НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 42.65.Ky, 42.65.Yj, 42.65.Tg, 05.45.–a

Эффективная кубическая нелинейность и кноидальные волны при вырожденном параметрическом преобразовании частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Показано, что в условиях вырождения (процессы ГВГ и вырожденной параметрической генерации I типа) повышение порядка системы укороченных волновых уравнений сводит исходную задачу к решению двух независимых нелинейных уравнений Шредингера, что позволяет выписать аналитические решения соответствующих задач, пользуясь стандартной техникой построения искомых решений в форме кноидальных волн. Установлено, что в случае реализации каскадных процессов (квазисинхронизм), один из которых вырожден, этот подход, основанный на введении понятия эффективной каскадной кубической нелинейности, уже не столь удобен, т.к. последняя в общем случае перестает быть керровской.

***Ключевые слова**: квадратичная нелинейность, вырожденное параметрическое преобразование частоты, эффективная каскадная кубическая нелинейность.*

1. Введение

В работе [1] было показано, что кноидальные волны (КВ), являющиеся периодическими решениями нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), играют ключевую роль в одной из классических задач нелинейной оптики – описании невырожденного параметрического преобразования частоты вверх и вниз в средах с квадратичной нелинейностью [2]. Было установлено, что точное решение задачи стационарного взаимодействия трех плоских монохроматических волн – мод с частотами $\omega_{1,2,3}$, удовлетворяющими соотношению $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, можно провести нетрадиционным способом, а именно повышая порядок системы укороченных волновых уравнений. При этом исходная задача сводится к решению трех независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, совпадающих по форме с обыкновенными уравнениями, которые получают из НУШ в стационарных задачах с размерностью «1 + 1» [3]. Каждое из этих уравнений связано с двумя другими только через граничные условия, что было интерпретировано как переход к описанию результата конкуренции двух процессов – слияния ($\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$) и распада ($\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) квантов, протекающих на квадратичной нелинейности, через эффективную каскадную кубическую нелинейность керровского типа [4]. Оказалось, что и при каскадном преобразовании частоты в одной и той же нелинейной среде в тех случаях, когда волновыми расстройками можно пренебречь (так называемый квазисинхронный режим преобразования [5, 6]), взаимодействие четырех мод также можно описать с помощью аналогичного приема [7]. При этом исходная задача редуцируется до решения стандартной системы из двух связанных стационарных НУШ относительно амплитуд волн, задействованных в двух одновременно протекающих нелинейных процессах.

Ниже будет показано, что и в вырожденном режиме (процессы ГВГ так называемого I типа и вырожденной параметрической генерации (ПГ) [2]) можно использовать тот же прием. При этом система укороченных уравнений трансформируется в два независимых НУШ, что позволяет применять ту же технику построения искомых точных аналитических решений [8]. Отметим, что режим вырождения, в котором два из трех взаимодействующих фотонов неразличимы, отвечает особым точкам фазового пространства системы, в которых законы ее эволюции качественно меняются. В частности будет показано, что в случае каскадных квадратичных процессов, один из которых является вырожденным, данный подход теряет свою применимость.

2. Вырожденное взаимодействие и нелинейные уравнения Шредингера

Рассмотрим коллинеарное взаимодействие двух плоских монохроматических волн – мод на основной частоте (амплитуда A_1, частота $\omega_1 = \omega$, волновой вектор $\boldsymbol{k}_1$) и на частоте второй гармоники (амплитуда A_2, частота $\omega_2 = 2\omega$, волновой вектор $\boldsymbol{k}_2$), распространяющихся от плоскости $z = 0$ вдоль оси z в среде с квадратичной нелинейностью – нелинейном кристалле (НЛК). Пренебрегая поглощением, будем считать, что НЛК занимает полупространство $z \geqslant 0$ и в нем реализован параметрический процесс I типа (например, ooe-взаимодействие в отрицательном одноосном кристалле [2]), описываемый стандартной системой укороченных уравнений для амплитуд двух связанных полей [2]:

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\beta A_1^* A_2 \exp(-\mathrm{i}\Delta z), \tag{1a}$$

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 2 декабря 2009 г., после доработки – 8 февраля 2010 г.

$$\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\beta A_1^2 \exp(+\mathrm{i}\Delta z). \tag{1б}$$

Здесь β – константа нелинейной связи, которая в системе (1) считается одинаковой вследствие пренебрежения дисперсией; $\Delta = 2k_1 - k_2$ – волновая расстройка. Система (1) имеет интеграл движения, отражающий закон сохранения плотности потока энергии

$$I_1(z) + I_2(z) = I_{10} + I_{20}, \tag{2}$$

где $I_i(z) = A_i(z)A_i^*(z)$ – переменная, пропорциональная плотности потока энергии i-й (здесь и далее $i = 1, 2$) волны, которую ниже мы будем называть просто интенсивностью; $I_{i0} = I_i(z = 0)$. Отметим, что вследствие вырождения еще один известный интеграл движения, следующий из соотношений Мэнли – Роу [2], перестает быть независимым и теперь (в отличие от ситуаций, рассмотренных в [1]) тоже сводится к (2).

С использованием (2) систему (1) можно редуцировать к двум независимым НУШ, описывающим согласованную (за счет граничных условий) эволюцию комплексных амплитуд $A_i(z)$ взаимодействующих в НЛК волн. Для этого, проведя замену переменных

$$A_i(z) = \tilde{A}_i(z) \exp(-\mathrm{i}\alpha_i z) \tag{3}$$

и выбрав константы $\alpha_{1,2}$ такими, чтобы

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \Delta = 0, \tag{4}$$

мы сначала перепишем систему (1) в форме

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_1}{\mathrm{d}z} - \mathrm{i}\alpha_1\tilde{A}_1 = -\mathrm{i}\beta\tilde{A}_1^*\tilde{A}_2, \tag{5а}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_2}{\mathrm{d}z} - \mathrm{i}\alpha_2\tilde{A}_2 = -\mathrm{i}\beta\tilde{A}_1^2. \tag{5б}$$

Затем после ряда несложных преобразований с учетом соотношения (2) для амплитуды волны нелинейной поляризации $\tilde{A}_1^2$ на частоте ω_2 получим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_1^2}{\mathrm{d}z} - \mathrm{i}2\alpha_1\tilde{A}_1^2 + \mathrm{i}2\beta(I_{10} + I_{20} - \tilde{A}_2\tilde{A}_2^*)\tilde{A}_2 = 0. \tag{6}$$

Продифференцировав теперь (5б) и подставив в полученный результат (6), найдем

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{A}_2}{\mathrm{d}z^2} + \alpha_2^2\tilde{A}_2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)\beta\tilde{A}_1^2$$

$$+ 2\beta^2(I_{10} + I_{20} - \tilde{A}_2\tilde{A}_2^*)\tilde{A}_2 = 0. \tag{7}$$

Заметим, что член, пропорциональный $\tilde{A}_1^2$, в (7) легко устраняется. Для этого с учетом сохранившейся благодаря (4) произвольности выбора значений $\alpha_{1,2}$ положим

$$\alpha_1 = \Delta/4, \quad \alpha_2 = -\Delta/2, \tag{8}$$

после чего получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{A}_2}{\mathrm{d}z^2} + 2\beta^2\left(I_{10} + I_{20} + \frac{\Delta^2}{8\beta^2} - \tilde{A}_2\tilde{A}_2^*\right)\tilde{A}_2 = 0, \tag{9}$$

т. е. замкнутое уравнение для комплексной амплитуды $\tilde{A}_2$ в форме НУШ. Заметим, что, поскольку (9) – уравнение второго порядка, нас будут интересовать только те его решения, которые удовлетворяют граничному условию

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_2}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\tilde{A}_{20} - \mathrm{i}\beta\tilde{A}_{10}^2, \tag{10}$$

следующему из уравнения (5б). Здесь $\tilde{A}_{i0} = \tilde{A}_i\ (z = 0)$.

