

# О формировании частично когерентного пучка в лазере с устойчивым резонатором

А.А.Суворов

*Для теоретического описания процесса формирования многомодовых лазерных пучков предложен новый метод, заключающийся в разложении функции когерентности поля по частично когерентным модам – собственным решениям задачи для функции когерентности второго порядка в устойчивом резонаторе. Сформулирован способ решения задачи для частично когерентных мод произвольного порядка и в общем виде получены выражения для этих мод. Проведён подробный анализ характеристик основной частично когерентной моды, которая совпадает с функцией когерентности гауссова частично когерентного пучка. Показано, что частично когерентные моды обладают двумя пространственными масштабами – эффективным радиусом и радиусом когерентности, что делает их удобным инструментом для решения задачи о генерации частично когерентного пучка. Отмечено, что однозначная связь между характеристиками частично когерентных мод и параметрами устойчивого резонатора достигается включением в рассмотрение помимо процесса формирования пучка зеркалами резонатора и процесса взаимодействия излучения с активной лазерной средой.*

**Ключевые слова:** устойчивый резонатор, мода, частичная когерентность.

## 1. Введение

Одним из основных математических приёмов при решении задачи о генерации пучка лазером с устойчивым резонатором является разложение комплексной амплитуды волнового поля по собственным волнам резонатора – модам (см., напр., [1, 2]). Суть его состоит в том, что поле излучения генерируемого лазерного пучка представляется в виде суперпозиции мод, на частотах которых обусловленное средой усиление излучения превышает его суммарные потери. Этот подход позволяет получать приемлемый результат лишь для небольшого числа мод. Если же лазерный пучок образуется в результате суперпозиции большого числа мод, то такой подход вследствие вычислительных трудностей становится непригодным. В этом случае генерируемый лазерный пучок является частично когерентным и его расходимость, как показывает опыт, определяется не только дифракцией излучения на его апертуре либо дифракцией на неоднородностях масштаба радиуса основной поперечной моды резонатора, но и другими факторами.

На практике для описания расходимости такого пучка вводится эмпирическая величина, так называемый коэффициент  $M^2$ , или коэффициент распространения пучка [3], который [4], с некоторой натяжкой, также называют характеристикой качества пучка.

Коэффициент распространения пучка является мерой превышения дифракционного предела расходимости для реальных пучков. В случае частично когерентного излу-

чения коэффициент  $M^2 > 1$ , и только для полностью когерентного гауссова пучка (поперечная ТЕМ<sub>00</sub>-мода устойчивого резонатора) он принимает минимальное значение, равное единице. Практическая ценность этого коэффициента состоит в том, что с помощью его экспериментально измеренного для заданных условий работы лазерной установки значения можно исследовать распространение частично когерентного пучка в оптической системе, определить положение и размер перетяжки пучка после прохождения через линзу, провести сравнение пучков разных лазеров и т. д.

Вопросы теоретического обоснования применения параметра распространения пучка, обобщения этого понятия на более сложные случаи, а также стандартизованного инструментального измерения данного параметра активно дискутировались в начале 1990-х годов. Этим проблемам был посвящён специальный выпуск журнала *Optical and Quantum Electronics* [5], в котором, в частности, имеется статья [6], отражающая исторические и технические аспекты применения параметра  $M^2$ , а также опубликованы статьи [7, 8] специалистов Международной организации стандартизации (International Standardization Organization – ISO), посвящённые методам измерения радиуса, угла расходимости и коэффициента распространения лазерного пучка.

В настоящее время общепризнанное теоретическое обоснование применения коэффициента  $M^2$  базируется на методе моментов интенсивности частично когерентного лазерного пучка [9]. На основе этого метода разработаны и приняты в качестве стандартных методы измерения характеристик пучка [10]. Следует также отметить, что теоретические и практические аспекты применения параметра распространения пучка излагаются в современных руководствах по лазерной физике [11–15], а само это понятие активно используется в повседневной научной деятельности [16–18]. В задачнике [19] по лазерной

А.А.Суворов. ГНЦ РФ – Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, Россия, Калужская обл., 249033 Обнинск, пл. Бондаренко, 1; e-mail: suvovov@ippe.ru

Поступила в редакцию 12 марта 2009 г., после доработки – 10 января 2010 г.

физике имеются упражнения на нахождение для заданных условий коэффициента  $M^2$ . Кроме того, проводятся исследования, посвященные решению обратной задачи – определению модового состава частично когерентного лазерного излучения по известному распределению интенсивности в сечении пучка или значению коэффициента  $M^2$  [20, 21].

Для многих народнохозяйственных, технологических и научных приложений требуются мощные энергетические лазеры (например, неодимовые, эксимерные и CO<sub>2</sub>-лазеры, а также лазеры с ядерной накачкой). Излучение этих лазеров является частично когерентным, с чем и связана актуальность исследования такого пучка в лазерной физике. Уже отмечалось, что из-за отсутствия подходящих теоретических методов параметры частично когерентных лазерных пучков для заданных условий генерации могут быть полностью определены только с использованием измеряемых характеристик генерируемого пучка. Несмотря на невозможность замкнутого теоретического описания генерации мощных многомодовых лазерных пучков, вопросам качества частично когерентных пучков различного типа и их распространения в турбулентной атмосфере посвящено большое число исследований (см., напр., [22–25]).

