

Собственные частоты составного кольцевого резонатора

В.Ф.Судаков

Рассмотрен неоднородный кольцевой оптический резонатор специального вида, внутри которого на произвольном расстоянии друг от друга расположены две одинаковые диэлектрические пластины конечной толщины с коэффициентом преломления, существенно большим коэффициента преломления среды, заполняющей остальную часть резонатора. Данную систему можно рассматривать как кольцевой резонатор, образованный двумя линейными резонаторами, связанными через ограничивающие их пластины. В приближении плоских волн решена классическая спектральная задача для такого резонатора. Показано, что при сравнительно малом коэффициенте отражения от пластин удастся получить в аналитическом виде физически приемлемое описание спектра собственных частот и мод. Предложен метод решения спектральной задачи, в котором аналитический подход сочетается с численным экспериментом. Показано, что спектр резонатора является простым и образуется последовательность дуплетов. Соответствующие им моды вещественны и ортогональны. Найдены условия, при которых расщепление собственных частот в дуплетах исчезает.

Ключевые слова: неоднородный кольцевой оптический резонатор, расщепление собственных частот, связанные резонаторы.

1. Введение

Необходимость в исследовании кольцевого резонатора с неоднородным заполнением вызвана несколькими обстоятельствами. С одной стороны, до сих пор не выявлены основные причины возникновения зон внутренней синхронизации кольцевых лазеров (ясно, что она обусловлена неоднородностью, но детальное исследование роли структуры неоднородности отсутствует). С другой стороны, нет определенного ответа на вопрос, можно ли использовать специальным образом организованную неоднородность (которая неизбежно вызывает обратное рассеяние) в целях устранения (или хотя бы частичного «уменьшения») такой синхронизации.

О роли естественных неоднородностей сказать что-либо трудно, поскольку, по сути, это остаточные неконтролируемые дефекты. Подобные неоднородности играют нежелательную роль, вызывая рассеяние излучения назад. Обычно их исследуют, выдвигая некоторые гипотезы (модели точечных или многоточечных отражателей, поверхностных или объемных распределенных рассеивателей). На основании таких частных исследований пытаются делать обобщающие выводы (см., напр., [1–4]). Иное дело – специально организованные структурные неоднородности, вполне детерминированные и функционально обоснованные. Такие неоднородности могут вызывать рассеяние вперед и назад в нескольких сечениях резонатора, а возникающие при этом волны могут интерферировать нужным образом. Здесь нет ничего нежиз-

данного, достаточно вспомнить многослойные оптические гетероструктуры, в которых наблюдается просветление. Исследования в данном направлении несомненно целесообразны, однако целенаправленные работы на эту тему нам не известны. Можно, правда, упомянуть статью [5], но используемый в ней подход специализирован с учетом рассматриваемого типа неоднородности.

Исследование структурных неоднородностей заведомо сложно, т.к. сводится к решению спектральной задачи для дифференциального оператора на отрезке с периодическими граничными условиями, а такая задача в математическом отношении относится к числу труднейших. Целью настоящей статьи является приближенное решение подобной задачи для одного частного вида неоднородности на основе предложенного для этого специального (но допускающего обобщения) метода исследования. Метод может быть полезен и при изучении структурных неоднородностей общего вида.

Конкретизируем постановку задачи. Для этого рассмотрим кольцевой резонатор с периметром L и встроенным в него линейным низкодобротным резонатором длиной L_1 , образованным двумя одинаковыми диэлектрическими пластинами (формирующими пластинами) толщиной L_0 каждая с коэффициентом преломления n . Коэффициент преломления остальной части среды резонатора $n_0 < n$, а ее длина $L_2 = L - 2L_0 - L_1$. Таким образом, кольцевой резонатор образован двумя связанными линейными резонаторами различной длины. Формирующие пластины рассеивают излучение назад с коэффициентом отражения R и вперед с коэффициентом пропускания T . Если $n/n_0 \rightarrow 1$, то $R \rightarrow 0$, $T \rightarrow 1$. Если $n/n_0 \gg 1$, то $|R| \rightarrow 1$, $T \rightarrow 0$. Определим спектр собственных частот и моды такой структуры.

