

Оптимальная обратная связь в эффективных кольцевых двухрезонаторных параметрических генераторах света

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Показано, что в невырожденном параметрическом генераторе света (ПГС) использование двух цепей обратной связи с согласованными коэффициентами передачи и оптимальными набегами фаз позволяет локализовать экстремумы формирующихся в нелинейном кристалле (НЛК) распределений интенсивностей взаимодействующих волн на его выходной грани, что и обеспечивает предельно достижимую эффективность преобразования энергии накачки. Процедура оптимизации является при этом достаточно гибкой, т. к. сводится к неоднозначному согласованию периода и сдвига экстремумов точных аналитических решений соответствующей задачи в форме кноидальных волн относительно положения НЛК. В отличие от однорезонаторной схемы ПГС оба эти параметра могут существенно превышать длину НЛК и даже стремиться к бесконечности, что соответствует уединенным солитоноподобным решениям.

Ключевые слова: двухрезонаторный параметрический генератор света, период и сдвиг экстремумов кноидальных волн, оптимизация коэффициентов передачи цепей обратной связи.

1. Введение

В работе [1] было показано, что задачу нелинейного взаимодействия трех коллинеарных плоских монохроматических волн – мод с частотами ω_1 , ω_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ – в среде с квадратичной нелинейностью [2] можно решать, повышая порядок системы укороченных уравнений. При этом задача редуцируется до трех независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных только граничными условиями и совпадающих по форме со стационарными нелинейными уравнениями Шредингера. Это позволяет описать конкуренцию процессов слияния ($\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$) и распада ($\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$) квантов света в терминах эффективной каскадной кубической нелинейности керровского типа [3]. В [4] этот же прием использован для анализа процессов, протекающих при каскадном параметрическом преобразовании частоты. В [5, 6] приведены решения, отвечающие параметрической генерации света (в том числе каскадной) в схеме генератора бегущей волны, в которой обратная связь отсутствует, и поэтому в нелинейном кристалле (НЛК) происходит параметрическое усиление входного шума. В [7] этот подход применен для оптимизации схемы однорезонаторного параметрического генератора света (ПГС) [8]. Показано, что в рамках такого описания введение цепи обратной связи уменьшает период формирующихся в НЛК кноидальных волн (КВ) [1, 4, 9], а оптимизация коэффициента ее передачи (коэффициента отражения выходного зеркала резонатора) сводится к согласованию периода КВ с длиной НЛК.

Ниже будет рассмотрена проблема оптимизации схем двухрезонаторных ПГС [8]. Насколько нам известно, ранее точное (в смысле отказа от приближения заданного поля накачки) аналитическое решение задач такого типа проводилось лишь для случая генерации так называемых субгармоник [8], т. е. для ситуаций, в которых $\omega_1 = \omega_2$ и генерируемые в НЛК фотоны неразличимы. С использованием описанного выше подхода мы покажем, что в отсутствие поглощения введение двух петель обратной связи с согласованными коэффициентами передачи позволяет локализовать экстремумы формирующихся в НЛК КВ на выходной грани, что и обеспечивает реализацию предельно достижимой эффективности. Процедура оптимизации является в этом случае достаточно гибкой, т. к. сводится к согласованию периода КВ и сдвига экстремумов КВ относительно положения НЛК. Оба эти параметра могут существенно превышать длину НЛК и даже стремиться к бесконечности (в режиме формирования уединенных солитоноподобных решений).

2. Основные уравнения

Как и в работе [7], рассмотрим коллинеарное взаимодействие плоских монохроматических волн: двух – на основной частоте (амплитуды $A_{1,2}$, частоты $\omega_{1,2} = \omega$, волновые векторы $k_{1,2}$) и одной – на частоте второй гармоники (амплитуда A_3 , частота $\omega_3 = 2\omega$, волновой вектор k_3), распространяющихся вдоль оси z . Пренебрегая поглощением, будем считать, что НЛК занимает область $0 \leq z \leq L$ (т. е. L – длина НЛК) и в нем за счет ортогональности поляризаций мод на частотах $\omega_{1,2}$ реализован невырожденный параметрический процесс так называемого II типа. Как показано в [1], это взаимодействие может быть описано независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые в наиболее интересном для реализации ПГС случае $\Delta = k_1 + k_2 - k_3 = 0$ принимают вид [7]