В настоящей работе предложен новый подход к решению проблемы формирования в лазере с устойчивым резонатором частично когерентного пучка излучения. Этот подход разрабатывался исходя из практических задач, возникающих при создании ядерно-оптического преобразователя – реакторно-лазерной системы «Стенд Б» [26, 27]. Суть его заключается в разложении функции когерентности второго порядка лазерного пучка по базису функций, нефакторизуемых по поперечным к оси резонатора координатам. Эти функции являются новым классом собственных функций задачи для функции когерентности устойчивого резонатора. В соответствии с общепринятым употреблением термина «мода» для обозначения любого волнового поля с определённой пространственной структурой эти собственные функции названы частично когерентными модами. Частично когерентные моды – удобный инструмент для описания формирования частично когерентных лазерных пучков, предсказания исходя «из базовых принципов» энергетических и пространственных характеристик таких пучков, а также их когерентных свойств.

Статья посвящена получению в общем виде выражений для частично когерентных мод и обсуждению основных свойств простейшей моды, которая является гауссовым частично когерентным пучком.

## 2. Разложение функции когерентности по поперечным модам

Рассмотрим устойчивый резонатор лазера, образованный двумя сферическими зеркалами. Направим ось  $z$  декартовой системы координат вдоль оси резонатора, а оси  $x$  и  $y$  – перпендикулярно ей. На плоскости  $z = 0$  расположим зеркало с радиусом кривизны сферической поверхности  $r_0$ , а на плоскости  $z = L$  – зеркало с радиусом кривизны  $r_L$  (где  $L$  – длина резонатора).

Сформированное в резонаторе излучение представляет собой два пучка, распространяющиеся во встречных направлениях между его зеркалами. Обозначив через  $U_+$  и  $U_-$  комплексные амплитуды волновых пучков, распро-

страняющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$  соответственно, для компоненты вектора напряжённости электрического поля запишем выражение

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) = U_+(\boldsymbol{\rho}, z) \exp[i(kz - \omega t)] + U_-(\boldsymbol{\rho}, z) \exp[-i(kz + \omega t)],$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$  – радиус-вектор на плоскости  $z = \text{const}$ ;  $k = \omega/c$  – волновое число;  $\omega$  – частота лазерного перехода;  $c$  – скорость света.

Одной из основных характеристик частично когерентного лазерного пучка является функция когерентности второго порядка

$$\Gamma_2^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \langle U_{\pm}(\boldsymbol{\rho}_1, z) U_{\pm}^*(\boldsymbol{\rho}_2, z) \rangle,$$

которая позволяет определять такие важные параметры пучка, как интенсивность и мощность, угол расходимости и эффективный радиус.

В соответствии с тем, что комплексные амплитуды встречных пучков в резонаторе лазера могут быть представлены в виде разложений по поперечным модам (см., напр., [1, 2]), функции когерентности этих пучков можно записать в виде разложений по тем же базисным функциям:

$$\Gamma_2^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \sum_{n,m} \sum_{n',m'} D_{nmn'm'}^{(+)} \Psi_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, z) \Psi_{n'm'}^*(\boldsymbol{\rho}_2, z), \quad (1)$$

$$\Gamma_2^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \sum_{n,m} \sum_{n',m'} D_{nmn'm'}^{(-)} \Psi_{nm}^*(\boldsymbol{\rho}_1, z) \Psi_{n'm'}(\boldsymbol{\rho}_2, z),$$

где  $\Psi_{nm}(\boldsymbol{\rho}, z)$  – поперечная мода устойчивого резонатора;  $n, n', m, m' = 0, 1, 2, 3, \dots$  – поперечные индексы моды;  $D_{nmn'm'}^{(\pm)}$  – амплитуды разложения функций когерентности по поперечным модам.

Разложения функций когерентности встречных пучков вида (1) представляют собой разложение по полному набору функций

$$X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \Psi_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, z) \Psi_{n'm'}^*(\boldsymbol{\rho}_2, z). \quad (2)$$

При условии применимости для описания распространения лазерных пучков в резонаторе квазиоптического приближения, базисные функции  $X_{nmn'm'}$  являются решениями задачи

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) + (\Delta_{\perp 1} - \Delta_{\perp 2}) X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями на зеркалах

$$\begin{aligned} X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|_{z=0} &= X_{nmn'm'}^*(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|_{z=0} \\ &\times \exp[-ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/r_0], \\ X_{nmn'm'}^*(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|_{z=L} &= X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|_{z=L} \\ &\times \exp[-ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/r_L + 2i(\kappa_{pnm} - \kappa_{pn'm'})L], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta_{\perp 1, \perp 2} = \partial^2/\partial x_{1,2}^2 + \partial^2/\partial y_{1,2}^2$ ;  $\kappa_{pnm} = \omega_{pnm}/c$ ;  $\omega_{pnm}$  – отстройка частоты моды от частоты лазерного перехода;  $p$  – продольный индекс моды.

Задача (3), (4) для функций  $X_{nmn'm'}$  является следствием задачи для поперечных мод резонатора. В квазиоптическом приближении функции  $\Psi_{nm}$  в декартовых координатах пропорциональны полиномам Чебышёва – Эрмита, а в цилиндрических координатах – полиномам Чебышёва – Лагерра (см., напр., [1, 2]).

Поскольку функции (2) факторизуются по переменным  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , то они соответствуют разложению функций когерентности излучения по когерентным модам устойчивого резонатора. Использование этих базисных функций для описания поля многомодового частично когерентного лазерного излучения неэффективно тогда, когда радиус основной поперечной моды много меньше радиуса пучка в целом, поскольку в этом случае функции когерентности (1) образуются суперпозицией очень большого числа поперечных мод.

