

Солитоны в нелинейной оптике

А.И.Маймистов

Классическими примерами оптических явлений, в которых возникли солитоны, являются самофокусировка, самоиндуцированная прозрачность и параметрическое взаимодействие трех волн. К сегодняшнему дню список областей нелинейной оптики и моделей, в которых солитоны играют важную роль, значительно расширился. Сейчас солитоном часто называют долгоживущую, или устойчивую уединенную волну. К ним относятся, например, диссипативные, целевые, параметрические и топологические солитоны. В настоящем обзоре рассматриваются модели нелинейной оптики, в которых возникают солитоны в узком смысле: уединенные волны, отвечающие решениям лежащих в основе обсуждаемых моделей вполне интегрируемых систем уравнений.

Ключевые слова: оптические солитоны, метод обратной задачи рассеяния, УКИ, дисперсия, модуляция, многоволновое взаимодействие, комбинационное рассеяние, оптические волокна, керровская нелинейность.

Содержание

1. Введение	756
1.1. Самофокусировка	
1.2. Оптические солитоны в волоконных световодах	
1.3. Самоиндуцированная прозрачность	
1.4. Взаимодействие трех волн	
1.5. Причины поиска новых, вполне интегрируемых систем	
1.6. Немного о методе обратной задачи рассеяния	
2. За пределами модели двухуровневых атомов	763
2.1. Двойной резонанс	
2.2. СИП при двухфотонном резонансе	
2.3. Когерентное четырехволновое смешение волн	
2.4. СИП в нелинейной среде керровского типа	
3. Фемтосекундные оптические солитоны	768
3.1. СИП в модели однонаправленных волн	
3.2. Более чем НУШ	
3.3. Альтернатива НУШ	
3.4. Распространение предельно коротких импульсов	
3.5. СИП в двухуровневой среде с постоянным дипольным моментом	
4. Многокомпонентные солитоны	771
4.1. Векторные оптические солитоны	
4.2. СИП в трехуровневой среде для поляризованных импульсов	
4.3. СИП в анизотропной/изотропной двухуровневой среде с постоянным дипольным моментом	
4.4. Когерентное распространение поляризованных предельно коротких импульсов	
4.5. Оптические доменные стенки	
5. Деформированные солитоны	774
5.1. Деформированные уравнения РМБ	
5.2. Деформированные уравнения РМБ при двухфотонном поглощении	
5.3. Деформированные НУШ	
5.4. Солитоны НУШ в неоднородной среде	
5.5. Солитоны неавтономного НУШ	
6. Применение интегрируемых моделей	777
6.1. Прохождение ультракороткого импульса через тонкую пленку	
6.2. Рамановский солитон	
6.3. Модель лазерного усилителя и сверхфлуоресценции	
6.4. Развитие МОЗР и его применение в нелинейной оптике	
7. Заключение	779
8. Литература	779

А.И.Маймистов. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: aimaimistov@gmail.com

Поступил в редакцию 16 июля 2010 г.

1. Введение

Нелинейные волны существуют во многих фундаментальных явлениях природы. Их можно обнаружить в гидродинамике и аэродинамике, в физике твердого тела и в

физике плазмы, в оптике и теории поля, в кинетике химических реакций и в динамике популяций, в ядерной физике и теории гравитации. Все нелинейные волны можно разделить на два класса: волны в диспергирующей среде и волны в диссипативной диспергирующей среде. Особое место среди волн первого класса занимают солитоны. Долгое время этим термином обозначались нелинейные уединенные волны, которые сохраняют как свою форму, так и скорость при движении и при столкновении с другими уединенными волнами. Однако сейчас накопилось много примеров, когда солитоны не сохраняют форму при движении, движутся ускоренно, распадаются или образуют связанные состояния при взаимодействии. Тем не менее всех их объединяет то, что уравнения, описывающие их эволюцию, обладают свойством полной интегрируемости.

