A}_4^* \quad (9)$$

и при $\Delta k_{1,2} = 0$ ($\alpha_{1-4} = 0$) представляет собой ту часть гамильтониана, которая описывает взаимодействие поля со средой, т. е. среднюю по времени плотность свободной энергии [20]. Продифференцировав (9) и подставив в полученный результат (7), легко убедиться, что $\partial H/\partial z \equiv 0$ и, следовательно, $H = H_0 = \mathrm{const}$ является еще одним интегралом системы (7). Отметим, что при переходе к вещественным переменным, т. е. при введении фаз φ_i с помощью выражений

$$\tilde{A}_i = \sqrt{I_i}\exp(\mathrm{i}\varphi_i), \quad (10)$$

функционал (9) может быть переписан в виде

$$H = 2\beta_1\sqrt{I_1 I_2 I_3}\cos\Delta\varphi_1 + 2\beta_2\sqrt{I_1 I_3 I_4}\cos\Delta\varphi_2$$
$$- \alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 I_3 - \tfrac{1}{3}\alpha_4 I_4, \quad (11)$$

после чего уравнения примут известную из [20] форму

$$\frac{\partial I_i}{\partial z} = \frac{\omega_i}{\omega_1}\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -\frac{\omega_i}{\omega_1}\frac{\partial H}{\partial I_i}. \quad (12)$$

В (11) использованы обозначения $\Delta\varphi_{1,2} = \varphi_1 + \varphi_{2,3} - \varphi_{3,4}$.

Следуя подходу [16], перейдем теперь от (1) к системе уравнений второго порядка. Продифференцировав (7) и исключив первые производные, с учетом (4) получим систему

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_1}{\partial z^2} = -(\beta_1^2 + 3\beta_2^2)|\tilde{A}_1|^2\tilde{A}_1 + \frac{3}{2}(\beta_1^2 - 3\beta_2^2)|\tilde{A}_3|^2\tilde{A}_1$$
$$+ (\beta_1^2 J_1 + 3\beta_2^2 J_3 - \alpha_1^2)\tilde{A}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)\beta_1\tilde{A}_2^*\tilde{A}_3$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4)\beta_2\tilde{A}_3^*\tilde{A}_4, \quad (13а)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_2}{\partial z^2} = -4\beta_1^2|\tilde{A}_2|^2\tilde{A}_2 - \beta_1^2(2I_{10} - 4I_{20} - I_{30})\tilde{A}_2$$
$$+ \beta_1\beta_2\tilde{A}_3\tilde{A}_3\tilde{A}_4^* - 2\beta_1\beta_2\tilde{A}_1^*\tilde{A}_1^*\tilde{A}_4$$
$$-(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\beta_1\tilde{A}_1^*\tilde{A}_3 - \alpha_2^2\tilde{A}_2, \quad (13б)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_3}{\partial z^2} = -3(\beta_1^2 + 3\beta_2^2)|\tilde{A}_1|^2\tilde{A}_3 + \frac{1}{2}(\beta_1^2 - 3\beta_2^2)|\tilde{A}_3|^2\tilde{A}_3$$
$$+ (\beta_1^2 J_1 + 3\beta_2^2 J_3 - \alpha_3^2)\tilde{A}_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\beta_1\tilde{A}_1\tilde{A}_2$$
$$- 2(\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4)\beta_2\tilde{A}_1^*\tilde{A}_4, \quad (13в)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_4}{\partial z^2} = 4\beta_2^2|\tilde{A}_4|^2\tilde{A}_4 - \beta_2^2(6I_{10} + 3I_{30} + 4I_{40})\tilde{A}_4 - 6\beta_1\beta_2\tilde{A}_1\tilde{A}_1\tilde{A}_2 - 3\beta_1\beta_2\tilde{A}_2^*\tilde{A}_3\tilde{A}_3 + 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)\beta_2\tilde{A}_1\tilde{A}_3 - \alpha_4^2\tilde{A}_4. \quad (13г)$$

Легко видеть, что лишь при $\Delta k_{1,2} = 0$ уравнения (13а) и (13в) можно свести к замкнутой системе из двух связанных НУШ для амплитуд волн A_{1-3}, описав их взаимодействие через эффективную кубическую нелинейность. При $\Delta k_{1,2} \neq 0$ правая часть уравнений содержит члены, пропорциональные произведениям $\tilde{A}_i\tilde{A}_j$ и $\tilde{A}_i\tilde{A}_j^*$, и такое редуцированное описание невозможно. Отметим, что уравнения (13б) и (13г) также могут перейти в аналогичную замкнутую систему, однако при более жестких ограничениях. Для этого, помимо условия $\Delta k_{1,2} = 0$, необходимо потребовать, чтобы $A_{1,3}$ были вещественны.