### 3. Частично когерентные моды устойчивого резонатора

Покажем, что задача (3), (4), помимо частных решений в виде бесконечного набора когерентных поперечных мод  $X_{nmn'm'}$ , имеет также бесконечный набор решений нового класса, для которых функция когерентности не факторизуется по переменным  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , а потому эти решения более приспособлены для описания частично когерентных лазерных пучков. Назовём такой тип решений задачи (3), (4) частично когерентными модами устойчивого резонатора.

При решении поставленной задачи – отыскании полного набора частично когерентных мод – существенной особенностью является инвариантность разностей дифференциальных операторов  $\Delta_{\perp 1}$  и  $\Delta_{\perp 2}$  в уравнениях (3) и квадратов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в граничных условиях (4),

$$\Delta_{\perp 1} - \Delta_{\perp 2} = \Delta'_{\perp 1} - \Delta'_{\perp 2}, \quad \rho_1^2 - \rho_2^2 = s_1^2 - s_2^2, \quad (5)$$

относительно линейного преобразования координат

$$s_1 = B_1 \rho_1 - B_2 \rho_2, \quad s_2 = B_1 \rho_2 - B_2 \rho_1 \quad (6)$$

с коэффициентами преобразования

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4\gamma^4} + 1}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+4\gamma^4} - 1}, \quad (7)$$

где  $\Delta'_{\perp 1} = \partial^2/\partial s_{1x}^2 + \partial^2/\partial s_{1y}^2$ ;  $\Delta'_{\perp 2} = \partial^2/\partial s_{2x}^2 + \partial^2/\partial s_{2y}^2$ ;  $\gamma = b_0/\rho_{c0}$  – параметр преобразования (6), который, как будет показано далее, равен отношению эффективного радиуса  $b_0$  основной моды устойчивого резонатора (поперечной ТЕМ<sub>00</sub>-моды  $\Psi_{00}$ ) к радиусу когерентности пучка  $\rho_{c0}$ .

Вследствие инвариантности выражений (5) задача для функций когерентности встречных волн в устойчивом резонаторе в новых переменных  $s_1$  и  $s_2$  имеет тот же вид, что и задача (3), (4) в исходных переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В новых переменных так же, как и в исходных, эта задача имеет бесконечное число решений, каждое из которых представимо в следующем виде:

$$X_{NMN'M'}(s_1, s_2; z) = \Psi_{NM}(s_1, z) \Psi_{N'M'}^*(s_2, z), \quad (8)$$

где  $\Psi_{NM}(s_1, z)$  и  $\Psi_{N'M'}(s_2, z)$  – обычные поперечные моды устойчивого резонатора порядка  $NM$  и  $N'M'$ , аргументами которых являются векторы  $s_1$  и  $s_2$ ; числа  $N, M, N', M'$ ,

$M' = 0, 1, 2, \dots$  – индексы мод. Здесь и далее прописными буквами  $N, M, \dots$  будем обозначать индексы мод, явно зависящих от  $s_1$  и  $s_2$ , а строчными буквами  $n, m, \dots$  – индексы поперечных мод, которые явно зависят от векторов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

В соответствии с (6) каждый из векторов  $s_1$  и  $s_2$  является линейной суперпозицией векторов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , поэтому функции (8) в общем случае не могут быть представлены в виде произведения произвольных функций, зависящих по отдельности от  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Поскольку таким свойством нефакторизуемости обладает поле частично когерентного излучения, то решения задачи (3), (4) вида (8) назовём частично когерентными модами. Факторизация функций  $X_{NMN'M'}(s_1, s_2; z)$  по переменным  $\rho_1$  и  $\rho_2$  возможна только в случае полностью когерентного излучения, когда  $\gamma = 0$ ,  $\rho_{c0} \rightarrow \infty$  и, следовательно, новые и исходные векторы совпадают ( $s_{1,2} = \rho_{1,2}$ ). При ненулевом значении параметра  $\gamma$  и фиксированных индексах  $N, M, N', M'$  решения задачи (3), (4) вида (8) – частично когерентные моды порядка  $NM \times N'M'$  – описывают определённое состояние частично когерентных встречных волн, формируемых в устойчивом резонаторе с заданными расстоянием между зеркалами и радиусами кривизны зеркал.

Введём для новых базисных функций задачи (3), (4) – частично когерентных мод – следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \Gamma_{NMN'M'}(\rho_1, \rho_2; z) &= \Psi_{NM}(s_1, z) \Psi_{N'M'}^*(s_2, z) \\ &= \Psi_{NM}(s_1(\rho_1, \rho_2), z) \Psi_{N'M'}^*(s_2(\rho_1, \rho_2), z). \end{aligned} \quad (9)$$

По отдельности каждый из наборов функций  $\Psi_{NM}(s_1, z)$  и  $\Psi_{N'M'}^*(s_2, z)$ , определяющих частично когерентную моду (9) порядка  $NM \times N'M'$ , образует полный набор и является ортонормированной в пространствах векторов  $s_1$  и  $s_2$  соответственно [28]. Поэтому функции  $\Gamma_{NMN'M'}(s_1, s_2; z)$  образуют полный набор ортонормированных функций в пространстве четырёхмерного вектора  $\{s_1, s_2\}$ .