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лабораторный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 9 марта 2010 г.

$$\frac{d^2 A_{1,2}}{dz^2} - \beta^2(4I_{10,20} - 2I_{20,10} + I_{30} - 4A_{1,2}A_{1,2}^*)A_{1,2} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 A_3}{dz^2} + 2\beta^2(I_{10} + I_{20} + I_{30} - A_3 A_3^*)A_3 = 0, \quad (16)$$

с граничными условиями

$$A_{1,2}|_{z=0} = A_{10,20}, \quad \left. \frac{dA_{1,2}}{dz} \right|_{z=0} = -i\beta A_{20,10}^* A_{30}, \quad (2a)$$

$$A_3|_{z=0} = A_{30}, \quad \left. \frac{dA_3}{dz} \right|_{z=0} = -i2\beta A_{10} A_{20}. \quad (26)$$

Здесь β – та же константа нелинейной связи, что и в исходной системе укороченных уравнений в [1, 7]; $I_i(z) = A_i(z)A_i^*(z)$ – переменная, пропорциональная интенсивности i -й ($i = 1 - 3$) моды, которую далее мы будем называть интенсивностью; $I_i = I_i(z = 0)$.

Поскольку уравнения (1) независимы, искомые интенсивности $I_{1-3}(z)$ можно найти, решая любое из уравнений (1). Однако с учетом требования полного истощения накачки ($I_3|_{z=L} = 0$) оптимизацию удобнее провести, определив $I_3(z)$ из (16), (26) и записав с учетом двух интегралов [7] (сохранение плотности потока энергии и соотношения Мэнли – Роу [2]), выражение

$$I_{1,2}(z) = I_{10,20} + \frac{1}{2} [I_{30} - I_3(z)]. \quad (3)$$

В том случае, если генерация развивается из шумов при $\Delta = 0$ и $I_3|_{z=L} = 0$, информация о действительных амплитудах трех мод $X_i(z) = \sqrt{I_i(z)}$ является исчерпывающей, т. к. их фазы $\varphi_i = \varphi_{i0}$ обязаны быть константами [1], соответствующими максимальным начальным (в точке $z = 0$) инкрементам нарастания $I_{1,2}$ (убывания I_3). Поэтому для φ_{i0} после замены $A_i \rightarrow X_i \exp(i\varphi_i)$, как и в [7], легко получить условие $\varphi_{30} = \varphi_{10} + \varphi_{20} + \pi/2$, которое мы далее и будем считать выполненным, однако теперь (в отличие от [7]) исключительно за счет оптимального выбора набегов фаз в цепях обратной связи. С учетом этого выражения (16) и (26) можно переписать в окончательном виде:

$$\frac{d^2 X_3}{dz^2} + 2\beta^2(I_{10} + I_{20} + I_{30} - X_3^2)X_3 = 0, \quad (4a)$$

$$X_3|_{z=0} = X_{30} = \sqrt{I_{30}}, \quad (46)$$

$$\left. \frac{dX_3}{dz} \right|_{z=0} = -2\beta X_{10} X_{20} = -2\beta \sqrt{I_{10} I_{20}}.$$

3. Истощение накачки и оптимальная обратная связь

Обеспечить достаточное для эффективного преобразования излучения накачки в излучение на частотах $\omega_{1,2}$ усиление шумовых затравок $A_{10} A_{20}$ при разумных значениях параметров β , L и I_{30} обычно невозможно. Поэтому в ПГС включают цепи дополнительной обратной связи [8]. Оптимизация схемы однорезонаторного ПГС, в которой петля обратной связи замыкается лишь для одной