3. Квазисинхронное взаимодействие

В общем случае условие $\Delta k_{1,2} = 0$ не может быть выполнено из-за дисперсии [17]. Поэтому при реализации каскадных процессов обычно обеспечивают выполнение условий так называемого квазисинхронизма [21]. Для этого в нелинейной среде можно, например, создать периодическую структуру, в которой знак констант связи $\beta_{1,2}$ периодически меняется на противоположный [22], $\beta_{1,2} \to \beta_{1,2}g(z)$. Здесь $g(z)$ – знакопеременная функция, пространственный период $\Lambda = (2m_{1,2} + 1)(2\pi/\Delta k_{1,2})$ которой задан длинами когерентности $2\pi/\Delta k_{1,2}$ двух нелинейных процессов, $m_{1,2}$ – положительные целые числа. Разложив

$$g(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g_m \exp\left(\mathrm{i}2\pi m\frac{z}{\Lambda}\right)$$

в ряд Фурье и ограничившись учетом амплитуд четырех синхронных мод, после усреднения (1) получим систему

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_2^* A_3 - \mathrm{i}\gamma_2 A_3^* A_4, \quad (14а)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_1^* A_3, \quad (14б)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = -\mathrm{i}2\gamma_1^* A_1 A_2 - \mathrm{i}2\gamma_2 A_1^* A_4, \quad (14в)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial z} = -\mathrm{i}3\gamma_2^* A_1 A_3. \quad (14г)$$

Здесь $\gamma_{1,2} = \langle\beta_{1,2}\exp(-\mathrm{i}\Delta k_{1,2}z)\rangle_z$ – усредненные и (в общем случае) комплексные константы нелинейной связи для процессов $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$ соответственно.

После усреднения переход от (14) к уравнениям второго порядка дает искомую замкнутую систему из двух нелинейных уравнений для амплитуд волн $A_{1,3}$ в виде

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = -G_+|A_1|^2A_1 + \frac{3}{2}G_-|A_3|^2A_1 + (|\gamma_1|^2J_1 + 3|\gamma_2|^2J_3)A_1, \quad (15а)$$

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} = -3G_+|A_1|^2A_3 + \frac{1}{2}G_-|A_3|^2A_3 + (|\gamma_1|^2J_1 + 3|\gamma_2|^2J_3)A_3, \quad (15б)$$

с граничными условиями

$$A_1|_{z=0} = A_{10},\ \left.\frac{\partial A_1}{\partial z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_{20}^* A_{30} - \mathrm{i}\gamma_2 A_{30}^* A_{40}, \quad (16а)$$

$$A_3|_{z=0} = A_{30},\ \left.\frac{\partial A_3}{\partial z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}2\gamma_1^* A_{10}A_{20} - \mathrm{i}2\gamma_2 A_{10}^* A_{40}, \quad (16б)$$

где $G_\pm = |\gamma_1|^2 \pm 3|\gamma_2|^2$. При этом, хотя уравнения для амплитуд волн $A_{2,4}$ и не сводятся к аналогичной системе (см. (13)), их интенсивности могут быть найдены из соотношений (4). Отметим, что анализ решений систем нелинейных уравнений такого типа является в последние годы предметом весьма интенсивных исследований [12, 19, 23].

Следуя подходу [16], перейдем теперь к модулям и фазам искомых решений

$$A_j(z) = X_j(z)\exp[\mathrm{i}\varphi_j(z)]. \quad (17)$$

Подставив результат дифференцирования (17) в (15), после разделения действительных и мнимых частей получим систему

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} - X_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 = -G_+X_1^3 + \frac{3}{2}G_-X_3^2X_1 + (|\gamma_1|^2J_1 + 3|\gamma_2|^2J_3)X_1, \quad (18а)$$

$$2\frac{\partial X_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + X_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (18б)$$

$$\frac{\partial^2 X_3}{\partial z^2} - X_3\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)^2 = -3G_+X_1^2X_3 + \frac{1}{2}G_-X_3^3 + (|\gamma_1|^2J_1 + 3|\gamma_2|^2J_3)X_3, \quad (18в)$$

$$2\frac{\partial X_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + X_3\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (18г)$$

Причем поскольку решения, для которых $X_{1,3}(z) = 0$, нас не интересуют, из (18б) и (18г) следуют два известных (см. [16]) интеграла для фаз $\varphi_{1,3}$. Более того, легко показать, что эти интегралы также не являются независимыми и могут быть выражены через H:

$$X_1^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = I_{10}\varphi_{10}' = -\frac{1}{2}H,\quad X_3^2\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = I_{30}\varphi_{30}' = -H, \quad (19)$$

где

$$H = \gamma_1^*A_1A_2A_3^* + \gamma_1A_1^*A_2^*A_3 + \gamma_2^*A_1A_3A_4^* + \gamma_2A_1^*A_3^*A_4 = \mathrm{const}. \quad (20)$$

Здесь и ниже использованы обозначения $\varphi_{1,3}|_{z=0} = \varphi_{10,30}$, $\partial\varphi_{1,3}/\partial z|_{z=0} = \varphi_{10,30}'$ и $X_1^2|_{z=0} = I_{i0}$.