Поскольку переменные  $s_1$  и  $s_2$  связаны с исходными переменными  $\rho_1$  и  $\rho_2$  линейным преобразованием (6), не меняющим ни размер, ни форму четырёхмерной области, в которой частично когерентные моды образуют полный набор базисных функций, то допустимо также разложение по  $\Gamma_{NMN'M'}(\rho_1, \rho_2; z)$  произвольной функции в пространстве четырёхмерного вектора  $\{\rho_1, \rho_2\}$ . Представим функции когерентности встречных пучков в виде разложения по этому базису:

$$\Gamma_2^{(+)}(\rho_1, \rho_2; z) = \sum_{N, M} \sum_{N', M'} C_{NMN'M'}^{(+)}(z) \Gamma_{NMN'M'}(\rho_1, \rho_2; z), \quad (10)$$

$$\Gamma_2^{(-)}(\rho_1, \rho_2; z) = \sum_{N, M} \sum_{N', M'} C_{NMN'M'}^{(-)}(z) \Gamma_{NMN'M'}^*(\rho_1, \rho_2; z),$$

где  $C_{NMN'M'}^{(\pm)}(z)$  – амплитуды частично когерентных мод.

С математической точки зрения представления функций когерентности встречных лазерных пучков в виде разложений (1) по когерентным поперечным модам и разложений (10) по частично когерентным модам эквивалентны. Различия между разложениями связаны с выбором разных базисных функций. Сами коэффициенты разложения функций когерентности по когерентным ( $D_{nmn'm'}^{(\pm)}(z)$ ) и по частично когерентным ( $C_{NMN'M'}^{(\pm)}(z)$ ) модам следует определять из решения задачи о генерации лазерного пучка.

#### 4. Основная частично когерентная мода устойчивого резонатора

Основное различие между двумя способами представления функций когерентности и преимущество использования частично когерентных мод нагляднее всего устанавливаются из сравнения простейших решений, которыми являются базисные функции  $X_{nmn'm'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  (2) и  $\Gamma_{NMN'M'}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  (9) при  $n = n' = m = m' = 0$  и  $N = N' = M = M' = 0$ . В этом случае функция  $\Psi_{00}$  – основная поперечная ТЕМ<sub>00</sub>-мода устойчивого резонатора. Она определяется следующим выражением (см., напр., [1, 2]):

$$\Psi_{00}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi b^2(z)}} \sqrt{\frac{(1 - z/r_0) - iz/(kb_0)}{(1 - z/r_0) + iz/(kb_0)}} \times \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2b^2(z)} + ik \frac{\rho^2}{2r(z)} \right], \quad (11)$$

где

$$b(z) = b_0 \sqrt{(1 - z/r_0)^2 + z^2/(k^2 b_0^4)}, \quad (12)$$

$$r(z) = \frac{b^2(z)}{b_0^2} \left/ \left[ \frac{z}{k^2 b_0^4} - \frac{1 - z/r_0}{r_0} \right] \right. \quad (13)$$

– соответственно эффективный радиус и радиус кривизны волнового фронта основной моды устойчивого резонатора на расстоянии  $z$  от зеркала, расположенного в плоскости  $z = 0$ ;

$$b_0 = \sqrt{\frac{L}{k} \sqrt{\frac{1 - L/r_L}{1 - L/r_0} \frac{1}{Lr_0 + L/r_L - L^2/(r_L r_0)}}} \quad (14)$$

– эффективный радиус основной моды в плоскости  $z = 0$ .

Подстановка функции (11) в (2) приводит к следующему выражению для базисной функции  $X_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  разложения (1) функций когерентности по поперечным модам:

$$X_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \frac{1}{\pi b^2(z)} \exp \left[ -\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2b^2(z)} + ik \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2r(z)} \right]. \quad (15)$$

Подстановка (11) в выражение (9) и применение преобразования координат (6) для частично когерентной моды  $\Gamma_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  дают следующий результат:

$$\Gamma_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z) = \frac{1}{\pi b^2(z)} \exp \left[ -\frac{s_1^2 + s_2^2}{2b^2(z)} + ik \frac{s_1^2 - s_2^2}{2r(z)} \right] = \frac{1}{\pi b^2(z)} \exp \left[ -\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2a^2(z)} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{\rho_c^2(z)} + ik \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2r(z)} \right], \quad (16)$$

где

$$a(z) = A(\gamma)b(z); \quad (17)$$

$$\rho_c = b(z)/\gamma; \quad (18)$$

$$A(\gamma) = \sqrt{\sqrt{1 + 4\gamma^4} + 2\gamma^2}. \quad (19)$$

При выводе выражения (16) были использованы следующие свойства коэффициентов (7) преобразования координат (6):

$$B_1^2(\gamma) - B_2^2(\gamma) = 1, \quad B_1(\gamma)B_2(\gamma) = \gamma^2, \quad B_1(\gamma) + B_2(\gamma) = A(\gamma). \quad (20)$$

Предэкспоненциальный множитель в функции  $\Psi_{00}$  (11) определен из условия нормировки

$$\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 |X_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|^2 = \iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 |\Gamma_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|^2 = 1. \quad (21)$$