История солитонов началась в 1834 г., когда Дж.С. Рассел наблюдал и описал необычный тип волн на воде, распространяющихся без дисперсионного уширения. Для изучения длинных волн на поверхности жидкости в каналах Ж.В.Буссинеск в 1872 г. вывел уравнение, решение которого отвечало распространяющимся в любом из двух возможных направлений уединенным волнам. Эти волны могли проходить сквозь друг друга, сохраняя свою первоначальную форму. Более простое уравнение для волн на поверхности воды, бегущих только в одном направлении, было получено Д.Кортевегом и Г. де Фризом в 1895 г. В 1964 г. Н.Забуски и М.Крускал нашли, что уравнение Кортевега–де Фриза имеет решения в виде уединенных волн, которые обладают свойствами частиц: сохраняют форму при распространении и после столкновения друг с другом. Это послужило основанием назвать их солитонами (т. е. «частицами уединенной волны», по аналогии с терминами: фонон, фотон, электрон, магнон и т. д.). Создание в 1968 г. метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1] позволило понять причину «живучести» солитонов. В настоящее время во многих разделах физики солитоны стали важным элементом описания различных эффектов. Можно сказать, что они играют ту же роль в нелинейной физике, что и гармонические волны в линейной. Подчеркнем, что благодаря созданию лазеров возникла и развилась нелинейная оптика – область, в которой все основные черты солитонов проявляются в полной мере.

В 1962 г. было предсказано [2], что положительная поправка к показателю преломления, пропорциональная интенсивности излучения, может привести к подавлению дифракционной расходимости пучка и к его схлопыванию. Это явление было названо самофокусировкой (СФ) и интенсивно изучалось в дальнейшем.

Изучая прохождение импульса рубинового лазера через рубиновый стержень, МакКолл и Хан в 1967 г. обнаружили, что при определенных условиях электромагнитный импульс проходит через резонансно поглощающую среду без потерь энергии – возникает явление самоиндуцированной прозрачности (СИП) [3]. Длительность импульса должна быть значительно меньше времен релаксации поляризации среды и разности населенностей резонансных уровней. В этом случае все атомы синфазно реагируют на действие электрического поля импульса и происходят только поглощение (сильное, резонансное) и вынужденное испускание. При достаточно большой амплитуде импульса все атомы сначала переходят в возбужденное состояние, а затем переходят в

основное состояние, возвращая поглощенную энергию за счет вынужденного излучения обратно в импульс.

Самофокусировка световых пучков и СИП являются первыми яркими примерами важной роли солитонов в нелинейной оптике. Вместе с тем большую часть современных исследований в этой области физики составляют исследования распространения нелинейных волн в нерезонансных средах. Здесь вследствие модуляционной неустойчивости из непрерывной волны может образовываться цепочка отдельных импульсов, которые при определенных условиях могут эволюционировать в солитоны. Начиная с 1979 г., после экспериментальной демонстрации образования солитонов в оптическом волокне, их распространение в волокнах и волоконных линиях связи продолжает привлекать огромное внимание.

Другой классической задачей нелинейной оптики является параметрическое взаимодействие волн. Генерация гармоник, вынужденное комбинационное рассеяние, параметрическое усиление, четырехволновое смешение до сих пор привлекают внимание исследователей. Особый интерес представляет трехволновое взаимодействие, поскольку оно является примером появления солитонов в нелинейной системе без дисперсии, тогда как существует мнение, что солитон возникает в результате баланса между дисперсионным уширением и нелинейным сжатием уединенной волны.

1.1. Самофокусировка

Чтобы описать явление СФ был рассмотрен [4, 5] параксиальный волновой пучок в нелинейной среде, диэлектрическая проницаемость которой имеет малую положительную добавку, пропорциональную интенсивности. Теория СФ в керровской среде [5] основана на трехмерном нелинейном параболическом уравнении, которое во многих приложениях называется $(2+1)$ -нелинейным уравнением Шредингера. Данная модель позволила вычислить порог фокусировки, фокусное расстояние и получить зависимость интенсивности от расстояния до точки фокусировки. Волны в нелинейной диспергирующей среде и процесс распада плоской волны на отдельные волновые пакеты в случае модуляционной неустойчивости изучены в [6] на основе нелинейного параболического уравнения. Обзор геометрической и волновой оптики нелинейных сред, СФ и нелинейных оптических эффектов в поле самофокусирующихся пучков дан в [7, 8]. Главные основополагающие работы по СФ и результаты современных исследований в этой области собраны в коллективной монографии [9].