Повторяя описанную выше последовательность действий, для амплитуды волны нелинейной поляризации $\tilde{A}_1^*\tilde{A}_2$ на частоте ω_1 легко получить уравнение

$$\frac{\mathrm{d}(\tilde{A}_1^*\tilde{A}_2)}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}(\alpha_1 - \alpha_2)\tilde{A}_1^*\tilde{A}_2$$

$$- \mathrm{i}\beta(I_{10} + I_{20} - 2\tilde{A}_1\tilde{A}_1^*)\tilde{A}_1 = 0. \tag{11}$$

После этого, продифференцировав (5а) с учетом (11) и выбрав

$$\alpha_1 = \Delta/2, \quad \alpha_2 = 0, \tag{12}$$

найдем аналогичное замкнутое нелинейное уравнение для амплитуды $\tilde{A}_1$ в форме НУШ:

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{A}_1}{\mathrm{d}z^2} - \beta^2\left(I_{10} + I_{20} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 2\tilde{A}_1\tilde{A}_1^*\right)\tilde{A}_1 = 0. \tag{13}$$

Как и в предыдущем случае, нас должны интересовать только те решения (13), которые удовлетворяют граничному условию

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{A}_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \mathrm{i}\frac{\Delta}{2}\tilde{A}_{10} - \mathrm{i}\beta\tilde{A}_{10}^*\tilde{A}_{20}, \tag{14}$$

следующему из уравнения (5а).

Таким образом, при вырождении система укороченных уравнений, описывающих процессы ГВГ и ПГ I типа, также может быть трансформирована в два независимых НУШ, что позволит найти точные аналитические решения и этой задачи, пользуясь той же техникой построения искомых решений [8].

3. Особенности каскадного преобразования частоты при вырождении

Предположим теперь, что коллинеарно модам с частотами $\omega_{1,2}$ распространяется еще одна волна с частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega$, волновым вектором $\boldsymbol{k}_3$ и комплексной амплитудой A_3. Будем считать, что взаимодействие всех трех мод обусловлено двумя нелинейными процессами: $\omega_1 + \omega_1 \leftrightarrow \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2 \leftrightarrow \omega_3$ с волновыми расстройками $\boldsymbol{\Delta}_1 = 2\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ и $\boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3$ соответственно.

Поскольку в общем случае $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$, в каскадных преобразованиях [5] обычно используют квазисинхронные процессы [6]. Будем считать, что в НЛК создана структура, в которой знаки $\beta_{1,2}$ периодически меняются вдоль оси z, и опишем это заменой $\beta_{1,2} \to \beta_{1,2}g(z)$. Здесь $\beta_{1,2}$ – константы связи для процессов $\omega_1 + \omega_{1,2} \leftrightarrow \omega_{2,3}$ соответственно; $g(z)$ – знакопеременная функция с периодом $\Lambda = (2m_{1,2} + 1)(2\pi/\Delta_{1,2})$, кратным длинам когерентности $2\pi/\Delta_{1,2}$ обоих нелинейных процессов; $m_{1,2}$ – положительные целые числа. Разложив $g(z)$ в ряд Фурье,

$$g(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g_m \exp\left(\mathrm{i}2\pi m \frac{z}{\Lambda}\right),$$

ограничившись учетом амплитуд трех синхронных мод с амплитудами A_{1-3} и усреднив систему укороченных уравнений, по аналогии с [7] получим

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_1^* A_2 - \mathrm{i}\gamma_2 A_2^* A_3, \tag{15а}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\gamma_1^* A_1^2 - \mathrm{i}2\gamma_2 A_1^* A_3, \tag{15б}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}3\gamma_2^* A_1 A_2. \tag{15в}$$

Здесь $\gamma_{1,2} = \langle \beta_{1,2} \exp(-\mathrm{i}\Delta_{1,2} z)\rangle_z$ – усредненные константы нелинейной связи для процессов $\omega_1 + \omega_{1,2} \leftrightarrow \omega_{2,3}$ соответственно.