Сравнение выражений (15) и (16) указывает на два принципиальных отличия частично когерентной моды  $\Gamma_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  от функции  $X_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$ : во-первых, частично когерентная мода нефакторизуема по векторам  $\boldsymbol{\rho}_1$  и  $\boldsymbol{\rho}_2$ ; во-вторых, её модуль зависит от двух пространственных масштабов –  $a(z)$  и  $\rho_c(z)$ . Из выражений (17), (18) следует, что эти масштабы пропорциональны эффективному радиусу основной поперечной моды и их отличие от  $b(z)$  определяется параметром  $\gamma$ , от которого зависят коэффициенты  $B_{1,2}$  преобразования координат (6). При  $\gamma \ll 1$  различие между  $a(z)$  и  $b(z)$  пренебрежимо мало, масштаб «нефакторизуемости»  $\rho_c(z)$  частично когерентной моды значительно превышает как  $a(z)$ , так и  $b(z)$  и, следовательно, в существенной области изменения координат обе функции, (15) и (16), практически совпадают. В противоположном случае ( $\gamma \gg 1$ ) масштаб  $a(z)$  значительно превышает эффективный радиус  $b(z)$ , а масштаб  $\rho_c(z)$  становится много меньшим радиуса  $b(z)$ . Функция  $X_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  (15) описывает функцию когерентности полностью когерентного гауссова пучка, а функция  $\Gamma_{0000}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  (16) – функцию когерентности пучка, который называется гауссовым частично когерентным пучком.

Таким образом, в случае, когда функция  $\Psi_{00}$  в (9) является основной поперечной модой устойчивого резонатора, частично когерентная мода соответствует гауссову частично когерентному пучку. В силу такого соответствия (конечно же имея в виду немонохроматичность частично когерентного излучения) назовём полученное решение задачи (3), (4) основной частично когерентной модой. Общие свойства гауссова частично когерентного пучка хорошо изучены (см., напр., [29], а также [30]). Несмотря на это, представляется целесообразным обсудить далее характеристики такого пучка как яркого представителя введённых здесь частично когерентных мод.

#### 5. Характеристики основной частично когерентной моды

Одной из главных характеристик основной частично когерентной моды (16) является параметр  $a(z)$  – её эффективный радиус (см. (17)). Он определяет характерный пространственный масштаб изменения интенсивности моды (гауссова частично когерентного пучка). Из сравнения выражений (12) и (17) видно, что в процессе распространения эффективные радиусы основных частично когерентной ( $a(z)$ ) и поперечной ( $b(z)$ ) мод изменяются одинаково:

$$\frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a_0}{b_0} = A(\gamma), \quad (22)$$

их отношение сохраняется неизменным и зависит от параметра  $\gamma$ . В (22) параметр  $a_0$  – эффективный радиус ос-

новой частично когерентной моды при  $z = 0$ . Используя величину  $a_0$  и равенство (22), перепишем выражение (17) для эффективного радиуса основной частично когерентной моды следующим образом:

$$a(z) = A(\gamma)b(z) = a_0\sqrt{(1 - z/r_0)^2 + A^4(\gamma)z^2/(k^2a_0^4)}. \quad (23)$$

Поскольку, в соответствии с (22),  $a_0 \sim b_0$ , то условия устойчивости резонатора для обоих типов мод (частично когерентная и полностью когерентная) совпадают. Эти условия определяются действительностью выражения (14) для  $b_0$  и в настоящее время подробно изучены (см., напр., [1, 2]). Из определения (19) параметра  $A(\gamma)$  следует, что он не может быть меньше единицы. Поэтому эффективный радиус частично когерентной моды  $a(z)$  не может быть меньше эффективного радиуса  $b(z)$  гауссовой поперечной моды. С увеличением параметра  $\gamma$  величина  $a(z)$  возрастает по сравнению с  $b(z)$ .

В основе определения эмпирического параметра  $M^2$ , используемого для описания распространения произвольных частично когерентных лазерных пучков, лежит закономерность изменения радиуса гауссова частично когерентного пучка вида (23) [3, 4]. В соответствии с определением (см., напр., [3, 15]), коэффициент распространения пучка  $M^2$  равен отношению радиусов произвольного частично когерентного ( $w$ ) и гауссова полностью когерентного ( $w_c$ ) пучков в дальней зоне, имеющих одинаковый радиус  $w_m$  в перетяжке:

$$M^2 = w/w_c = \theta_{pc}/\theta_c, \quad (24)$$

где  $\theta_{pc}$  и  $\theta_c = \lambda/(\pi w_m)$  – углы расходимости частично когерентного и полностью когерентного гауссовых пучков соответственно.

Используя связь радиусов частично когерентного и когерентного гауссовых пучков с их эффективными значениями (см., напр., [3, 9–13, 15])

$$w(z) = \sqrt{2}a(z), \quad w_c(z) = \sqrt{2}a_c(z), \quad (25)$$

выражение (23) и определение (24) коэффициента  $M^2$ , получаем, что коэффициент распространения пучка  $M^2$  равен квадрату параметра  $A(\gamma)$ , связывающего эффективные радиусы частично когерентной и поперечной гауссовых мод:

$$M^2 = A^2(\gamma) = \sqrt{1 + 4\gamma^4} + 2\gamma^2. \quad (26)$$

Формула (26) показывает, что коэффициент  $M^2$  определяется параметром  $\gamma$ , который является одной из основных характеристик как основной частично когерентной моды, так и частично когерентных мод произвольного порядка. Из этой формулы, с учётом связи (24) между коэффициентом  $M^2$  и углами расходимости частично когерентного и полностью когерентного гауссовых пучков, следует, что с увеличением параметра  $\gamma$  величина  $\theta_{pc}$  возрастает по сравнению с  $\theta_c$ .