В важной для теории солитонов статье [10] было показано, что одномерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$ie_{,\zeta} + e_{,\xi\xi} + |e|^2 e = 0, \quad (1)$$

описывающее плоскую СФ (в этом случае ζ – нормированная координата, направленная вдоль оси пучка, а ξ – нормированная поперечная координата) и автомодуляцию (ζ – нормированное время, а ξ – нормированная координата в направлении распространения волны), может быть точно решено методом обратной задачи рассеяния. (Здесь и далее частные производные обозначены запятой в нижнем индексе.) В рамках модели НУШ была точно решена задача о дифракции электромагнитной волны на непрозрачном экране со щелями, за которым находится

нелинейная (керровская) среда [11, 12]. Получен сдвиг дифракционных максимумов и минимумов, пропорциональный квадрату напряженности поля. При повышении пороговой интенсивности развивается волноводный узкий канал. В [13] был дан анализ устойчивости таких образований в рамках МОЗР. Оказалось, что плоский самоиндуцированный волновод и солитон неустойчивы относительно поперечных возмущений (неустойчивость типа «змейки» и «перетяжки»). В целом солитон неустойчив относительно возмущений, изгибающих его фронт. МОЗР позволяет решить НУШ, учитывающее линейную пространственную неоднородность [14]. Найдено N -солитонное решение и получена рекуррентная формула для сохраняющихся величин.

СФ и самомодуляция световой волны в керровской среде с учетом произвольной поляризации строго рассмотрены в [15]. Результирующая система уравнений для проекций вектора электрического поля (волны e_1, e_2) есть система связанных НУШ (система уравнений Манакова):

$$\begin{aligned} ie_{1,\zeta} + e_{1,\xi\xi} + (|e_1|^2 + |e_2|^2)e_1 &= 0, \\ ie_{2,\zeta} + e_{2,\xi\xi} + (|e_1|^2 + |e_2|^2)e_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Было найдено, что при пересечении каналов (солитонов) их поляризации изменяются, только если первоначальные поляризации не были коллинеарными или ортогональными.

Стоит отметить, что как при учете пространственной неоднородности, так и при решении векторного НУШ солитоны не стационарны и некоторые их параметры изменяются при столкновениях.

1.2. Оптические солитоны в волоконных световодах

Одно из ограничений скорости передачи информации по волоконной линии связи (ВОЛС) при использовании импульсно-кодовой модуляции связано с уширением оптических импульсов по мере их распространения в волокне из-за дисперсии групповых скоростей. Дисперсионное уширение импульса может быть подавлено, если использовать достаточно мощные импульсы света. Здесь уместна аналогия с явлением СФ, когда дифракционное уширение пучка компенсируется его сжатием из-за нелинейных свойств среды, в которой он распространяется. В волоконном световоде вместо пространственного солитона должен сформироваться временной солитон. В работах [16, 17] предложено использовать оптические солитоны для передачи информации по ВОЛС. В [18, 19] выведено уравнение, описывающее распространение оптических импульсов в одномодовом волокне с учетом дисперсии групповых скоростей второго порядка, которое формально совпадает с НУШ.

Проведенные в [20] эксперименты показали, что солитон действительно образуется из импульса длительностью 5 пс в волокне длиной ~ 1 км (использовались волокна длиной от 0.76 до 2.5 км, чтобы убедиться в подавлении дисперсионного уширения) при превышении порога мощности, равного ~ 1 Вт. В эксперименте использовался лазер на центрах окраски с синхронизацией мод (F-центры в КФ). Лазер накачивался излучением Nd-лазера (мощность излучения 5 Вт) и давал излучение мощностью 1 – 2.5 Вт на длине волны 1.23 – 1.46 мкм. В последующих работах [21, 22] продемонстрировано рас-

пространение импульсов длительностью 6–7 пс в волоконном световоде с отрицательной дисперсией на расстоянии 700 м. Исходные импульсы претерпевали изменения, характерные для нелинейной уединенной волны (солитона НУШ), при их пиковой мощности ~ 1.24 Вт (теоретическое предсказание – 1.0 Вт). При меньшей мощности импульс испытывал дисперсионное уширение, а при мощности 5 Вт сжимался в 3.5 раза. Наблюдалось также расщепление импульса на несколько субимпульсов и последующее их слияние в один импульс. Это явление, называемое рекуррентностью, характерно для некоторого класса солитонов, в частности для солитонов НУШ.