Несмотря на предельную простоту рассматриваемой неоднородности, решение спектральной задачи для нее

В.Ф.Судаков. Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: vvfss@rol.ru

неизвестно. Приводимый в литературе общий подход основан на использовании уравнения Шредингера, асимптотика решений которого принципиально отличается от асимптотики решений волнового уравнения, что не позволяет адаптировать к данному частному случаю известные общие результаты [6].

2. Коэффициенты отражения и пропускания формирующих пластин

Представим эти коэффициенты в следующем виде: $R = \rho \exp(-i\alpha)$, $T = \tau \exp(-i\beta)$. Поскольку потери отсутствуют, то $\rho^2 + \tau^2 = 1$. Формирующие пластины имеют конечную толщину, оптически однородны и находятся между одинаковыми оптически однородными средами. В такой ситуации R и T могут быть найдены в явном виде и точно. Соответствующие выражения приведены, например, в [1]:

$$\rho^2(\theta) = \sin^2 \theta \left[\frac{4n^2 n_0^2}{(n^2 - n_0^2)^2} + \sin^2 \theta \right]^{-1}, \tag{1}$$

$$\tau^2(\theta) = \left[1 + \left(\frac{n^2 - n_0^2}{2nn_0} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{-1},$$

$$\alpha(\theta) = \arctan \left(-\frac{2n_0 n}{n^2 + n_0^2} \cot \theta \right), \tag{2}$$

$$\beta(\theta) = \arctan \left[\frac{0.5(n_0 + n)^2 \sin 2\theta}{2n^2 n_0 \cos^2 \theta - (n^2 + n_0^2) \sin^2 \theta} \right],$$

где $\theta = kL_0 n$ – приведенная частота (набег фазы на формирующей пластине); k – волновое число излучения в вакууме.

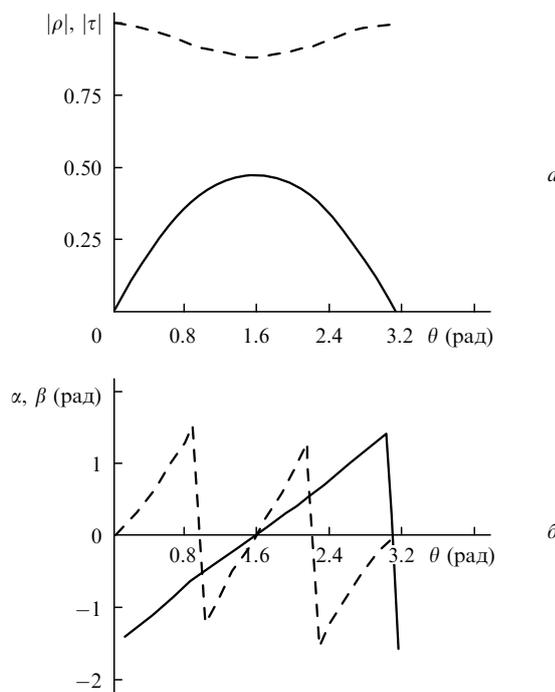


Рис.1. Зависимости модулей (а) и фаз (б) коэффициентов отражения $R = \rho \exp(-i\alpha)$ (сплошные кривые) и пропускания $T = \tau \exp(-i\beta)$ (штриховые кривые) формирующих пластин от приведенной частоты θ при $n/n_0 = 5/3$.