Как и при взаимодействии трех мод [16], из (18б), (18г) и (19) следует, что если на оси z существует хотя бы одна точка z_0, в которой $X_{1,3}|_{z=z_0} = 0$ и $\partial X_{1,3}/\partial z|_{z=z_0} \neq 0$, то $\partial\varphi_{1,3}/\partial z \equiv 0$ во всех точках, для которых $X_{1,3}(z) \neq 0$. В этих ситуациях фазы $\varphi_{1,3}$ могут меняться на оси z только скачком, что можно учесть, полагая, что $X_{1,3}(z) \neq |A_{1,3}(z)|$ и могут быть отрицательными. Если же это не так, то $\varphi_{1,3}(z)$ можно найти, интегрируя (19):

$$\varphi_1(z) = \varphi_{10} - \frac{1}{2}H\int_0^z X_1^{-2}(z')\mathrm{d}z',\qquad \varphi_3(z) = \varphi_{30} - H\int_0^z X_3^{-2}(z')\mathrm{d}z'. \quad (21)$$

4. Аналитические решения задачи

Итак, мы показали, что исходная задача сводится к решению замкнутой системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие волн $A_{1,3}$ в терминах эффективной кубической нелинейности и после замены

$$z = \tilde{z}/\sqrt{G_+} \tag{22}$$

может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{4G_+}\frac{H^2}{X_1^3} = -X_1^3 + \frac{3}{2}\frac{G_-}{G_+}X_3^2 X_1 + J_{13}X_1, \tag{23а}$$

$$\frac{\partial^2 X_3}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{G_+}\frac{H^2}{X_3^3} = -3X_1^2 X_3 + \frac{1}{2}\frac{G_-}{G_+}X_3^3 + J_{13}X_3, \tag{23б}$$

где

$$J_{13} = \frac{|\gamma_1|^2 J_1 + 3|\gamma_2|^2 J_3}{|\gamma_1|^2 + 3|\gamma_2|^2}.$$

Далее мы остановимся только на тех ситуациях, когда на оси z существует хотя бы одна точка z_0, в которой амплитуда хотя бы одной из волн $A_{1,3}$ обращается в нуль (одна из этих двух волн полностью истощается или отсутствует во входной плоскости $z = 0$) и, следовательно, $H = 0$ и $\varphi_{1,3}(z) = \varphi_{10,30}$ (см. выше).

Заметим сразу, что в частном случае $|\gamma_1|^2 = 3|\gamma_2|^2$ полученная система сводится к

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \tilde{z}^2} = -X_1^3 + \frac{1}{2}(J_1 + J_3)X_1, \tag{24а}$$

$$\frac{\partial^2 X_3}{\partial \tilde{z}^2} = -3X_1^2 X_3 + \frac{1}{2}(J_1 + J_3)X_3, \tag{24б}$$

т. е. к хорошо известной задаче независимого периодического изменения амплитуды X_1 в среде с нелинейностью керровского типа [14]. Период осцилляций $X_1(\tilde{z})$ зависит, тем не менее, от начальных интенсивностей и всех остальных волн (от суммы интегралов $J_1 + J_3$), а определение зависимости $X_3(\tilde{z})$ сводится к решению уравнения Ламэ второго порядка [24].

Поиск решений (24а) в стандартных [14] для нелинейности этого типа видах дает

$$X_1 = \sqrt{I_{10}}\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k), \tag{25а}$$

$$X_3 = \sqrt{I_{3M}}\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k) \tag{25б}$$

при $\beta^2 = I_{20} - \frac{1}{3}I_{40}$, $k^2 = \frac{1}{2}I_{10}(I_{20} - \frac{1}{3}I_{40})^{-1}$, $2(I_{20} - \frac{1}{3}I_{40}) \geqslant I_{10} \geqslant 0$ и

$$X_1 = \sqrt{I_{10}}\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k), \tag{26а}$$

$$X_3 = \sqrt{I_{3M}}\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k) \tag{26б}$$

при $\beta^2 = \frac{1}{2}I_{10}$, $k^2 = 2I_{10}^{-1}(I_{20} - \frac{1}{3}I_{40})$, $I_{10} \geqslant 2(I_{20} - \frac{1}{3}I_{40})$. Здесь k – модуль эллиптических функций Якоби $\mathrm{sn}(z, k)$, $\mathrm{cn}(z, k)$ и $\mathrm{dn}(z, k)$ [25], а параметр I_{3M} определен граничными условиями и зависит не только от начальных интенсивностей всех волн I_{i0}, но и от соотношений их фаз φ_{i0} (см. (16б)). Отметим, что все остальные решения системы (24), включая ситуации, когда $I_{20} - \frac{1}{3}I_{40} \leqslant 0$, сводятся к простой трансляции решений (25) и (26) вдоль оси $\tilde{z}$. Здесь и везде далее выражения для зависимостей $I_{2,4}(z)$ не выписаны, поскольку они могут быть определены из соотношений (4).