Поскольку дисперсия групповых скоростей высоких порядков, дисперсия поперечного распределения электрического поля в волокне, дисперсия нелинейной восприимчивости, оптические потери и другие эффекты нарушают динамический баланс между нелинейным сжатием импульса и его дисперсионным уширением, солитоны в реальных ВОЛС в строгом смысле этого термина не существуют. Но расстояния, пройденные оптическим солитоном в волокне, значительно превышают длину дисперсии, или длину, которую мог бы пройти слабый импульс. Таким образом, можно рассматривать солитон как хорошее приближение для реальных нелинейных импульсов в ВОЛС, имеющих длительность порядка и более 10 пс.

Пусть e обозначает нормированную комплексную медленно меняющуюся огибающую оптического импульса, так что напряженность электрического поля дается выражением

$$E(t, x, y, z) = A_0 e(t, z) \Psi(x, y) \exp(-i\omega_0 t + i\beta_0 z)$$

$$+ A_0 e^*(t, z) \Psi^*(x, y) \exp(i\omega_0 t - i\beta_0 z),$$

где β_0 – постоянная распространения, зависящая от частоты несущей волны ω_0 ; $\Psi(x, y)$ – модовая функция, определяющая поперечное распределение электрического поля в волокне; A_0 – вещественная нормировочная амплитуда (максимальное значение напряженности электрического поля E). Эта нормированная огибающая описывается НУШ [18, 19] в следующей форме:

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + \hat{\mu}|e|^2 e = 0. \quad (3)$$

Здесь $\zeta = z/L_d$ и $\tau = (t - z/v_g)/t_{p0}$ – нормированные независимые переменные: координата, отсчитываемая вдоль оси волокна, и время соответственно; t_{p0} – длительность импульса при $z = 0$; v_g – групповая скорость импульса. Слагаемое в (3) со второй производной по времени описывает дисперсионное уширение импульса ($s = -1$ отвечает нормальной дисперсии, а $s = +1$ – аномальной). Дисперсионная длина $L_d = 4\beta_0 t_{p0}^2 |\partial^2 \beta_0 / \partial \omega^2|^{-1}$. Третье слагаемое в (3) учитывает эффект самовоздействия, или автомодуляцию. Коэффициент $\hat{\mu}$ равен отношению дисперсионной длины к длине $L_k = \beta_0 c^2 (2\pi\omega_0^2 A_0^2 |\chi_{\text{eff}}|)^{-1}$. Здесь χ_{eff} – эффективная нелинейная восприимчивость третьего порядка, описывающая высокочастотный эффект Керра.

Полная интегрируемость НУШ была установлена в [11, 23]. Односолитонное решение НУШ (в случае $s = 1$) имеет следующий вид:

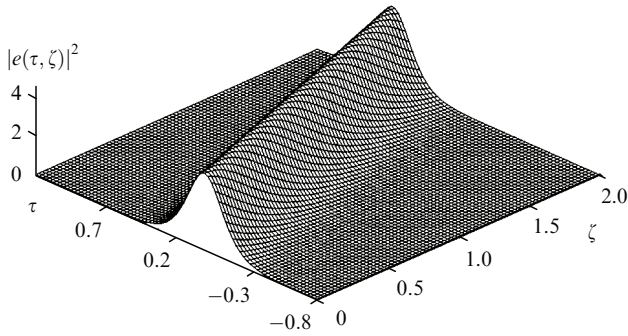


Рис.1. Яркий солитон НУШ (соответствует стационарному импульсу электромагнитного излучения).

$$e_s(\zeta, \tau) = \frac{2i\eta \exp[iF(\zeta, \tau)]}{\cosh[2\eta(\tau + 4\theta\zeta - \tau_0)]},$$

где $F(\zeta, \tau) = -2\theta\tau - 4(\theta^2 - \eta^2)\zeta - \varphi_0$; η, θ, τ_0 и φ_0 – константы, определяемые начальными условиями. Такой солитон называют иногда ярким солитоном (рис.1). Солитоны НУШ, как следует из этого выражения, при $\theta = 0$ распространяются со скоростью слабого (линейного) импульса в среде. Однако их скорость может отличаться от скорости линейного импульса из-за начальной фазовой модуляции, вследствие которой $\theta \neq 0$. Многосолитонные импульсы ведут себя подобно бризерам (рис.2), но при превышении некоторого порога глубины фазовой модуляции исходного импульса такой многосолитонный импульс трансформируется в ряд отдельных солитонов.