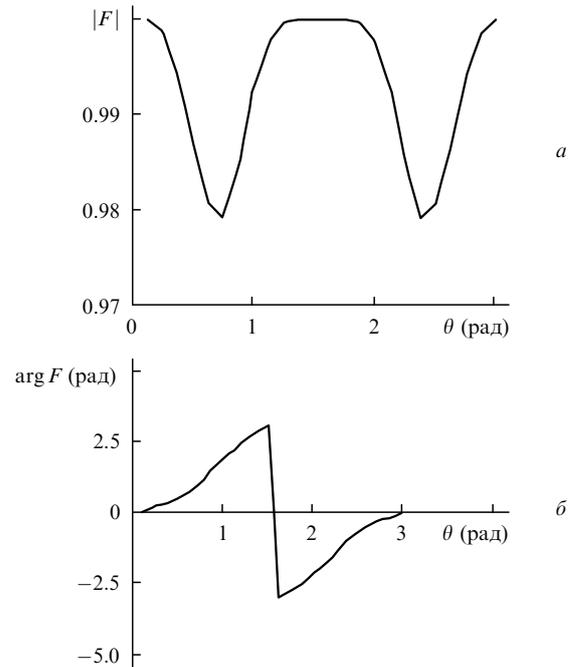


Рис.2. Зависимости модуля (а) и фазы (б) функции F от приведенной частоты θ при $n_0 = 1$, $n/n_0 = 5/3$.

На рис.1,а показано изменение модулей коэффициентов отражения и пропускания, а на рис.1,б – изменение их фаз в зависимости от приведенной частоты.

Для дальнейших вычислений будет необходима также функция

$$F(\theta) = -R^2(\theta) + T^2(\theta) \exp(-i2\theta). \tag{3}$$

Проведем ее расчет и представим результаты на рис.2. Характерной является периодичность изображенных зависимостей.

3. Математическая формулировка спектральной задачи

Выделим интервалы $0 \leq x \leq L_1$ и $0 \leq x \leq L_2$ изменения координаты x в пределах периметра резонатора. Представим поле на первом интервале в виде

$$u^{(1)}(x) = E_-^{(1)} \exp(ikn_0 x) + E_+^{(1)} \exp(-ikn_0 x), \tag{4}$$

а на втором – в виде

$$u^{(2)}(x) = E_-^{(2)} \exp[ikn_0(x - L_1 - L_0)] + E_+^{(2)} \exp[ikn_0(x - L_1 - L_0)]. \tag{5}$$

Амплитуды, входящие в представление полей (4) и (5), удовлетворяют соотношениям

$$\begin{pmatrix} E_+^{(1)} \\ E_-^{(2)} \exp(ikn_0 L_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \exp(-iknL_0) & R \\ R & T \exp(-iknL_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_+^{(2)} \exp(-ikn_0 L_2) \\ E_-^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} E_+^{(2)} \\ E_-^{(1)} \exp(ikn_0 L_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \exp(-iknL_0) & R \\ R & T \exp(-iknL_0) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_+^{(1)} \exp(-ikn_0 L_1) \\ E_-^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь используются условия отражения и прохождения для формирующих пластин, а также условия периодичности. Из векторных соотношений (6) и (7) можно получить, что

$$T^2 \begin{pmatrix} E_+^{(2)} \\ E_-^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2\} \exp(i2knL_0) \\ -R \exp(i2knL_0) \exp(-ikn_0 L_2) [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_+^{(2)} \\ E_-^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Это уравнение однородно, и поэтому только при некоторых (собственных) частотах k существует ненулевой вектор

$$\begin{pmatrix} E_+^{(2)} \\ E_-^{(2)} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий ему. Собственные частоты, очевидно, должны быть корнями определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} \{\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2\} \exp(i2knL_0) - T^2 \\ -R \exp(i2knL_0) \exp(-ikn_0 L_2) [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)] \end{pmatrix}$$

Найдя собственную частоту, получим отношение $E_+^{(2)}/E_-^{(2)}$, а затем с помощью (5) с точностью до произвольного множителя определим поле (моду) на интервале $0 \leq x \leq L_2$.