Для анализа ситуаций, когда $|\gamma_1|^2 \neq 3|\gamma_2|^2$, перейдем к нормированным переменным

$$X_1 = \tilde{X}_1, \quad X_3 = \sqrt{2|G_+/G_-|}\,\tilde{X}_3, \tag{27}$$

в которых система (23) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{X}_1}{\partial \tilde{z}^2} = -\tilde{X}_1^3 \pm 3\tilde{X}_3^2\tilde{X}_1 + J_{13}\tilde{X}_1, \tag{28а}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{X}_3}{\partial \tilde{z}^2} = -3\tilde{X}_1^2\tilde{X}_3 \pm \tilde{X}_3^3 + J_{13}\tilde{X}_3. \tag{28б}$$

Здесь знаки «±» отвечают случаям $|\gamma_1|^2 > 3|\gamma_2|^2$ и $|\gamma_1|^2 < 3|\gamma_2|^2$ соответственно. Заметим, что интегрируемость и характер решений систем такого типа определяются соотношением коэффициентов при нелинейных членах [25].

Случай $|\gamma_1|^2 < 3|\gamma_2|^2$ несложен для анализа, т. к. известно [25], что в этой ситуации очередная замена

$$\tilde{Y}_\pm = \tilde{X}_1 \pm \tilde{X}_3 \quad \text{либо} \quad \tilde{Y}_\pm = \tilde{X}_3 \pm \tilde{X}_1 \tag{29}$$

разделяет переменные, что сводит систему уравнений (28) к двум независимым НУШ с нелинейностью фокусирующего типа

$$\frac{\partial^2 \tilde{Y}_\pm}{\partial \tilde{z}^2} = -\tilde{Y}_\pm^3 + J_{13}\tilde{Y}_\pm. \tag{30}$$

Легко убедиться, что оба уравнения связаны друг с другом только через свои граничные условия и имеют одинаковые коэффициенты пропорциональности в линейных членах. Идентичность последних исключает использование стандартных для систем из двух НУШ решений, в которых $Y_\pm$ пропорциональны разным фундаментальным решениям $\mathrm{cn}(z, k)$ и $\mathrm{dn}(z, k)$ уравнения Ламэ [14]. Поскольку оба этих решения вырождаются лишь при $k = 1$, когда обе функции переходят в $\cosh z$, оказывается, что либо $\tilde{X}_1 \equiv 0$, либо $\tilde{X}_3 \equiv 0$, что отвечает режиму параметрического просветления, когда $I_{1-4} = \mathrm{const}$.

Однако имеются и две другие возможности. Во-первых, решения двух уравнений в (30) могут быть пропорциональны одной и той же эллиптической функции, но сдвинуты друг относительно друга вдоль оси $\tilde{z}$, т. е.

$$\tilde{Y}_\pm = A\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z} \pm \beta\tilde{z}_0, k) \quad \text{либо} \quad \tilde{Y}_\pm = A\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z} \pm \beta\tilde{z}_0, k). \tag{31}$$

Здесь $\tilde{z}_0$ – параметр, характеризующий величину сдвига, который положен симметричным относительно точки $\tilde{z}_0 = 0$ для функций $\tilde{Y}_\pm$ соответственно, что отвечает наличию экстремумов интенсивностей $I_{1,3}$ во входной плоскости. Эта возможность определяет четыре нетривиальных решения системы (28) при $|\gamma_1|^2 < 3|\gamma_2|^2$:

$$\tilde{X}_{1,3} = A\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k)}, \tag{32а}$$

$$\tilde{X}_{3,1} = -A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k)} \tag{32б}$$

при $\beta = A^2 - J_{13}, k^2 = \frac{1}{2}A^2(A^2 - J_{13})^{-1}, A^2 \geqslant \max(J_{13}, 2J_{13})$ и

$$\tilde{X}_{1,3} = A\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k)}, \quad (33а)$$

$$\tilde{X}_{3,1} = -k^2A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k)} \quad (32б)$$

при $\beta = \frac{1}{2}A^2, k^2 = 2(A^2 - J_{13})A^{-2}$ и $2J_{13} \geqslant A^2 \geqslant J_{13}$. Здесь значения констант A и $\tilde{z}_0$ должны быть выбраны такими, чтобы удовлетворить граничным условиям (16), из которых и следуют области существования решений (32) и (33). Отметим, что при возврате к исходным переменным $X_{1,3}$ симметрия выражений (32) и (33) относительно перестановки индексов 1 и 3 нарушается в результате перенормировки амплитуды $\tilde{X}_3$.

Во-вторых, решение одного из уравнений в системе (30) может быть константой, в то время как решение второго – пропорциональным одному из фундаментальных решений $\mathrm{cn}(z, k)$ и $\mathrm{dn}(z, k)$ уравнения Ламэ первого порядка, т. е.

$$\tilde{Y}_{\pm} = A = \mathrm{const} \quad (34а)$$

и

$$\tilde{Y}_{\mp} = B\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k) \quad \text{либо} \quad \tilde{Y}_{\mp} = B\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k). \quad (34б)$$

Эта возможность определяет еще четыре решения системы (28) при $|\gamma_1|^2 < 3|\gamma_2|^2$:

$$\tilde{X}_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{J_{13}} \pm B\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k)\right] \text{ или } \tilde{X}_{3,1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{J_{13}} \pm B\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k)\right] \quad (35)$$