Отмеченные закономерности – увеличение радиуса и угла расходимости основной частично когерентной моды с ростом параметра  $\gamma$  – наглядно иллюстрирует рис.1, на котором приведены зависимости эффективного радиуса основной частично когерентной моды от  $z$ , полученные для различных  $\gamma$ . Кривые построены для случая распространения излучения с длиной волны  $\lambda = 2.026$  мкм в

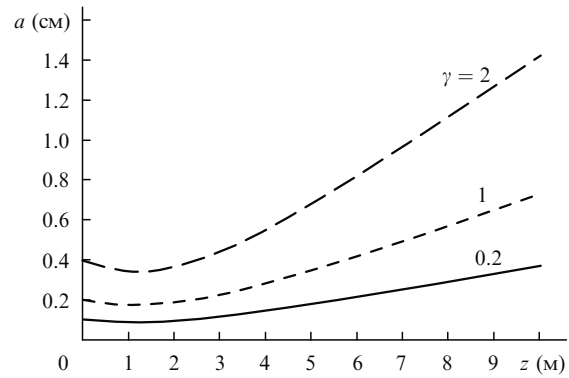


Рис.1. Зависимости эффективного радиуса  $a$  основной частично когерентной моды от расстояния  $z$  при различных  $\gamma$ .

резонаторе длиной  $L = 250$  см, зеркала которого имеют радиусы кривизны  $r_0 = r_L = 5$  м.

Продолжим обсуждение характеристик основной частично когерентной моды. Из сравнения выражений (15) и (16) видно, что основная частично когерентная мода имеет радиус кривизны  $r(z)$  (13) такой же, как и основная поперечная мода устойчивого резонатора.

Параметр основной частично когерентной моды  $\rho_c(z)$  (18) характеризует масштаб корреляции поля излучения в сечении  $z = \text{const}$ . Он называется радиусом когерентности. Сравнение выражений (12) и (18) показывает, что радиус когерентности основной частично когерентной моды имеет зависимость от  $z$  такую же, как и  $b$  от  $z$ :

$$\frac{b(z)}{\rho_c(z)} = \frac{b_0}{\rho_{c0}} = \gamma, \quad (27)$$

где  $\rho_{c0}$  – радиус когерентности основной частично когерентной моды при  $z = 0$ . Таким образом, в соответствии с равенствами (27), ключевой параметр  $\gamma$  преобразования координат (6) равен отношению эффективного радиуса поперечной ТЕМ<sub>00</sub>-моды устойчивого резонатора к радиусу когерентности основной частично когерентной моды.

Используя соотношения (22) и определение (19) параметра  $A(\gamma)$ , выразим параметр  $\gamma$  через отношение эффективных радиусов основной частично когерентной и ТЕМ<sub>00</sub>-мод:

$$\gamma = \frac{a(z)}{2b(z)}\sqrt{1 - \frac{b^4(z)}{a^4(z)}} = \frac{a_0}{2b_0}\sqrt{1 - \frac{b_0^4}{a_0^4}}. \quad (28)$$

Отношение  $\rho_c(z)$  к  $a(z)$  называется коэффициентом когерентности [29]. Комбинируя выражения (17) и (18), получаем следующую зависимость коэффициента когерентности от параметра  $\gamma$ :

$$\frac{\rho_c(z)}{a(z)} = \frac{\rho_{c0}}{a_0} = \frac{1}{\gamma A(\gamma)}. \quad (29)$$

Равенство (29) отражает известный результат (см., напр., [29]), установленный экспериментально в работе [31], согласно которому коэффициент когерентности гауссова частично когерентного пучка не зависит от расстояния  $z$ . Кроме того, оно указывает на то, что для заданного резонатора (параметр  $b_0$  фиксирован) параметры  $a_0$  и  $\rho_{c0}$  не являются независимыми. Физически это

объясняется тем, что при фиксированных параметрах резонатора радиус частично когерентного пучка должен определённым образом зависеть от числа возбуждённых мод. С одной стороны, увеличение ширины частично когерентного лазерного пучка является следствием вовлечения в процесс генерации всё большего числа поперечных мод  $\Psi_{nm}$ . В свою очередь, это приводит к потере когерентности излучения и, следовательно, к уменьшению радиуса когерентности. С другой стороны, у полностью когерентного пучка радиус когерентности бесконечен ( $\rho_{c0} \rightarrow \infty$ ), и, как видно из (22), при  $\gamma \rightarrow 0$  получаем  $a_0 = b_0$ . Иными словами, в предельном случае полностью когерентного излучения полученное решение для основной частично когерентной моды сводится к билинейной комбинации когерентной гауссовой моды устойчивого резонатора. Зависимость расходимости лазерного пучка от числа вовлекаемых в генерацию поперечных мод наблюдалась в ранних работах по квантовой электронике [32] (см. также [33]). Количественное объяснение этому явлению и установление связи между радиусом когерентности и числом возбуждаемых поперечных мод было сделано в работе [31].

Основные закономерности зависимости  $a_0$  от  $\rho_{c0}$  демонстрирует рис.2. Из него видно, что уже при двукратном превышении радиусом когерентности величины  $b_0$  радиусы частично когерентной и полностью когерентной мод становятся практически равными. При таком и большем отношении  $\rho_{c0}/b_0$  неполной когерентностью частично когерентной моды можно пренебречь. Если же  $\rho_{c0}/b_0 = 0.2$ , то радиус частично когерентной моды на порядок превышает радиус гауссовой когерентной моды и, следовательно, на порядок возрастает расходимость частично когерентной моды. При таком и меньшем отношении  $\rho_{c0}/b_0$  неполная когерентность моды проявляется в полной мере и в её формировании участвует большее число поперечных мод  $\Psi_{nm}$ .