4. Приближенная оценка собственных частот

Собственные частоты k должны быть корнями определителя приведенной выше матрицы, т.е. удовлетворять уравнению

$$\{[\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2] - T^2 \exp(-i2knL_0)\}^2 - R^2 [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)]^2 = 0. \quad (9)$$

В предельном случае $R = 1$, $T = 0$, когда кольцевой резонатор распадается на два несвязанных линейных, это уравнение вырождается в пару уравнений

$$\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + 1 = \pm [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)],$$

которые имеют счетную последовательность собственных частот. Очевидно, что эти частоты совпадают с корнями уравнений $\exp(ikn_0 L_2) = \pm 1$ и $\exp(ikn_0 L_1) = \mp 1$. Нетрудно показать, что других вещественных собственных частот нет. Множество указанных собственных частот не пусто в том и только в том случае, когда длины L_1 и L_2 кратны друг другу. С физической точки зрения подобное предположение не вносит ограничений. Впредь, не снижая общности, будем считать, что $L_1 = m_1 L_0$ и $L_2 = m_2 L_0$, где m_1, m_2 – целые числа.

Из (9) можно получить правильные значения собственных частот и в другом предельном случае: $R = 0$,

$T = 1$ (кольцевой резонатор однороден). Действительно, тогда (9) вырождается в уравнение

$$\{\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] - \exp(-i2knL_0)\}^2 = 0, \quad (10)$$

которое позволяет получить эквидистантную последовательность собственных частот однородного кольцевого

$$-R \exp(i2knL_0) \exp(ikn_0 L_2) [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)] \{ \exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2 \} \exp(i2knL_0)$$

резонатора, удовлетворяющих уравнению $\exp[ikn_0(L_2 + L_1 + 2L_0)] = 1$ (учтено, что $n = n_0$ при $R = 0$). Из структуры формулы (10) следует, что эти собственные частоты двукратно вырождены.

При достаточно малых значениях $|R|$ последнее слагаемое в (9) можно рассматривать как возмущение. Ниже рассмотрим только малые $|R|$, что вполне реалистично (см. рис.1), во всяком случае при $1 < n/n_0 \leq 5/3$. Вре-

$$-R \exp(i2knL_0) \exp(ikn_0 L_2) [\exp(ikn_0 L_2) + \exp(ikn_0 L_1)] \{ \exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2 \} \exp(i2knL_0) - T^2 \quad (8)$$

менно отбрасывая последнее слагаемое в (9), получаем укороченное уравнение

$$\{[\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2] - T^2 \exp(-i2knL_0)\}^2 = 0. \quad (11)$$

Собственные частоты будем искать в виде $k = k_0 + \delta k$, где k_0 – любой корень (их счетное множество) укороченного уравнения (11), а δk – добавка порядка $|R|$. Поскольку неоднородный резонатор потерь не имеет, числа k, k_0 , а следовательно, и δk должны быть вещественными. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем. Очевидно, что корень k_0 уравнения (10) двукратно вырожден и удовлетворяет уравнению

$$\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] = -R^2 + T^2 \exp(-i2k_0 n L_0). \quad (12)$$

Функция $F(\theta)$ (3) имеет период π . Как следует из рис.2, в интервале $0 < \theta \leq \pi$ ее модуль точно равен 1 при $\theta = \pi$ и $1.25 \leq \theta \leq 1.83$. Зависимость $\arg F(\theta)$ разрывна и монотонно возрастает в области непрерывности. При $\theta = 0$ модуль и фаза не определены. Численный эксперимент при изменении n и n_0 в достаточно широких пределах (достижимых экспериментально) показал, что кривая на рис.2,а совсем не менялась, а кривая на рис.2,б оставалась неизменной качественно, незначительно меня форму только на участках монотонного роста. Отсюда можно сделать вывод о том, что вещественными корнями уравнения (12) являются только те k_0 , которые при $1.25 \leq \theta \leq 1.83$ или $\theta = \pi$ одновременно удовлетворяют условиям

$$k_0(\theta) = \frac{2\pi q_1 + \arg F(\theta)}{n_0(L_1 + L_2)}, \quad k_0(\theta) = \frac{\theta + \pi q_2}{n_0 L_0} \quad (13)$$

(q_1 и q_2 – целые числа).