при $\beta^2 = B^2 - J_{13}$, $k^2 = \frac{1}{2}B^2(B^2 - J_{13})^{-1}$ и $B^2 \geqslant 2J_{13} \geqslant 0$ либо

$$\tilde{X}_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{J_{13}} \pm B\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k)\right] \text{ или } \tilde{X}_{3,1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{J_{13}} \pm B\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k)\right] \quad (36)$$

при $\beta^2 = \frac{1}{2}B^2$, $k^2 = 2(B^2 - J_{13})B^{-2}$ и $2J_{13} \geqslant B^2 \geqslant J_{13} \geqslant 0$. Здесь значение константы B также должно быть выбрано таким, чтобы удовлетворить граничным условиям (16). Отметим, что, как и ранее, возврат к исходным переменным $X_{1,3}$ нарушает симметрию выражений (35) и (36) относительно перестановки индексов 1 и 3 за счет перенормировки амплитуды $\tilde{X}_3$.

В случае, когда $|\gamma_1|^2 > 3|\gamma_2|^2$, описанный выше подход также применим. Для того чтобы его использовать, проведем сначала формальную замену $\tilde{z} = \mathrm{i}\underset{\sim}{z}$(см. [26]) и будем искать решение в классах функций, для которых

$$\tilde{X}_1(\mathrm{i}\underset{\sim}{z}) = \mathrm{i}\underset{\sim}{X}_1(\mathrm{i}\underset{\sim}{z}), \quad \tilde{X}_3(\mathrm{i}\underset{\sim}{z}) = \underset{\sim}{X}_3(\underset{\sim}{z}) \quad (37а)$$

либо

$$\tilde{X}_1(\mathrm{i}\underset{\sim}{z}) = \underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{z}), \quad \tilde{X}_3(\mathrm{i}\underset{\sim}{z}) = \mathrm{i}\underset{\sim}{X}_3(\underset{\sim}{z}), \quad (37б)$$

где $\underset{\sim}{X}_{1,3}(\underset{\sim}{z})$, как и $\tilde{X}_{1,3}(\tilde{z})$, вещественны. Отметим, что именно к этим двум классам и относятся эллиптические функции $\mathrm{sn}(z, k)$, $\mathrm{cn}(z, k)$ и $\mathrm{dn}(z, k)$, которые удовлетворяют хорошо известным соотношениям $\mathrm{sn}(\mathrm{i}z, k) = \mathrm{i}\,\mathrm{sn}(z, k')\,\mathrm{cn}^{-1}(z, k')$, $\mathrm{cn}(\mathrm{i}\,z, k) = \mathrm{cn}^{-1}(z, k')$ и $\mathrm{dn}(\mathrm{i}\,z, k) = \mathrm{dn}(z, k')\,\mathrm{cn}^{-1}(z, k')$, где $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ [24]. После указанной замены система (28) переписывается в одном из двух видов, соответствующих выбранному классу решений:

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{X}_1}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = -\underset{\sim}{X}_1^3 - 3\underset{\sim}{X}_3^2\underset{\sim}{X}_1 - J_{13}\underset{\sim}{X}_1, \quad (38а)$$

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{X}_3}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = -3\underset{\sim}{X}_1^2\underset{\sim}{X}_3 - \underset{\sim}{X}_3^3 - J_{13}\underset{\sim}{X}_3 \quad (38б)$$

либо

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{X}_1}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = \underset{\sim}{X}_1^3 + 3\underset{\sim}{X}_3^2\underset{\sim}{X}_1 - J_{13}\underset{\sim}{X}_1, \quad (39а)$$

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{X}_3}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = 3\underset{\sim}{X}_1^2\underset{\sim}{X}_3 + \underset{\sim}{X}_3^3 - J_{13}\underset{\sim}{X}_3. \quad (39б)$$

Легко убедиться, что теперь после замен

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = \underset{\sim}{X}_3 \pm \underset{\sim}{X}_1, \quad (40)$$

аналогичных (29), мы получим две возможные пары независимых НУШ,

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{Y}_{\pm}}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = -\underset{\sim}{Y}_{\pm}^3 - J_{13}\underset{\sim}{Y}_{\pm} \quad (41а)$$

либо

$$\frac{\partial^2 \underset{\sim}{Y}_{\pm}}{\partial \underset{\sim}{z}^2} = \underset{\sim}{Y}_{\pm}^3 - J_{13}\underset{\sim}{Y}_{\pm}. \quad (41б)$$

Уравнения в парах (41а) и (41б) опять связаны друг с другом только через свои граничные условия и имеют идентичные коэффициенты пропорциональности в линейных членах. Однако теперь эти пары отвечают ситуациям с нелинейностью фокусирующего (41а) и дефокусирующего (41б) типов. По тем же соображениям решения уравнений в каждой паре должны быть пропорциональны одной и той же эллиптической функции, но теперь с учетом условий (37) сдвиг их аргументов должен быть мнимым (ортогональным оси $\tilde{z}$):