из генерируемых волн, в рамках описанного подхода была рассмотрена в [7]. Ниже мы остановимся на особенностях двухрезонаторных ПГС [8] и в отличие от [7] введем две независимые (с учетом равенства $\omega_1 = \omega_2$ – поляриционно-селективные) цепи обратной связи, положив, что некие доли $|R_{1,2}|^2$ выходных (в точке $z = L$) интенсивностей обеих генерируемых в НЛК волн $I_{1,2}(L)$ снова возвращаются на его вход (в плоскость $z = 0$, рис.1). Здесь $R_{1,2}$ – комплексные коэффициенты передачи полей $A_{1,2}$ с выхода НЛК на его вход. Напомним, что фазовые набег в обеих цепях предполагаются оптимальными, и поэтому введенная нами обратная связь является положительной. Отметим также, что использованная приближением лучше всего соответствует кольцевая схема резонатора, т. к. взаимодействие мод на частотах $\omega_{1,2}$, которое возникало бы на обратном проходе через НЛК в линейном резонаторе [8], здесь не учитывается.

Естественно предположить, что в оптимальных условиях на длине НЛК L волна накачки полностью истощается и $I_3(L) = X_3^2(L) = 0$. Поэтому с учетом введенных выше определений, $|R_{1,2}|^2 = I_{10,20}/I_{1,2}(L)$, из (3) найдем, что в данных условиях

$$I_{10,20} = \frac{1}{2} \frac{|R_{1,2}|^2}{1 - |R_{1,2}|^2} I_{30}, \quad I_{1,2}(L) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - |R_{1,2}|^2} I_{30}, \quad (5)$$

а выходные интенсивности I_{1out} и I_{2out} сигнальной и холостой волн соответственно после зеркал резонаторов оказываются одинаковыми,

$$I_{1out,2out} = (1 - |R_{1,2}|^2) I_{1,2}(L) = \frac{1}{2} I_{30}, \quad (6)$$

и заданными законом сохранения полного потока энергии и соотношениями Мэнли – Роу.

Поскольку уравнение (4a) совпадает по форме с нелинейным уравнением Шредингера для керровской нелинейности дефокусирующего типа и $X_3(L) = 0$, интересующее нас решение $X_3(z)$ обязано [9] быть пропорциональным эллиптической функции Якоби $\text{sn}(\gamma z, k)$ [10], сдвинутой вдоль оси z так, чтобы нуль этой функции был локализован в точке $z = L$, т. е.

$$X_3 = X_{3\max} \text{sn}[\gamma(L - z), k], \quad I_3 = I_{3\max} \text{sn}^2[\gamma(L - z), k]. \quad (7)$$

Граничные условия (4б) с учетом (5) при этом приводятся к виду

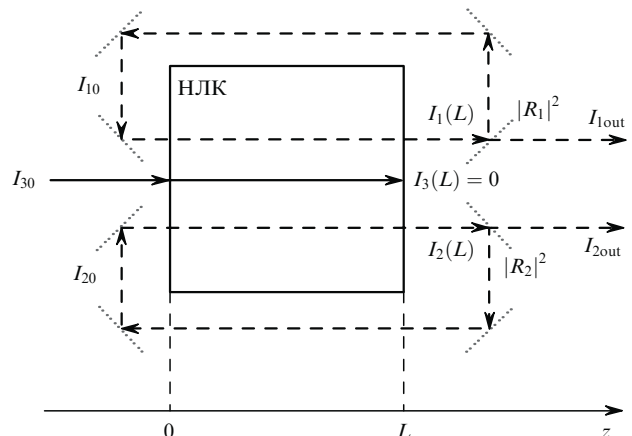


Рис.1. Схема к расчету двухрезонаторного ПГС.

$$\begin{aligned}
 X_{3\max} \operatorname{sn}(\gamma L, k) &= \sqrt{I_{30}}, \\
 \gamma X_{3\max} \operatorname{cn}(\gamma L, k) \operatorname{dn}(\gamma L, k) & \\
 &= \beta \left[\frac{|R_1|^2 |R_2|^2}{(1 - |R_1|^2)(1 - |R_2|^2)} \right]^{1/2} I_{30}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Здесь k – модуль эллиптических функций Якоби $\operatorname{sn}(\gamma z, k)$, $\operatorname{cn}(\gamma z, k)$ и $\operatorname{dn}(\gamma z, k)$ [10], а числовые значения параметров γ , k , $X_{3\max} = \sqrt{I_{30}}$ и $|R_{1,2}|^2$ должны быть выбраны такими, чтобы удовлетворить уравнению (4а) и граничным условиям (8).