Собственные частоты исходного неоднородного резонатора получим из уравнения (9), которому придадим следующий вид:

$$\begin{aligned} & \exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + F(\theta) \\ & = \pm R[\exp(ikn_0L_2) + \exp(ikn_0L_1)] \end{aligned} \quad (14)$$

Двум знакам соответствует пара собственных частот $k_0 \pm \delta k$. Это значит, что частотный спектр неоднородного резонатора простой (вырождение снимается).

Расщепление (двукратного корня k_0) найдем методом возмущений. Для этого представим левую часть (14) как линейную функцию от δk , используя при этом выражение (12), а правую часть (14) заменим ее значением при $k = k_0$:

$$\begin{aligned} & \left[in_0(L_2 + L_1) \exp[ik_0n_0(L_2 + L_1)] - \frac{dF(\theta)}{dk} \Big|_{k=k_0} \right] \delta k \\ & = \pm R \Big|_{k=k_0} [\exp(ik_0n_0L_2) + \exp(ik_0n_0L_1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dF(\theta)}{dk} \Big|_{k=k_0} & = \left[-2R \frac{dR}{d\theta} + 2T \frac{dT}{d\theta} \exp(-i2\theta) - 2iT^2 \exp(-i2\theta) \right] nL_0. \end{aligned}$$

Из (15) получим, что

$$\begin{aligned} \delta k & = \pm R \left\{ in_0(L_2 + L_1) \exp[ik_0n_0(L_2 + L_1)] - \left[-2R \frac{dR}{d\theta} + 2T \frac{dT}{d\theta} \exp(-i2\theta) - 2iT^2 \right] nL_0 \right\}^{-1} \Big|_{k=k_0} [\exp(ik_0n_0L_2) + \exp(ik_0n_0L_1)]. \end{aligned}$$

Это выражение с учетом уравнения (12) примет следующий окончательный вид:

$$\delta k(\theta) = \pm \frac{2}{nL_0} \Delta(\theta) \cos \left(\theta \frac{n_0}{n} \frac{L_2 - L_1}{2L_0} \right), \quad (16)$$

где $\Delta(\theta)$ – периодическая по θ функция вида

$$\begin{aligned} \Delta(\theta) & = R[-R^2 + T^2 \exp(-i2\theta)]^{1/2} \left\{ i \frac{L_2 + L_1}{L_0} \times [-R^2 + T^2 \exp(-i2\theta)] + \left[2R \frac{dR}{d\theta} - 2T \frac{dT}{d\theta} \exp(-i2\theta) + 2i \frac{n}{n_0} T^2 \exp(-i2\theta) \right] \right\}^{-1} \Big|_{k=k_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как было указано выше, добавки δk должны быть вещественны. Из (17) следует, что это требование эквивалентно условию $\arg \Delta(\theta) = 0, \pm\pi$ за период изменения θ . Зависимость (17) представлена на рис.3.