Чем выше кратность N многосолитонного импульса, тем более сложна картина его пространственной эволюции, но важно, что на некоторой длине трассы N -солитон собирается в один пик, ширина которого меньше исходного сигнала в N раз. Этот факт был использован для компрессии оптического пикосекундного импульса до фемтосекундных длительностей.

Если $s = -1$, то солитоны НУШ с нулевой асимптотикой нет. Однако, если $|e(\zeta, \tau)| \rightarrow e_0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$, уравнение (3) имеет решение

$$e_s(\zeta, \tau) = e_0 \{ \cos \phi \tanh \times [e_0 \cos \phi (\tau - e_0 \zeta \sin \phi) + i \sin \phi] \} \exp(-ie_0^2 \zeta),$$

которое называется серым солитоном. В частном случае, когда параметр ϕ равен нулю, оно переходит в решение, называемое темным солитоном (рис.3):

$$e_s(\zeta, \tau) = e_0 \tanh(e_0 \tau) \exp(-ie_0^2 \zeta).$$

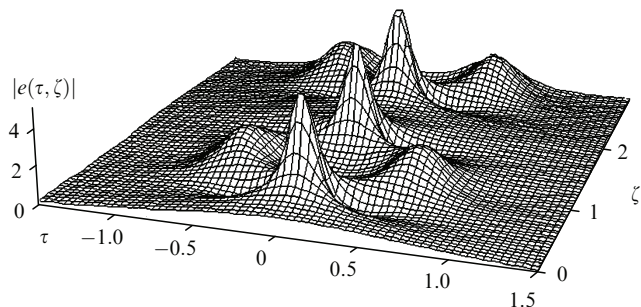


Рис.2. Импульс, отвечающий трехсолитонному решению НУШ (демонстрирует явления повторяемости (рекуррентности)).

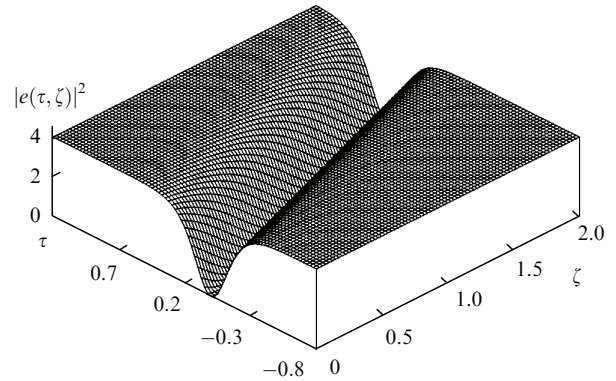


Рис.3. Темный солитон НУШ (выглядит как движущийся провал на фоне волны постоянной интенсивности).

Помимо многосолитонных решений, НУШ имеет также иной тип уединенного решения, названного многополюсным солитоном [24]. Это решение отвечает многократным точкам дискретного спектра спектральной задачи Захарова–Шабата в МОЗР. Практически его трудно реализовать, поскольку любое малое «шевеление» начального условия снимает вырождение точек дискретного спектра. Это означает, что только в исключительных случаях исходный оптический импульс может превратиться в многополюсный солитон. Различные свойства солитонов НУШ описаны в многочисленных статьях и обзорах, например в [25–28]. Также стоит указать на великолепные книги [29–34], авторы которых внесли существенный вклад в развитие теории солитонов.