Указанные требования с учетом выражения (3) определяют три типа возможных решений задачи. При $|R_1|^2 < |R_2|^2$ получаем решение

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \frac{1}{2} \frac{I_{30}}{1 - |R_1|^2} \operatorname{cn}^2[\gamma(L - z), k], \\
 I_2(z) &= \frac{1}{2} \frac{I_{30}}{1 - |R_2|^2} \operatorname{dn}^2[\gamma(L - z), k],
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 &= \frac{\beta^2 I_{30}}{1 - |R_2|^2}; \quad k^2 = \frac{1 - |R_2|^2}{1 - |R_1|^2}; \\
 I_{3\max} &= \frac{I_{30}}{1 - |R_1|^2}; \quad \operatorname{sn}^2(\gamma L, k) = 1 - |R_1|^2.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

При $|R_1|^2 > |R_2|^2$ индексы 1 и 2 в (9) меняются местами. Точка же $|R_1|^2 = |R_2|^2 = |R|^2$ является особой, т. к. периодические решения (7) и (9) становятся уединенными ($k = 1$):

$$\begin{aligned}
 I_3 &= I_{3\max} \tanh^2[\gamma(L - z)], \\
 I_{1,2}(z) &= \frac{1}{2} \frac{I_{30}}{1 - |R|^2} \operatorname{cosh}^{-2}[\gamma(L - z)],
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{\beta^2 I_{30}}{1 - |R|^2}; \quad I_{3\max} = \frac{I_{30}}{1 - |R|^2};
 \tag{12}$$

$$\tanh^2(\gamma L) = 1 - |R|^2,$$

что совпадает с вырожденным случаем (генерация субгармоники), рассмотренным в [8].

4. Оптимальные соотношения коэффициентов передачи

Из (10) следует, что при $|R_1|^2 \neq |R_2|^2$ условие полного истощения волны накачки ($I_3(L) = 0$) связывает между собой оптимальные коэффициенты передачи $|R_1|^2$ и $|R_2|^2$ двух цепей обратной связи трансцендентным уравнением

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn} \left[\beta \left(\frac{I_{30}}{1 - |R_{\max}|^2} \right)^{1/2} L, \left(\frac{1 - |R_{\max}|^2}{1 - |R_{\min}|^2} \right)^{1/2} \right] & \\
 = (1 - |R_{\min}|^2)^{1/2}, &
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где $|R_{\max, \min}|^2 = \max, \min |R_{1,2}|^2$. Анализ решений уравнения (13) удобнее всего провести графически (рис.2). Для этого разрешим уравнение (13) относительно параметра $\beta \sqrt{I_{30}} L$, значение которого задано только характеристиками НЛК (βL) и накачки (I_{30}), записав равенство

$$\begin{aligned}
 \beta \sqrt{I_{30}} L &= F(|R_1|^2, |R_2|^2) = (1 - |R_{\max}|^2)^{1/2} \\
 &\times \int_0^{(1 - |R_{\min}|^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{1 - |R_{\max}|^2}{1 - |R_{\min}|^2} \xi^2 \right)^{-1} \frac{d\xi}{1 - \xi^2},
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

где $F(x, y)$ – некая «стандартная» (т. к. она пропорциональна неполному эллиптическому интегралу 1-го рода [10]) и симметричная по отношению к перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$ функция. Это значит, что уравнение (14) определяет стандартную поверхность в пространстве $(|R_1|^2, |R_2|^2, \beta \sqrt{I_{30}} L)$, а массив точек $(|R_1|^2, |R_2|^2)$, локализованных на линии пересечения этой поверхности с плоскостью $\beta \sqrt{I_{30}} L = \text{const}$, и задает множество пар оптимальных значений коэффициентов передачи цепей обратной связи $|R_1|^2$ и $|R_2|^2 = f_{\beta \sqrt{I_{30}} L}(|R_1|^2)$. Здесь $f_a(y)$ – функция, которая является решением уравнения $a = F(x, y)$. Очевидно, что все эти пары согласованы как между собой ($|R_2|^2$ является функцией $|R_1|^2$, и наоборот), так и с ха-