Система (15) также имеет один интеграл движения второго порядка, отражающий закон сохранения плотности потока энергии

$$I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) = I_{10} + I_{20} + I_{30}, \tag{16}$$

где $I_3 = A_3 A_3^*$ и $I_{30} = A_{30} A_{30}^* = A_3 A_3^*|_{z=0}$, а дальнейший переход от (15) к уравнениям второго порядка дает по аналогии с [7] систему уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}z^2} = -|\gamma_1|^2 A_1 A_1^* A_1 + (|\gamma_1|^2 - 3|\gamma_2|^2) A_2 A_2^* A_1$$
$$+ 2|\gamma_2|^2 A_3 A_3^* A_1 + \gamma_1^* (\gamma_2 A_2 A_2 A_3^* - \gamma_2^* A_1^* A_1^* A_3), \tag{17а}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_2}{\mathrm{d}z^2} = -2(|\gamma_1|^2 + 3|\gamma_2|^2) A_1 A_1^* A_2 + 2|\gamma_2|^2 A_3 A_3^* A_2, \tag{17б}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_3}{\mathrm{d}z^2} = -6|\gamma_2|^2 A_1 A_1^* A_3 - 3|\gamma_2|^2 A_2 A_2^* A_3$$
$$- 3\gamma_2 (\gamma_1^* A_1^* A_2 A_2 + \gamma_1 A_1 A_1 A_1). \tag{17в}$$

Легко убедиться, что при вырождении из системы укороченных уравнений, описывающих каскадный параметрический процесс на квадратичной нелинейности, в общем случае уже нельзя выделить замкнутую систему из двух НУШ, для того чтобы использовать стандартные способы построения ее точных аналитических решений. Отметим, что уравнения (17а) и (17в) также могут перейти в НУШ, однако при более жестких ограничениях. Для этого помимо условия $\Delta_{1,2} = 0$ необходимо потребовать, чтобы A_{1-3} имели постоянные и вполне определенные фазовые сдвиги.

4. Примеры аналитических решений

В качестве примеров рассмотрим две наиболее интересные с практической точки зрения ситуации: ГВГ и ПГ. Для этого сначала выделим заменой $\tilde{A}_{1,2} = X_{1,2} \exp(\mathrm{i}\varphi_{1,2})$ действительные амплитуды $X_{1,2}$ и фазы $\varphi_{1,2}$ двух взаимодействующих в НЛК мод. Предположим теперь, что реализован процесс ГВГ I типа, и поэтому потребуем, чтобы

$$I_{10} = X_{10}^2 \neq 0, \quad I_{20} = X_{20}^2 = 0. \tag{18}$$

Начальная фаза $\varphi_{20} = 2\varphi_{10} - \pi/2$ рождающейся в НЛК волны второй гармоники $\tilde{A}_2$ при этом должна соответствовать условию максимальности коэффициента усиления

$$\left.\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \beta X_{10}^2 \tag{19}$$

и не будет меняться по мере ее распространения, т. к. $X_{20} = 0$ [9]. Поскольку НУШ (9) отвечает дефокусирующей нелинейности керровского типа, искомое решение с учетом (18) обязано быть (см. [8]) пропорциональным эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}(\gamma z, k)$ [9]. Причем значения коэффициента пропорциональности $\tilde{A}_{2\,\max}$ и констант γ и k (модуль эллиптической функции) легко находятся с учетом параметров задачи и граничного условия (19). Окончательно получим

$$A_2 = (I_{10} k)^{1/2} \exp\left(+i\frac{\Delta}{2} z\right) \mathrm{sn}\left[\left(\frac{\beta^2 I_{10}}{k}\right)^{1/2} z, k\right], \tag{20а}$$

$$k = \left[1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}} + \left(\frac{\Delta^2}{4\beta^2 I_{10}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{16\beta^2 I_{10}}\right)^{1/2}\right]^{-1}. \tag{20б}$$