Наглядно картину вклада в основную частично когерентную моду различных поперечных мод  $\Psi_{nm}$  можно представить, исходя из анализа коэффициентов  $\Gamma_{00}(n, m)$  разложения основной частично когерентной моды (16) по поперечным модам резонатора:

$$\Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2; z) = \sum_{n,m} \Gamma_{00}(n, m) \Psi_{nm}(\rho_1, z) \Psi_{nm}^*(\rho_2, z). \quad (30)$$

При записи ряда (30) учтено, что основная частично когерентная мода (гауссов частично когерентный пучок)

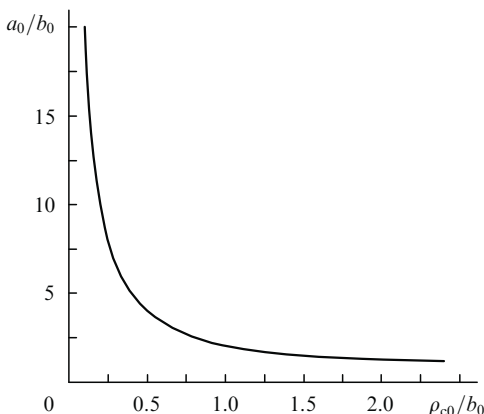


Рис.2. Зависимость эффективного радиуса основной частично когерентной моды от нормированного радиуса когерентности.

образуется некогерентной суперпозицией поперечных мод.

Используя вид поперечных мод в декартовых и цилиндрических координатах (см., напр., [1, 2]), определение полиномов [28] (эрмит-гауссова и лаггерр-гауссова моды соответственно), их ортонормированность и выражение (16) для основной частично когерентной моды, для коэффициентов ряда (30) получаем

$$\Gamma_{00}(n, m) = \iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 \Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2; z) \Psi_{nm}^*(\rho_1, z) \Psi_{nm}(\rho_2, z) = \frac{1}{B_1^2(\gamma)} \left[ \frac{B_2(\gamma)}{B_1(\gamma)} \right]^{M_{nm}}, \quad (31)$$

где  $M_{nm} = n + m$  в декартовых координатах и  $2n + |m|$  – в цилиндрических; поперечные индексы моды  $n$  и  $m$  в декартовых координатах относятся к изменениям поля соответственно в направлениях  $x$  и  $y$  (суммирование в (30) проводится для  $0 \leq n, m < \infty$ ), а в цилиндрических координатах – к изменениям поля соответственно в радиальном и азимутальном направлениях (суммирование в (30) проводится для  $0 \leq n < \infty$  и  $-\infty < m < \infty$ ). В соответствии с выбранной нормировкой (21) основной частично когерентной моды сумма квадратов модулей коэффициентов ряда (30) равна единице:

$$\sum_{n,m} |\Gamma_{00}(n, m)|^2 = 1.$$

Простые вычисления с использованием свойств (20) коэффициентов  $B_{1,2}(\gamma)$  показывают выполнимость данного равенства для коэффициентов (31) в обоих рассмотренных случаях.

На рис.3 представлены зависимости коэффициентов  $\Gamma_{00}(n, m)$  от суммарного порядка  $M_{nm}$  поперечной моды, полученные для различных параметров  $\gamma$ . Видно, что в случае излучения с высокой степенью когерентности (радиус когерентности много больше радиуса гауссовой когерентной моды) доминирующий вклад в частично когерентную моду даёт ТЕМ<sub>00</sub>-мода устойчивого резонатора. С ухудшением когерентности излучения вклад мод высшего порядка в частично когерентную моду становится всё более ощутимым, и скорость убывания коэффициентов  $\Gamma_{00}(n, m)$  с ростом порядка  $M_{nm}$  поперечной моды заметно снижается.

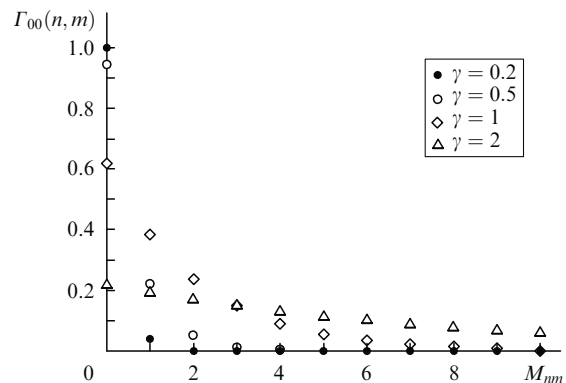


Рис.3. Зависимости коэффициентов разложения основной частично когерентной моды от суммарного порядка поперечной моды при различных  $\gamma$ .

## 6. Заключение

В настоящей работе изложены основы нового подхода к теоретическому описанию формирования в устойчивом резонаторе многомодового частично когерентного лазерного излучения. Данный подход заключается в разложении функции когерентности генерируемого излучения по собственным функциям задачи для функции когерентности, нефакторизуемым по поперечным к оси резонатора координатам. Эти функции названы частично когерентными модами. В общем виде получены выражения для частично когерентных мод произвольного порядка. Проведён анализ характеристик простейшей частично когерентной моды, которая названа основной частично когерентной модой. Эта мода совпадает с функцией когерентности гауссова частично когерентного пучка.

На примере основной частично когерентной моды показано, что частично когерентные моды характеризуются двумя пространственными масштабами – эффективным радиусом и радиусом когерентности. Благодаря наличию двух масштабов у частично когерентных мод разложение (10) функций когерентности генерируемого в лазере излучения по частично когерентным модам имеет существенное преимущество перед их разложением (1) по обычным поперечным модам.