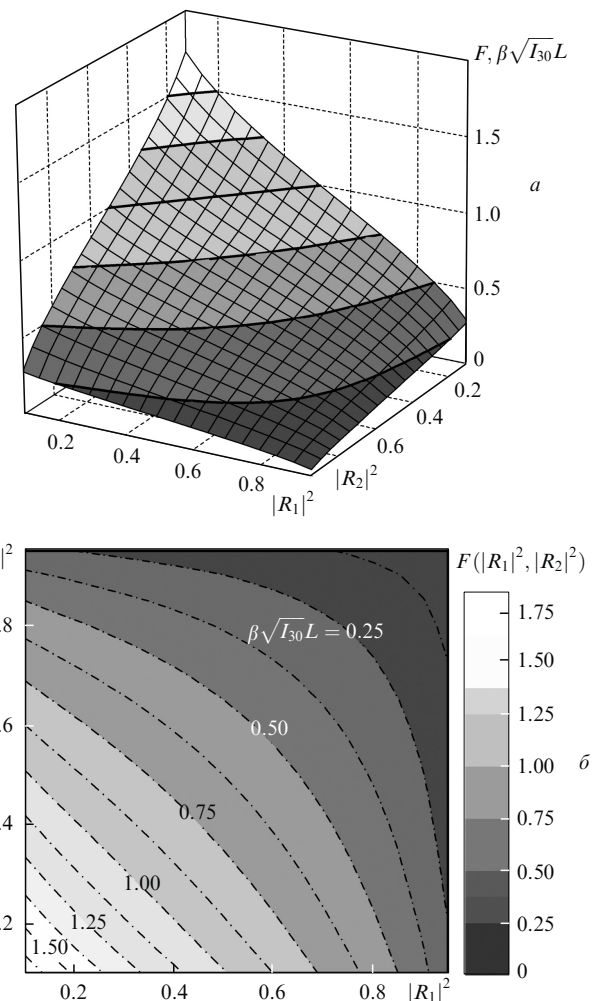


Рис.2. Графическое решение уравнения (14): поверхность $F(|R_1|^2, |R_2|^2)$ и линии ее пересечения с плоскостями $\beta \sqrt{I_{30}} L = \text{const}$ (а), а также зависимости $|R_2|^2 = f_{\beta \sqrt{I_{30}} L}(|R_1|^2)$ (штрих-пунктирные кривые) и та же поверхность в виде карты в градациях серого цвета (б).

рактическими преобразователя и его накачки (характер этих функций зависит от параметра $\beta\sqrt{I_{30}L}$).

На рис.2,а представлены указанная поверхность $F(|R_1|^2, |R_2|^2)$ и линии ее пересечения с плоскостями $\beta\sqrt{I_{30}L} = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$ и 1.5 , а на рис.2,б – характер зависимостей $|R_2|^2 = f_{\beta\sqrt{I_{30}L}}(|R_1|^2)$ для тех же, что и на рис.2,а, значений параметра $\beta\sqrt{I_{30}L}$ и та же поверхность в виде карты в градациях серого цвета.

С учетом того, что $\omega_1 = \omega_2$, в предельном случае $|R_1|^2 = |R_2|^2 = |R|^2$ решаемая задача вырождается и выражение (13) сводится к известному из [8] соотношению

$$\tanh \left[\beta \left(\frac{I_{30}}{1 - |R|^2} \right)^{1/2} L \right] = (1 - |R|^2)^{1/2}, \quad (15)$$

которое легко разрешается относительно $\beta\sqrt{I_{30}L}$:

$$\begin{aligned} \beta\sqrt{I_{30}L} &= F_1(|R|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - |R|^2 \right)^{1/2} \ln \frac{1 + (1 - |R|^2)^{1/2}}{1 - (1 - |R|^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $F_1(|R|^2) = F(|R|^2, |R|^2)$ также является стандартной функцией, показанной на рис.3 сплошной кривой. Штриховая кривая на этом рисунке соответствует функции $F_2(|R|^2) = F(|R|^2, 0)$, отвечающей другой предельной ситуации – однорезонаторной схеме ПГС. Легко убедиться, что в этом случае выражение (13) переходит в уравнение

$$\operatorname{sn} \left[\beta \left(\frac{I_{30}}{1 - |R|^2} \right)^{1/2} L, (1 - |R|^2)^{1/2} \right] = 1, \quad (17)$$