1.3. Самоиндуцированная прозрачность

Явление самоиндуцированной прозрачности (СИП) состоит в прохождении достаточно мощного УКИ света в резонансной среде без искажения его формы и потерь энергии [35–37]. Ультракоротким импульсом здесь называют импульс, длительность которого много меньше времен релаксации поляризации и разности населенностей резонансных энергетических уровней. В этом случае взаимодействие света со средой заключается в вынужденном поглощении и испускании электромагнитного излучения резонансными атомами среды. Когда оба процесса идеально сбалансированы, состояние среды после прохождения УКИ совпадает с первоначальным ее состоянием, и в этом смысле среда прозрачна. Групповая скорость такого стационарного УКИ, называемого 2π -импульсом или солитоном СИП, меньше фазовой скорости света в среде и зависит от длительности импульса: чем короче импульс, тем больше скорость его распространения [35–38]. Когда импульсы, имеющие различные скорости, распространяются в среде в условиях СИП, один из них догоняет второй и, столкнувшись, проходит сквозь него. Форма и групповая скорость 2π -импульсов, как и положено солитонам, не изменяются. В зависимости от отношения длительностей t_{p1} и t_{p2} сталкивающихся 2π -импульсов картина их взаимодействия различна. Если $t_{p1}/t_{p2} < (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.382$, траектории импульсов пересекаются. В противном случае столкновение напоминает отталкивающее взаимодействие твердых шаров, которые во время столкновения обмениваются энергией, – амплитуды 2π -импульсов изменяются (рис.4). Само явление СИП и поведение солитонов СИП достаточно подробно описаны в [37–39].

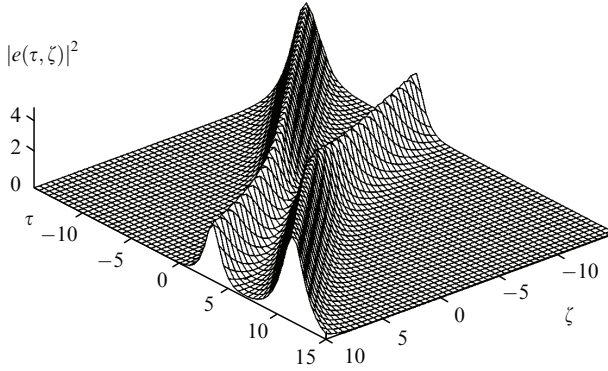


Рис.4. Столкновение двух солитонов СИП, приводящее к обмену энергией, при сохранении площади импульсов.

С математической точки зрения свойства 2π -импульсов СИП следуют из полной интегрируемости системы редуцированных уравнений Максвелла – Блоха (РМБ), описывающих СИП на основе модели двухуровневых атомов с невырожденными энергетическими уровнями, как было показано в [40, 41] и затем подробно изучено в ряде работ [42–46]; 2π -импульсы отвечают односолитонным решениям этих уравнений, а процесс столкновения отражает эволюцию двухсолитонного решения – оно асимптотически трансформируется в пару солитонов [42, 47, 48].

Простейшая теория явления СИП была развита МакКоллом и Ханом [35, 36]. В общем случае взаимодействие излучения с ансамблем двухуровневых атомов описывается уравнениями Блоха для атомов и уравнениями Максвелла для классического электромагнитного поля. В изотропном диэлектрике система уравнений Максвелла сводится к одному волновому уравнению для электрического поля $\mathbf{E} = E\mathbf{l}$. Для плоских волн с постоянным вектором поляризации \mathbf{l} можно записать следующую систему полных уравнений Максвелла – Блоха (МБ):

$$E_{,zz} - c^{-2}E_{,tt} = (4\pi n_a d/c^2)\langle r_{1,t} \rangle, \quad (4)$$

$$r_{1,t} = -\omega_a r_2, \quad r_{2,t} = \omega_a r_1 + (2d/\hbar)Er_3, \quad (5)$$

$$r_{3,t} = -(2d/\hbar)Er_2,$$

где d – проекция на направление вектора \mathbf{l} матричного элемента оператора дипольного перехода; n_a – концентрация резонансных атомов. Следует отметить, что компоненты вектора Блоха r_1 , r_2 , и r_3 зависят от частоты перехода ω_a . Угловые скобки в (4) обозначают усреднение по распределению этих частот.