Далее, воспользовавшись (2), найдем

$$I_1 = I_{10} \left\{1 - k\,\mathrm{sn}^2\left[\left(\frac{\beta^2 I_{10}}{k}\right)^{1/2} z, k\right]\right\}. \tag{21}$$

Легко убедиться, что максимальная эффективность преобразования

$$\frac{I_{2\max}}{I_{10}} = \left[1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_{10}} + \left(\frac{\Delta^2}{4\beta^2 I_{10}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{16\beta^2 I_{10}}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{22}$$

зависит от единственного параметра $\Delta^2/(\beta^2 I_{10})$ и реализуется в точках

$$z = z_{\max}^{(n)} = \left(\frac{k}{\beta^2 I_{10}}\right)^{1/2} (2n+1) K(k). \tag{23}$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [10]; n – произвольное целое положительное число.

При вырожденной параметрической генерации логичнее всего было бы положить $I_{10} = 0$ и $I_{20} \neq 0$. Однако поскольку $\tilde{A}_{10}$ и $(d\tilde{A}_1/\mathrm{d}z)|_{z=0} = 0$ (см. (14)), уравнение (13) в этом случае имеет единственное тривиальное решение $\tilde{A}_1 \equiv 0$, неустойчивое по отношению к флуктуациям A_{10}. Поэтому нам придется рассмотреть немного более сложную ситуацию, когда на входе в НЛК присутствует излучение шумовой затравки на частоте ω_1 и

$$I_{20} = X_{20}^2 \gg I_{10} = X_{10}^2 \neq 0. \tag{24}$$

Начальную фазу $\varphi_{10} = \frac{1}{2}(\varphi_{20} - \frac{\pi}{2})$ этой затравки мы также выберем из условия максимальности коэффициента усиления X_1 в точке $z = 0$. При этом граничные условия (14) примут вид

$$\left.\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \beta X_{10} X_{20}, \tag{25а}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \varphi'_{10} = \frac{\Delta}{2}. \tag{25б}$$

Из (25б) следует (см. [9]), что в общем случае при вырожденной параметрической генерации фаза обязана испытывать нелинейные осцилляции. С учетом последних для X_1 получим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\Delta^2 I_{10}^2}{4X_1^3} - \beta^2\left(I_{10} + I_{20} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} - 2X_1^2\right)X_1 = 0, \tag{26}$$

решение которого может быть представлено в форме

$$X_1 = [I_{1\,\max} - (I_{1\,\max} - I_{1\,\min})\mathrm{sn}^2(\gamma z + \delta, k)]^{1/2}; \tag{27}$$

при этом оно сдвинуто вдоль оси z относительно решения, приводившегося нами ранее в [9]. Отметим что после определения значений констант γ, k, δ, $I_{1\,\max}$ и $I_{1\,\min}$ в (24) через параметры задачи и граничные условия (25) однозначно определенной оказывается и фаза искомого решения $\tilde{A}_1(z)$ (см. [9])

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{20} - \frac{\pi}{2} + \Delta I_{10}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{X_1^2(z')}\right]. \tag{28}$$

Поэтому после ряда несложных алгебраических выкладок получим

$$A_1(z) = [I_{1\,\max} - (I_{1\,\max} - I_{1\,\min})\mathrm{sn}^2(\gamma z + \delta, k)]^{1/2}$$
$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\frac{1}{2}\left[\varphi_{20} - \frac{\pi}{2} - \Delta z + \Delta I_{10}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{I_{1\,\max} - (I_{1\,\max} - I_{1\,\min})\mathrm{sn}^2(\gamma z' + \delta, k)}\right]\right\}, \tag{29}$$