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = A\,\mathrm{cn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta\underset{\sim}{z}_0, k), \quad (42а)$$

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = A\,\mathrm{dn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta\underset{\sim}{z}_0, k) \quad (42б)$$

либо

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = A\,\mathrm{sn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta\underset{\sim}{z}_0, k). \quad (42в)$$

Здесь $\underset{\sim}{z}_0$ – параметр, характеризующий величину сдвига аргумента функций $\underset{\sim}{Y}_{\pm}$, который считается симметричным относительно положения оси $\underset{\sim}{z}$ на комплексной плоскости. Перечисленные выше возможности определяют три нетривиальных решения системы (28) при $|\gamma_1|^2 > 3|\gamma_2|^2$:

$$\tilde{X}_1 = -A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')}, \quad (43а)$$

$$\tilde{X}_3 = A\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')} \quad (43б)$$

при $\beta^2 = A^2 + J_{13}$, $k^2 = \frac{1}{2}A^2(A^2 + J_{13})^{-1}$, где $A^2 \geqslant \max(-2J_{13}, 0)$;

$$\tilde{X}_1 = -k^2 A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')}, \qquad (44а)$$

$$\tilde{X}_3 = A\,\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')} \qquad (44б)$$

при $\beta^2 = \frac{1}{2}A^2$, $k^2 = 2A^{-2}(A^2 + J_{13})$ и $2|J_{13}| \geqslant A^2 \geqslant |J_{13}|$ при $J_{13} \leqslant 0$;

$$\tilde{X}_1 = A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\frac{\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')}, \qquad (45а)$$

$$\tilde{X}_3 = -A\,\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')} \qquad (45б)$$

при $\beta^2 = J_{13} - \frac{1}{2}A^2$, $k^2 = A^2(2J_{13} - A^2)^{-1}$ и $A^2 \leqslant J_{13}$ при $J_{13} \geqslant 0$.

Однако приведенные решения не исчерпывают всех возможных ситуаций, заданных граничными условиями. Дело в том, что вариации I_{10-40} могут привести к тому, что коэффициент J_{13} в (41) станет отрицательным. При нелинейности фокусирующего типа ситуациям $J_{13} < 0$ отвечают решения (43) и (44). В случае же нелинейности дефокусирующего типа решение (45) уравнений (41б) не существует. В то же время легко убедиться, что функция

$$\frac{\mathrm{sn}(\mathrm{i}z, k)\mathrm{dn}(\mathrm{i}z, k)}{\mathrm{cn}(\mathrm{i}z, k)} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(z, k')\mathrm{dn}(z, k')}{\mathrm{cn}(z, k')}$$

хотя и не является фундаментальным решением уравнения Ламэ и имеет на оси z особые точки, также удовлетворяет каждому из уравнений (41б). При этом наличие особых точек у этой функции за счет сдвижек ее аргументов не препятствует поиску решений в форме

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = A\mathrm{sn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta z_0, k)\mathrm{dn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta z_0, k)[\mathrm{cn}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta z_0, k)]^{-1}, \qquad (46)$$

что сразу приводит к выражениям

$$\tilde{X}_1(\tilde{z}) = A\,\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k)\big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') \times \mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]\big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]^{-1}, \qquad (47а)$$

$$\tilde{X}_3(\tilde{z}) = A\big[\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}_0, k) - k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\big] \times \mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')\big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]^{-1} \qquad (47б)$$

при $\beta^2 = \frac{1}{2}A^2$, $k^2 = \frac{1}{2}(A^2 + J_{13})A^{-2}$ и $A^2 \geqslant |J_{13}|$. Значения констант A и $\tilde{z}_0$ здесь, как и везде ранее, должны быть выбраны такими, чтобы удовлетворить граничным условиям (16), что и определяет области существования решений в формах (43) – (45) и (47). Отметим, что в случае $|\gamma_1|^2 > 3|\gamma_2|^2$ симметрия выражений для $\tilde{X}_{1,3}$ относительно перестановки индексов 1 и 3 с самого начала нарушена требованием (37), а само решение (47) вследствие противофазных сдвижек аргументов $\underset{\sim}{Y}_{\pm}$ уже не имеет на оси z никаких особенностей.

Выбор формы, в которой ищутся решения задачи при $J_{13} < 0$, неоднозначен. Так, из анализа, проведенного в работе [26], следует, что функция $\mathrm{cn}(\mathrm{i}z, k) = \mathrm{cn}^{-1}(z, k')$ также удовлетворяет уравнениям (41б). Поэтому их решения можно искать и в виде

$$\underset{\sim}{Y}_{\pm} = A\,\mathrm{cn}^{-1}(\beta\underset{\sim}{z} \pm \mathrm{i}\beta z_0, k), \qquad (48)$$

что сразу приводит к выражениям

$$\tilde{X}_1 = \big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]A \times \mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')\big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]^{-1}, \qquad (49а)$$

$$\tilde{X}_3 = \big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + k^2\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]A \times \mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k') \times \big[\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}_0, k) \times \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}^2(\beta\tilde{z}, k')\big]^{-1} \qquad (49б)$$