решение которого

$$\beta\sqrt{I_{30}L} = F_2(|R|^2) = (1 - |R|^2)^{1/2} K[(1 - |R|^2)^{1/2}] \quad (18)$$

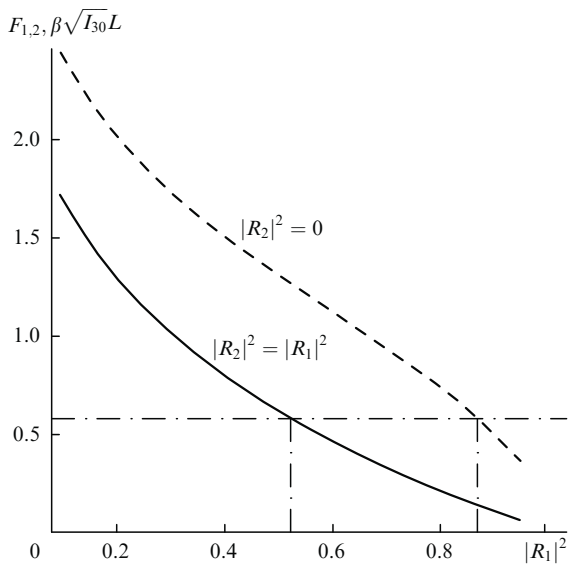


Рис.3. Графическое решение уравнений (16) и (18): зависимость $F_1(|R|^2) = F(|R|^2, |R|^2)$ для двухрезонаторной схемы ПГС (сплошная кривая) и зависимость $F_2(|R|^2) = F(|R|^2, 0)$ для однорезонаторной схемы ПГС (штриховая кривая). Оптимальные значения коэффициентов передачи в цепях обратной связи определяются абсциссами точек пересечения штрих-пунктирной линии $\beta\sqrt{I_{30}L} = \text{const}$ с двумя указанными зависимостями.

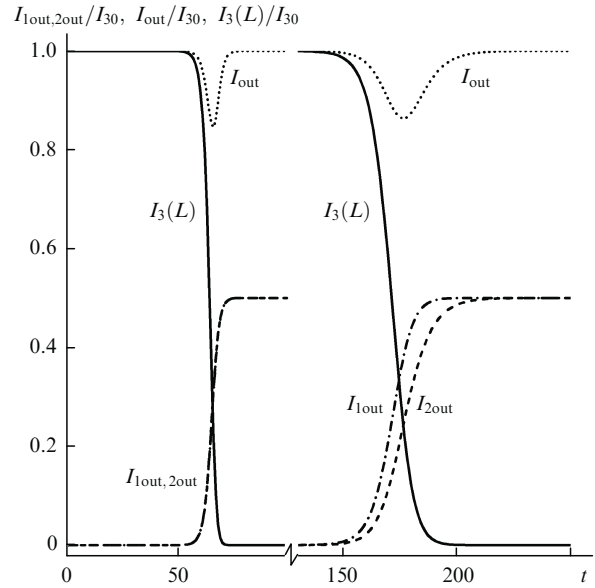


Рис.4. Переходный процесс после мгновенного включения накачки: нормированные на I_{30} зависимости $I_{\text{out}}(t)$ (штрих-пунктирные кривые), $I_{2\text{out}}(t)$ (штриховые кривые), $I_3(L, t)$ (сплошные кривые) и плотность полного потока энергии из резонатора $I_{\text{out}}(t) = I_{1\text{out}}(t) + I_{2\text{out}}(t) + I_3(L, t)$ (пунктирные кривые). Правая часть рисунка ($130 \leq t \leq 250$) соответствует оптимальной однорезонаторной ($|R_1|^2 = 0.87$ и $|R_2|^2 = 0$), а левая ($0 \leq t \leq 100$) – оптимальной двухрезонаторной ($|R_1|^2 = |R_2|^2 = 0.52$) схемам ПГС при $\beta\sqrt{I_{30}L} = 0.6$ (см. рис.3). Время t нормировано на время одного прохода излучения по резонатору, относительный уровень входных шумов $I_{10,20}(t=0)/I_{30} = 10^{-16}$.