где

$$\gamma = \beta\left(2I_{1\,\max} + I_{1\,\min} - I_{10} - I_{20} + \frac{\Delta^2}{4\beta^2}\right)^{1/2}; \tag{30а}$$

$$k = \left[\frac{I_{1\,\max} - I_{1\,\min}}{2I_{1\,\max} + I_{1\,\min} - I_{10} - I_{20} + \Delta^2/(4\beta^2)}\right]^{1/2}; \tag{30б}$$

$$\mathrm{sn}(\delta, k) = \left(\frac{I_{1\,\max} - I_{10}}{I_{1\,\max} - I_{1\,\min}}\right)^{1/2}, \tag{30в}$$

а параметры $I_{1\,\max}$ и $I_{1\,\min}$ определены как решение алгебраической системы уравнений

$$I_{1\,\max}I_{1\,\min}\left(I_{1\,\max} + I_{1\,\min} - I_{10} - I_{20} + \frac{\Delta^2}{4\beta^2}\right) = \frac{\Delta^2 I_{10}^2}{4\beta^2}, \tag{31а}$$

$$(I_{1\,\max} - I_{10})(I_{10} - I_{1\,\min})$$
$$\times\left(I_{1\,\max} + I_{1\,\min} - I_{20} + \frac{\Delta^2}{4\beta^2}\right) = I_{10}^2 I_{20}. \tag{31б}$$

С учетом того, что $I_{\min} \leqslant I_{10}$, непосредственно из (31) следует, что при $I_{10} \to 0$

$$I_{1\,\max} \to I_{20} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2}, \tag{32а}$$

$$\gamma \to \left(\beta^2 I_{20} - \frac{\Delta^2}{4}\right)^{1/2}, \tag{32б}$$

$$\delta \to K, \tag{32в}$$

и, следовательно, максимальная эффективность преобразования $I_{1\,\max}/I_{20}$ энергии волны накачки не зависит от интенсивности шумовой затравки I_{10} (см. [11]). Однако реализовать такую энергетическую эффективность можно только асимптотически (при $z \to \infty$), поскольку $k \to 1$ при $I_{10} \to 0$ и решение задачи становится уединенным.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе показано, что при вырождении (процессы стационарной ГВГ и вырожденной параметрической генерации I типа) повышение порядка системы укороченных волновых уравнений приводит к двум независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям, совпадающим по форме с обыкновенными уравнениями, которые получают из НУШ в стационарных задачах с размерностью «1 + 1» [3]. Это позволяет сразу выписать точные аналитические решения рассматриваемой задачи, пользуясь стандартной техникой построения искомых решений в форме КВ [8]. Отметим также, что, насколько нам известно, точные решения (29) задачи вырожденной параметрической генерации ранее в литературе не приводились.

Несмотря на это, вырожденные режимы, при которых фотоны двух из трех взаимодействующих мод неразличимы, все-таки отвечают особым точкам фазового пространства. Законы эволюции системы в этих режимах качественно меняются. В частности, в случае реализации на квадратичной нелинейности среды каскада из двух квазисинхроннных нелинейных процессов, один из которых вырожден, подход, основанный на введении понятия эффективной каскадной кубической нелинейности, уже не столь удобен, т. к. последняя в общем случае перестает быть керровской.

1. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046611 (2007).
2. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127** (6), 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966); Цернике Ф., Мидвинтер Дж. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Мир, 1976); Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М: Наука, 1989).
3. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов* (М: Физматлит, 2005).
4. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5** (9), 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Н. *Квантовая электроника*, № 4, 81 (1973); Meredith G.R *J. Chem. Phys.*, **77** (12), 5863 (1982); Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54** (4), 3455 (1996).
5. Saltiel M.S., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S. *Progress in Optics*, **47**, 1 (2005).
6. Somekh S., Yariv A. *Opt. Commun.*, **6** (3), 301 (1972); Yacoby Y., Aggarwal R.L., Lax B. *J. Appl. Phys.*, **44** (7), 3180 (1973); McMullen J.D. *J. Appl. Phys.*, **46** (7), 3076 (1975).
7. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **79** (2), 026605 (2009).
8. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60** (1), 1009 (1999).
9. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37** (6), 561 (2007).
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1989); Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
11. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **40** (2010) (в печати).