при $\beta^2 = A^2 - J_{13}$, $k^2 = \frac{1}{2}(A^2 - 2J_{13})(A^2 - J_{13})^{-1}$, $A^2 \geqslant \max(J_{13}, 2J_{13})$. Значения констант A и $\tilde{z}_0$ здесь опять должны быть выбраны такими, чтобы удовлетворить условиям (16). По-прежнему симметрия $\tilde{X}_{1,3}$ относительно перестановки индексов $1 \leftrightarrow 3$ нарушена требованием (37), а само решение (49) за счет сдвижек аргументов $\underset{\sim}{Y}_{\pm}$ также не имеет особенностей на оси z.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе с использованием подхода, аналогичного [16], показано, что в тех случаях, когда волновыми расстройками можно пренебречь (квазисинхронизм), процесс параметрического взаимодействия четырех мод при каскадном преобразовании частоты на квадратичной нелинейности может быть описан в терминах эффективной кубической нелинейности. При этом исходная задача сводится к решению системы из двух связанных НУШ относительно комплексных амплитуд волн, задействованных во всех нелинейных процессах [14, 19]. Эта система полностью интегрируема и простой заменой переменных расщепляется на два идентичных НУШ, что позволяет найти ее решения в весьма необычной форме: как сумму и как разность двух одинаковых решений НУШ для нелинейности фокусирующего либо дефокусирующего типа со сдвинутыми аргументами. Полученные таким способом аналитические решения перекрывают весь возможный диапазон изменения граничных условий, что позволяет детально проанализировать роль последних и оптимизировать эффективность преобразования в каждой конкретной ситуации.

Естественно, что приведенные в настоящей работе аналитические решения можно было бы получить и другими методами. Так, для частного случая $I_{30} = 0$ и $\varphi_{i0} = \mathrm{const}$ полное семейство решений, аналогичных (25), (26), (32), (33), (45) и (47), а также сдвинутые по оси z на четверть периода решения (43) и (44) в форме

$$\tilde{X}_1 = \frac{1}{k} A\, \mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k')}, \tag{50а}$$

$$\tilde{X}_3 = \frac{1}{k} A\, \mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k) \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k')} \tag{50б}$$

при $\beta^2 = A^2 + J_{13}$, $k^2 = \frac{1}{2} A^2 (A^2 + J_{13})^{-1}$, где $A^2 \geqslant \max(-2J_{13}, 0)$, и

$$\tilde{X}_1 = A\, \mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}_0, k) \times \frac{\mathrm{cn}(\beta\tilde{z}, k')\mathrm{dn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k')}, \tag{51а}$$

$$\tilde{X}_3 = A\, \mathrm{dn}(\beta\tilde{z}_0, k) \frac{\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}, k')}{\mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}, k') + \mathrm{sn}^2(\beta\tilde{z}_0, k)\mathrm{cn}^2(\beta\tilde{z}, k')} \tag{51б}$$

при $\beta^2 = \frac{1}{2} A^2$, $k^2 = 2A^{-2}(A^2 + J_{13})$ и $2|J_{13}| \geqslant A^2 \geqslant |J_{13}|$ при $J_{13} \leqslant 0$ были получены нами и с использованием громоздкого традиционного подхода [17] – последовательного решения классической системы укороченных дифференциальных уравнений первого порядка (14).

Отметим также, что аналитические решения системы из двух НУШ вида (28) также получены нами, по-видимому, впервые, а описанный в работе метод построения частных решений систем из двух НУШ в виде суммы и разности идентичных фундаментальных решений со сдвинутыми аргументами достаточно универсален и, насколько нам известно, до сих пор не использовался. Этот метод оказывается применимым во всех тех случаях, когда решаемая задача допускает разделение переменных [25], что происходит, например, и при описании самосогласованного бездисперсионного распространения цугов ортогонально поляризованных лазерных импульсов по одномодовым оптическим волокнам [3 – 6, 12, 19, 27].