В линейной однородной среде плоская электромагнитная волна может распространяться в одном из двух возможных направлений. Отраженная волна возникает из-за рассеяния на макроскопических неоднородностях, при прохождении границы раздела однородных сред или в среде с переменным показателем преломления. В нелинейных средах неоднородности показателя преломления могут индуцироваться самой волной. Поэтому применимость приближения однонаправленной волны всякий раз требует обоснования [49]. В [50, 51] было показано, что если концентрация атомов столь мала, что параметр $4\pi n_a d^2/\hbar\omega_a < 1$, то можно учитывать только волну, распространяющуюся в одном из направлений, и пренебрегать волной в противоположном на-

правлении. Было найдено, что для типичных значений параметров резонансной системы $d \sim 1 \text{ Д}$, $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и $n_a \ll 10^{23} \text{ см}^{-3}$ влиянием обратной волны можно пренебречь. В этом случае уравнения МБ сводятся к системе уравнений РМБ:

$$E_{,z} + c^{-1}E_{,t} = -(2\pi n_a d/c)\langle r_{1,t} \rangle, \quad (6)$$

$$r_{1,t} = -\omega_a r_2, \quad r_{2,t} = \omega_a r_1 + (2d/\hbar)Er_3, \quad (7)$$

$$r_{3,t} = -(2d/\hbar)Er_2.$$

Следует подчеркнуть, что как в уравнениях МБ, так и в уравнениях РМБ E – вещественное значение напряженности электрического поля электромагнитной волны. Никаких ограничений на длительность импульсов, за исключением того, что используются уравнения макроскопической электродинамики, не предполагалось.

Следующим шагом в построении приближенной теории резонансного взаимодействия электромагнитного излучения со средой является представление о квазигармонической волне. Оно означает, что электрическое поле волны, распространяющейся вдоль оси z , можно представить как поле гармонической волны \mathcal{E} , но с переменными амплитудой и фазой:

$$E(z, t) = 2A(z, t) \cos[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z, t)] \\ = \mathcal{E}(z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] + \text{компл. сопр.} \quad (8)$$

Здесь ω_0 – частота несущей (гармонической) волны; k_0 – соответствующее ей волновое число; вещественные огибающая (мгновенное значение амплитуды гармонической волны) $A(z, t)$ и фаза $\varphi(z, t)$ предполагаются медленно меняющимися в пространстве и времени функциями, такими, что

$$|A_{,t}| \ll \omega_0 |A|, \quad |A_{,z}| \ll k_0 |A|,$$

$$|\varphi_{,t}| \ll \omega_0 |\varphi|, \quad |\varphi_{,z}| \ll k_0 |\varphi|.$$

Кроме того, амплитуда УКИ обычно так мала, что мгновенная частота Раби ($(d/\hbar) \max A$) много меньше частоты резонансного перехода. В приближении медленно меняющихся вещественной огибающей импульса e и его фазы φ система (6), (7) заменяется следующей:

$$e_{,z} + c^{-1}e_{,t} = -\alpha' \langle p \rangle, \quad (9)$$

$$e(\varphi_{,z} + c^{-1}\varphi_{,t}) = -\alpha' \langle q \rangle, \quad (10)$$

$$q_{,t} = (\Delta\omega + \varphi_{,t})p, \quad p_{,t} = -(\Delta\omega + \varphi_{,t})q + er, \quad r_{,t} = -er, \quad (11)$$

где $\Delta\omega = (\omega_a - \omega_0)$ – отстройка от резонанса; $\alpha' = (2\pi \times n_a d^2/\hbar c)$; $e = (d/2\hbar)A$ – нормированная огибающая импульса; величины p , q и r связаны с исходными компонентами вектора Блоха соотношениями

$$r_1 = -p(z, t) \sin[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z, t)] + q(z, t) \\ \times \cos[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z, t)], \quad r_3 = -r(z, t).$$

Теория СИП МакКолла – Хана основана как раз на уравнениях (9)–(11). Но, кроме того, если ограничиться ситуацией, когда исходный импульс не имеет фазовой

модуляции и форма неоднородно уширенной линии задается симметричной функцией $\Delta\omega$, то из (9)–(11) следует, что фазовая модуляция и не возникает. В этом случае уравнения (9)–(11) редуцируются к системе уравнений СИП:

$$\begin{aligned} e_{,z} + c^{-1}e_{,t} &= -\alpha'(p), \quad q_{,t} = \Delta\omega p, \\ p_{,t} &= -\Delta\omega q + er, \quad r_{,t} = -ep. \end{aligned} \quad (12)$$

Когда линия поглощения уширена однородно, уравнения СИП при точном резонансе сводятся к хорошо известному уравнению \sin -Гордона

$$\phi_{,\xi\tau} + \sin \phi = 0, \quad (13)$$

где $\tau = (t - z/c)$, $\xi = \alpha'z$ и $\phi_{,\xi} = e$.