Из рис.3,б видно, что при $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi$ фаза функции (17) равна $-\pi$. Ни при одном значении θ , как показывает точный расчет, фаза в нуль не обращается. Модуль (17) при $\theta = \pi$ точно равен нулю, т. е. расщепления нет. Поэтому единственно возможными значениями, при

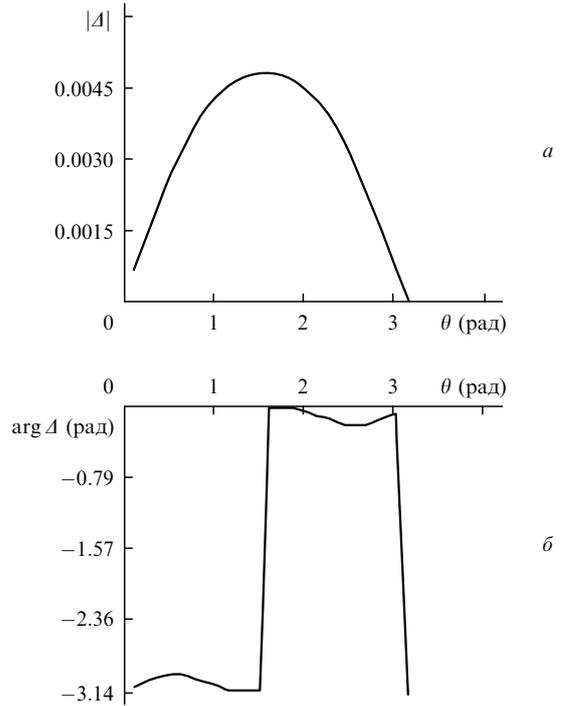


Рис.3. Зависимости модуля (а) и фазы (б) функции Δ от приведенной частоты θ при $(L_1 + L_2)/L_0 = 110$ и $n/n_0 = 5/3$.

которых расщепление вещественно, остаются только $\theta = \pi/2 \pm \pi q_2$. Важным обстоятельством является то, что кривые на рис.3, как показал численный эксперимент, очень слабо меняют форму (качественно неизменны) в чрезвычайно широких пределах изменения параметров $(L_1 + L_2)/L_0$ и n/n_0 . Однако при любых значениях этих параметров точно выполняются соотношения $\arg \Delta(\pi/2 + \pi q_2) = -\pi$ и $|\Delta(\pi + \pi q_2)| = 0$. Как было показано, вещественны и значения $k_0(\pi/2)$, рассчитываемые по формуле (13). Условия (13) могут быть сведены к условию

$$k_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi q_1 + 1}{n_0(L_1 + L_2)}, \quad (18)$$

если выполнено следующее соотношение между параметрами неоднородности:

$$\frac{n_0}{n} \frac{L_1 + L_2}{L_0} = 2 \frac{2q_1 + 1}{2q_2 + 1}. \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) эквивалентны (13).

Таким образом, если выполняется условие (19), вещественными собственными частотами неоднородного кольцевого резонатора являются две последовательно-

$$k_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) \pm \delta k \left(\frac{\pi}{2} + \pi q_2 \right). \quad (20)$$

5. Расщепление собственных частот

Особый интерес представляет расщепление в дуплетах собственных частот $2|\delta k(\pi/2)|$. Проанализируем его численно, воспользовавшись формулами (15) и (18), (19). Далее приведен алгоритм расчета для длины волны излучения $\lambda_0 = 0.638$ мкм при $L_0 = 3 \times 10^{-3}$ м, $(L_1 + L_2)/L_0 = 110$ и $n_0 = 1$.

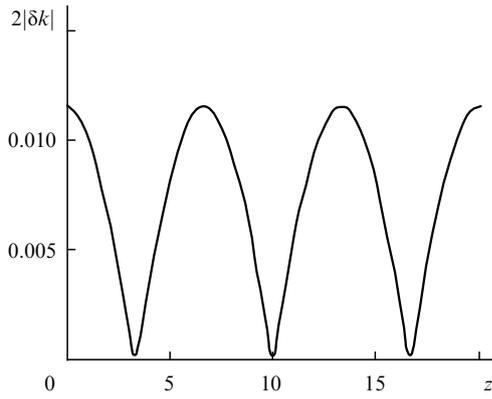


Рис.4. Зависимость расщепления $2|\delta k(\pi/2)|$ в дуплете собственных частот от параметра $z = (L_2 - L_1)/L_0$.