1. Yuen H.C., Lake B.M. *Adv. Appl. Mech.*, **22**, 67 (1982).
2. Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M., Zakharov V.E. *Phys. Rep.*, **142**, 103 (1986).
3. Akhmediev N.N., Ankiewicz A. *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams* (London: Chapman and Hall, 1997).
4. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos* (England: Cambridge University Press, 2000).
5. Kamchatnov A.M. *Nonlinear Periodic Waves and their Modulation* (Singapore: World Scientific, 2000).
6. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego: Acad. Press, 2003).
7. Fleischer J.W., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Nature (Ldn)*, **422**, 147 (2003).
8. Захаров В.Е. *ПМТФ*, № 2, 86 (1968); Martin D.U., Yuen H.C., Saffman P.G. *Wave Motion*, **2**, 215 (1980).
9. Павленко В.П., Петвиашвили В.И. *Физика плазмы*, **8**, 206 (1982); Фильченков С.Е., Фрейман Г.М., Юнаковский А.Д. *Физика плазмы*, **13**, 961 (1987); Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. *УФН*, **167**, 1137 (1997).
10. Davydov A.S. *Solitons in Molecular Systems* (Netherlands: Reidel, 1985); Takeuchi S., Yoshizawa M., Matsuda T., et al. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 2508 (1992); Takahashi A., Mukamel S. *J. Chem. Phys.*, **100**, 2366 (1994); Xu Ji-Zhong, Huang Jing-Ning. *Phys. Lett. A*, **197**, 127 (1995); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **33**, 219 (2003).
11. Davydov A.S. *Phys. Stat. Sol. B*, **146**, 619 (1988); Goff J.P., Tennant D.A. *Phys. Rev. B*, **52**, 15992 (1995); Haviland D.B., Delsing P. *Phys. Rev. B*, **54**, R6857 (1996); Воронов А.В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *ЖЭТФ*, **120**, 1256 (2001).
12. Михайловский А.Б., Кудашев В.Р., Лахин В.П. и др. *Письма в ЖЭТФ*, **40**, 273 (1984); Hioe F.T. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1152 (1999); Chow K.W., Lai D.W.C. *Phys. Rev. E*, **65**, 026613 (2002); Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed B.A. *Opt. Commun.*, **219**, 251 (2003).
13. Ankiewicz A., Maruno K., Akhmediev N. *Phys. Lett. A*, **308**, 397 (2003); Maruno K., Ankiewicz A., Akhmediev N. *Opt. Commun.*, **221**, 199 (2003).
14. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999); Выслоух В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **28**, 55 (1999).
15. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. *Письма в ЖЭТФ*, **20**, 734 (1974); Bang O., Christiansen P.L., Clausen C.B. *Phys. Rev. E*, **56**, 7257 (1997); Kobyakov A., Darmanyan S., Pertsch T., Lederer E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 1737 (1999); Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S., Bang O., Soukoulis C.M. *Phys. Rev. E*, **63**, 016615 (2001); Malomed B.A., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., et al. *Phys. Rev. E*, **65**, 056606 (2002); Torner L., Barthelemy A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **39**, 22 (2003).
16. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37**, 266 (2007); Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76**, 046611 (2007).
17. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966).
18. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5**, 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Ф. *Квантовая электроника*, № 4, 81 (1973); Meredith G.R. *J. Chem. Phys.*, **77**, 5863 (1982); Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54**, 3455 (1996).
19. Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. Royal Soc. Ldn A*, **451**, 685 (1995); Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *J. Math. Phys.*, **41**, 8236 (2000); Shin H.J. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 4113 (2003).
20. Kryzhanovsky B., Karapetyan A., Glushko B. *Phys. Rev. A*, **44**, 6036 (1991); Kryzhanovsky B., Glushko B. *Phys. Rev. A*, **45**, 4979 (1992); Kryzhanovsky B., Glushko B. *Phys. Rev. A*, **46**, 2831 (1992).
21. Somekh S., Yariv A. *Opt. Commun.*, **6**, 301 (1972); Yacoby Y., Aggarwal R.L., Lax B. *J. Appl. Phys.*, **44**, 3180 (1973); McMullen J.D. *J. Appl. Phys.*, **46**, 3076 (1975); Rustagi K.C., Mehendale S.C., Meenakshi S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **18**, 1029 (1982); Alferness R.C., Korotky S.K., Marcatili E.A.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **20**, 301 (1984); Fejer M.M., Magel G.A., Jundt D.H., Byer R.L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 2631 (1992).
22. Aleksandrovski A.L., Chirkin A.S., Volkov V.V. *J. Rus. Laser Research*, **18**, 101 (1997); Дмитриев В.Г., Юрьев Ю.В. *Квантовая электроника*, **25**, 1033 (1998); Чиркин А.С., Волков В.В., Лаптев Г.Д., Морозов Е.Ю. *Квантовая электроника*, **30**, 847 (2000); Saltiel M.S., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S. *Progr. in Optics*, **47**, 1 (2005).
23. Kostov N.A., Gerdjikov V.S., Valchev T.I. *SIGMA*, **3**, 071 (2007).
24. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1989); Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
25. Bountis T., Segur H., Vivaldi F. *Phys. Rev. A*, **25**, 1257 (1982); Hietarinta J. *Phys. Rep.*, **147**, 87 (1987); Perelomov A.M. *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras* (Basel, Birkhauser Verlag, 1990, vol. 1); Eilbeck J.C., Enol'skii V.Z., Kuznetsov V.B., Leykin D.V. *Phys. Lett. A*, **180**, 208 (1993); Kasperczuk S. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **58**, 387 (1994).
26. Куратов А.С., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **38**, 144 (2008).
27. Florjanczyk M., Tremblay R. *Phys. Lett. A*, **141**, 34 (1989); Chow K.W. *J. Math. Phys.*, **36**, 4125 (1995); Hioe F.T. *Phys. Lett. A*, **304**, 30 (2002); Tsang S.C., Nakkeeran K., Malomed B.A., Chow K.W. *Opt. Commun.*, **249**, 117 (2005).