При разложении (1) функции когерентности по поперечным модам используются базисные функции, имеющие в сечении пучка один пространственный масштаб – радиус основной поперечной моды. В случае сильного отличия радиуса генерируемого лазерного пучка от его радиуса когерентности, для описания с помощью рядов (1) характеристик частично когерентного излучения требуется учёт большого числа поперечных мод. Описание же характеристик такого излучения с помощью частично когерентных мод (9) может быть проведено с использованием гораздо меньшего числа мод, поскольку частично когерентные базисные функции обладают двумя существенно различающимися пространственными масштабами.

Таким образом, новый класс решений для функций когерентности встречных лазерных пучков в устойчивом резонаторе в большей степени приспособлен для решения задачи о генерации частично когерентного лазерного излучения. Поскольку в пределе полностью когерентного излучения (когда  $\gamma = 0$  и  $\rho_{c0} \rightarrow \infty$ ) оба набора базисных функций,  $X_{nmn'm'}(\rho_1, \rho_2; z)$  (2) и  $\Gamma_{NMN'M'}(\rho_1, \rho_2; z)$  (9), совпадают, разложения (10) функций когерентности по частично когерентным модам можно рассматривать как универсальные, применимые для описания лазерных пучков с любым состоянием когерентности.

Проведённый анализ выявил существенную зависимость характеристик частично когерентной моды от параметра  $\gamma = b_0/\rho_{c0}$ . Также было установлено отсутствие однозначной связи характеристик этой моды  $a_0$  и  $\rho_{c0}$  с параметрами резонатора. Для того чтобы получить такую связь, необходимо включить в рассмотрение помимо процесса формирования моды зеркалами резонатора и процесс взаимодействия излучения с активной лазерной средой. В полном объёме эта задача может быть решена только с использованием всего набора частично когерентных мод. Её формулировка и решение будут проведены в следующих статьях после подробного обсуж-

дения общих свойств частично когерентных мод произвольного порядка.

Автор благодарен Р.Х.Алмаеву за плодотворное обсуждение данной работы и полезные замечания.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ и правительства Калужской области (грант № 09-02-97531).

1. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
2. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004).
3. Siegman A.E. *Lasers* (Mill Valley: University Science Books, 1986).
4. Siegman A.E., in *Diode Pumped Solid State Laser: Applications and Issues* (OSA Trends in Optics and Photonics, Vol. 17) (Washington: OSA, 1998).
5. Special Issue on Laser Beam Quality. *Opt. Quantum Electron.*, **24** (9) (1992).
6. Weber H. *Opt. Quantum Electron.*, **24** (9), S861 (1992).
7. Wright D., Greve P., Fleischer J., Austin L. *Opt. Quantum Electron.*, **24** (9), S993 (1992).
8. Wright D. *Opt. Quantum Electron.*, **24** (9), S1129 (1992).
9. Hodson N., Weber H. *Optical Resonators: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997).
10. ISO Standard 11146. Lasers and Laser-Related Equipment – Test Methods for Laser Beam Widths, Divergence Angles and Beam Propagation Ratios (2005).
11. Silfvast W.T. *Laser Fundamentals* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004).
12. Weber H., Herziger G., Poprawe R. (Eds) *Laser Physics and Applications. Subvolume A: Laser Fundamentals. Pt 1* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2004).
13. Weber H., Herziger G., Poprawe R. (Eds) *Laser Physics and Applications. Subvolume A: Laser Fundamentals. Pt 2* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006).
14. Weber H., Herziger G., Poprawe R. (Eds) *Laser Physics and Applications. Subvolume B: Laser Systems. Pt 1* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2007).
15. Звелто О. *Принципы лазеров* (С.-Пб.: Лань, 2008).
16. Paschotta R. *Opt. Express*, **14**, 6069 (2006).
17. Perevozntsev E., Poteomkin A., Khazanov E. *Appl. Opt.*, **46**, 774 (2007).
18. Sprangle P., Freund H.P., Hafizi B., Penano J.R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **45**, 218 (2009).
19. Cerullo G., Longhi S., Nisoli N., Stagari S., Svelto O. *Problems in Laser Physics* (New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001).
20. Lu B., Zhang B. *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 2453 (1999).
21. Santarsiero M., Gori F., Borghi R., Guattari G. *Appl. Opt.*, **38**, 5272 (1999).
22. Shirai T., Dogariu A., Wolf E. *J. Opt. Soc. Am. A*, **20**, 1094 (2003).
23. Ji X., Zhang E., Lu B. *J. Mod. Opt.*, **53**, 2111 (2006).
24. Burvall A., Smith A., Dainty C. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 1721 (2009).
25. Gu Y., Korotkova O., Gbur G. *Opt. Lett.*, **34**, 2261 (2009).
26. Дьяченко П.П., Еловский О.А., Прохоров Ю.А. и др. *Атомная энергия*, **88**, 337 (2000).
27. Гулевич А.В., Дьяченко П.П., Зродников А.В., Кухарчук О.Ф. *Связанные реакторные системы импульсного действия* (М.: Энергоатомиздат, 2003).
28. Суевин П.К. *Классические ортогональные многочлены* (М.: Наука, 1979).
29. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
30. Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Наука, Физматлит, 2000).
31. Арутюнян А.Г., Ахманов С.А., Голяев Ю.Д. и др. *ЖЭТФ*, **64** (5), 1511 (1973).
32. Леонтович А.М., Ведута А.П. *ЖЭТФ*, **46** (1), 71 (1964).
33. Ананьев Ю.А. *УФН*, **103** (4), 705 (1971).