В этих условиях $k_0(\pi/2) \approx 2\pi/\lambda_0$. В соответствии с (18) найдем ближайшее целое число q_1 , удовлетворяющее соотношению

$$q_1 = \frac{k_0(\pi/2)n_0(L_1 + L_2) - 1}{2\pi} \approx \frac{(2\pi/\lambda_0)n_0(L_1 + L_2) - 1}{2\pi}.$$

Это достаточно большое целое число порядка $Q_1 = n_0 \times (L_1 + L_2)/\lambda_0$. Пусть $n_0/n = 3/5$, тогда в силу (13)

$$q_2 = 2q_1 \left(\frac{n_0}{n} \frac{L_1 + L_2}{L_0} \right)^{-1},$$

где значение q_2 следует округлить до ближайшего целого числа. Число q_2 имеет порядок $Q_2 = 2nL_0/\lambda_0$, т. е. также очень велико. Расчет по формуле (17) дает $\Delta(\pi/2)|_{k=k_0(\pi/2)} = -4.781 \times 10^{-3}$. Выражение (15) позволяет найти расщепление $2|\delta k(\pi/2)|$. Оно зависит от нормированной разности $(L_1 - L_2)/L_0$ и максимально при $L_1 = L_2$. Это максимальное значение расщепления равно $1.1 \times 10^{-2} \text{ м}^{-1}$. Большой интерес представляет зависимость расщепления от нормированной разности $(L_1 - L_2)/L_0$ при фиксированных прочих параметрах неоднородности (рис.4).

Из рис.4 следует, что, перемещая диэлектрические вставки с коэффициентом преломления $n > n_0$ относительно друг друга, можно получать существенно различные расщепления в дуплете собственных частот. При $(L_1 - L_2)/L_0 = (2q + 1)2n/n_0$ ($q = 0, 1, 2, \dots$) расщепление практически исчезает, т. е. имеет место «просветление» кольцевого резонатора. В силу периодичности зависимости $\Delta(\theta)$ кривая на рис.4 остается неизменной при замене $\Delta(\pi/2) \rightarrow \Delta(\pi/2 + \pi q_2)$, т. е. при использовании частоты $\theta = \pi/2 + \pi q_2$, которая соответствует истинному значению $k_0(\pi/2) \approx 2\pi/\lambda_0$. Следовательно, расщепление в дуплетах собственных частот не зависит от положения центра дуплета, а определяется только характером неоднородности резонатора.

6. Моды резонатора

Проведем оценку мод рассматриваемого резонатора в области $0 \leq x \leq L_2$. Как известно, они вполне характеризуются отношением компонент вектора

$$\begin{pmatrix} E_+^{(2)} \\ E_-^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Это отношение можно получить из определителя матрицы (8),

$$\frac{E_+^{(2)}}{E_-^{(2)}} = \tag{21}$$

$$\frac{-R \exp(i2knL_0) \exp(ikn_0L_2) [\exp(ikn_0L_2) + \exp(ikn_0L_2)]}{\{\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2\} \exp(i2knL_0) - T^2} \Big|_{k=k_0 \pm \delta k},$$

при k , равном одному из собственных значений. В силу (14)

$$\frac{R[\exp(ikn_0L_2) + \exp(ikn_0L_1)]}{\exp[ikn_0(L_2 + L_1)] + R^2 - T^2 \exp(-i2knL_0)} \Big|_{k=k_0 \pm \delta k} = \pm 1,$$

тогда из (21) получим, что

$$\frac{E_+^{(2)}}{E_-^{(2)}} = \pm \exp(i2knL_0) \exp(ikn_0L_2) \Big|_{k=k_0 \pm \delta k}. \tag{22}$$