уже выписывалось и анализировалось ранее в [7]. Здесь $K(k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода [10].

Оптимальные значения коэффициентов передачи в этих двух предельных случаях также можно найти графически (рис.3). При заданном значении $\beta\sqrt{I_{30}L}$ та же предельная эффективность ПГС (6), что и в однорезонаторной схеме, может быть реализована за счет использования двух цепей обратной связи с одинаковыми ($|R_1|^2 = |R_2|^2$), но существенно меньшими коэффициентами передачи (рис.3). И это обстоятельство имеет принципиальный характер. Дело в том, что везде ранее, как и в [7], решалась стационарная задача, т. е. анализировался режим уже установившейся генерации. На практике в течение определенного интервала времени после момента включения накачки обратная связь не является оптимальной, т. к. в системе протекает переходный процесс, связанный с формированием оптимальных входных полей – затравок ($I_{10,20}$).

Динамику этого процесса в случае мгновенного ($I_{30}(t) = 0$ при $t < 0$ и $I_{30}(t) = I_{30}$ при $t \geq 0$) включения накачки, рассчитанную методом последовательных шагов [8], иллюстрирует рис.4. Легко заметить, что в этом примере длительность переходного процесса в случае оптимальной двухрезонаторной схемы ПГС оказывается примерно в три раза меньше, чем в случае оптимальной однорезонаторной схемы. В обеих ситуациях хорошо виден временной интервал, в течение которого $I_{\text{out}}(t) < 1$ и происходит запасание энергии волны накачки в резонаторе (резонаторах). Еще одной характерной особенностью оптимальной однорезонаторной схемы ПГС является ее выраженная асимметрия, за счет которой во время всего переходного процесса $I_{1\text{out}}(t) > I_{2\text{out}}(t)$.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе показано, что при невырожденной параметрической генерации в отсутствие потерь введение двух цепей обратной связи с согласованными коэффициентами передачи и оптимальными фазовыми набегам позволяет локализовать экстремумы формирующихся в НЛК пространственных (по продольной координате) распределений интенсивностей взаимодействующих волн на его выходной грани. Это и обеспечивает реализацию предельной эффективности преобразования. Процедура оптимизации является при этом достаточно гибкой, т. к. сводится к одной из целого множества возможностей согласования периода и сдвига экстремумов аналитических решений соответствующей задачи в форме КВ относительно положения НЛК. В отличие от однорезонаторной схемы ПГС оба эти параметра могут существенно превышать длину НЛК и даже стремиться к бесконечности, что соответствует реализации уединенных солитоноподобных решений.

В течение некоторого интервала времени после момента включения накачки такая обратная связь не является оптимальной, т. к. в системе протекает переходный процесс, связанный с формированием необходимых входных полей – затравок. Длительность этого процесса в оптимальной двухрезонаторной схеме ПГС оказывается существенно меньше, чем в однорезонаторном случае.

Заметим, что, насколько нам известно, точное (в смысле отказа от приближения заданного поля накачки) аналитическое решение задач такого типа ранее проводилось лишь для вырожденного случая генерации субгар-

моник [8], т. е. для ситуаций, в которых генерируемые в НЛК фотоны на частотах $\omega_{1,2}$ были неразличимы. Отметим также, что в отсутствие дисперсии в рассмотренном нами случае синхронного взаимодействия с помощью простой замены переменных [8] легко можно учесть и вносимые НЛК распределенные потери.

1. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046611 (2007).
2. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966).
3. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5** (9), 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Ф. *Квантовая электроника*, № 4, 81 (1973); Meredith G.R. *J. Chem. Phys.*, **77** (12), 5863 (1982); Kobayakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54** (4), 3455 (1996).
4. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **79** (2), 026605 (2009).
5. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **40** (3), 219 (2010).
6. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **40** (4), 329 (2010).
7. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **40** (7), 619 (2010).
8. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика: Генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света* (М.: Радио и связь, 1982).
9. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60** (1), 1009 (1999).
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1989); Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965). *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган (М.: Наука, 1979).