Таким образом, моды, соответствующие дуплету собственных значений $k_0 \pm \delta k$, с точностью до произвольной постоянной определяются выражением

$$u^{(2)}(x) \Big|_{k=k_0 \pm \delta k} = E_-^{(2)} \exp(iknL_0) \exp\left(ikn_0 \frac{L_2}{2}\right)$$

$$\times \left[\exp(-iknL_0) \exp\left(-ikn_0 \frac{L_2}{2}\right) \exp[ikn_0(x - L_1 - L_0)] \right.$$

$$\left. \pm \exp(iknL_0) \exp\left(ikn_0 \frac{L_2}{2}\right) \exp[-ikn_0(x - L_1 - L_0)] \right] \Big|_{k=k_0 \pm \delta k}.$$

Указанные моды имеют характер стоячих волн:

$$u^{(2)}(x) \equiv \cos \left\{ (k_0 + \delta k) \left[n_0(x - L_1 - L_0) - nL_0 - n_0 \frac{L_2}{2} \right] \right\},$$

$$u^{(2)}(x) \equiv \sin \left\{ (k_0 - \delta k) \left[n_0(x - L_1 - L_0) - nL_0 - n_0 \frac{L_2}{2} \right] \right\}.$$

Если резонатор имеет исчезающе малую неоднородность, т. е. $n \rightarrow n_0$, $\delta k \rightarrow 0$ и $R \rightarrow 0$, то собственные частоты дуплета сливаются в двукратно вырожденное собственное значение, которому соответствуют две ортогональные моды:

$$u^{(2)}(x) \equiv \cos \left[k_0 n_0 \left(x - L_1 - 2L_0 - \frac{L_2}{2} \right) \right],$$

$$u^{(2)}(x) \equiv \sin \left[k_0 n_0 \left(x - L_1 - 2L_0 - \frac{L_2}{2} \right) \right].$$

Соответствующая пара встречно распространяющихся бегущих волн (две линейные комбинации ортогональных стоячих волн) также является допустимой парой мод для той же вырожденной собственной частоты.

7. Выводы

Собственные частоты кольцевого резонатора, образованного каскадным соединением двух линейных низкодобротных резонаторов, связанных через диэлектрические пластины, вещественны (в указанной системе нет

потерь) и образуют счетную последовательность дуплетов. Центры дуплетов соответствуют частотам $k_0(\pi/2) = (2\pi q_1 + 1)/[n_0(L_1 + L_2)]$. Расщепление в дуплетах определяется выражением

$$\delta k \left(\frac{\pi}{2} + \pi q_2 \right) = \frac{2}{nL_0} \Delta \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi q_2 \right) \frac{n_0}{n} \frac{L_2 - L_1}{2L_0} \right]$$

при соотношении между параметрами неоднородности, описываемом формулой (19). При любом q_2 существуют такие значения $(n_0/n)(L_2 - L_1)/(2L_0)$, для которых расщепление становится пренебрежимо малым. Это явление можно рассматривать как «просветление» системы из двух связанных (через формирующие пластины) линейных резонаторов. Иначе говоря, в результате интерференции прямых и обратных волн обратное рассеяние «исчезает», несмотря на неоднородность (многослойность) кольцевого резонатора.

Моды резонатора рассматриваемого типа вещественны, т. е. являются ортогональными стоячими волнами. Характерно, что для дуплета слабо расщепленных собственных частот распределения мод существенно различны (сдвинуты по фазе на $\pi/2$), и это различие сохраняется вплоть до предельного перехода к однородному резонатору.

1. Скрябин Д.В., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **75** (1), 175 (1993).
2. Скрябин Д.В., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **77** (1), 109 (1994).
3. Haus H.A., Statz H., Smith I.W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (1), 78 (1985).
4. Судаков В.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **39** (1), 140 (1975).
5. Судаков В.Ф. *Квантовая электроника*, **35** (12), 1146 (2005).
6. Розенберг Г.В. *Оптика тонкослойных покрытий* (М.: ИФМЛ, 1958, гл. 3).