Замечательным свойством систем уравнений (6)–(7), (9)–(11), (12) и уравнения (13) является то, что все они могут быть представлены как условие интегрируемости пары линейных уравнений, что позволяет применить для их решения МОЗР. Если предположить, что до прихода УКИ все атомы находятся в основном состоянии и после прохождения УКИ они снова возвращаются в основное состояние, то все упомянутые уравнения можно дополнить краевыми условиями

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} r_3 = -1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} r_{1,2} = 0.$$

Уравнения как РМБ, так и СИП с такими краевыми условиями решаются с использованием МОЗР обычным образом [41, 42, 44–48]. В общем случае решение представляет собой N -солитонную волну и слабую, расплывающуюся из-за дисперсии волну. Односолитонное решение системы уравнений (12) дается выражением

$$e_s(z, t) = 2t_p^{-1} \operatorname{sech}[t_p^{-1}(t - z/v_s)],$$

где групповая скорость солитонов v_s связана с длительностью импульса t_p и длиной резонансного поглощения $l_a^{-1} = \alpha'$ соотношением

$$v_s^{-1} = c^{-1}(1 + ct_p^2 l_a^{-1}).$$

В общем случае N -солитонный УКИ по мере распространения превращается в L_1 изолированных солитонов и в L_2 бризеров (при этом должно выполняться условие $N = L_1 + 2L_2$). Бризер является устойчивой уединенной волной, как обычный солитон, но с внутренними осцилляциями амплитуды. В [39] было показано, что бризер уравнений РМБ, будучи вещественным локализованным в пространстве и времени импульсом с внутренними осцилляциями, напоминает 0π -импульс МакКолла и Хана. Если частота внутренних осцилляций растет, то огибающая бризера может быть описана солитонным решением уравнений СИП с большой точностью. Следовательно, 2π -импульс МакКолла и Хана является предельным случаем бризера, описываемого уравнениями РМБ.

1.4. Взаимодействие трех волн

Одним из хорошо изученных классов явлений нелинейной оптики является преобразование частот электромагнитного излучения в оптически нелинейных средах. Классическими примерами этих явлений служат генера-

ция гармоник основной волны (накачки), параметрическое сложение или вычитание частот, комбинационное рассеяние [52]. При достаточно высокой интенсивности накачки поляризация среды нелинейно зависит от напряженности электрического поля волны. Если частоты электромагнитной волны не находятся в резонансе с атомными переходами, то для получения этой зависимости можно использовать стандартную теорию возмущений. Это даст разложение поляризации \mathbf{P} в ряд по степеням напряженности электрического поля. Коэффициенты этого ряда, являющиеся в общем случае тензорами n -го ранга $\chi^{(n)}$, называются нелинейными восприимчивостями. Они описывают различные процессы нерезонансного взаимодействия электромагнитных волн в среде.

Рассматривается квадратично-нелинейная среда, характеризующаяся тензором $\chi^{(2)}$. Пусть в ней вдоль оси z распространяются две гармонические (или квазигармонические) волны с частотами ω_1 и ω_2 . Поскольку поляризация среды является квадратичной функцией напряженности электрического поля этих волн, в среде возникнут волны с несущими частотами $\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1$ и $2\omega_2$. Эти волны в свою очередь вызовут генерацию новых волн с частотами $2\omega_1 \pm \omega_2$, $\omega_1 \pm 2\omega_2$ и т. д. В средах с дисперсией все эти процессы не одинаково эффективны. Существует условие фазового синхронизма, благодаря которому при определенном типе взаимодействия трех волн их амплитуды изменяются значительно, тогда как все прочие взаимодействия остаются неэффективными. В некоторых случаях условие фазового синхронизма может иметь место для волн, распространяющихся в одном и том же направлении. В этом случае говорят о коллинеарном параметрическом взаимодействии. При этом расстояние, на котором волны эффективно взаимодействуют, можно сделать достаточно большим и, следовательно, получить высокий коэффициент преобразования частот. Если фазовый синхронизм достигается для волн, распространяющихся в различных направлениях, взаимодействие между ними происходит только в области перекрытия волновых пучков. Неколлинеарное параметрическое взаимодействие трех волн представляет собой интересный пример, когда соответствующая система уравнений оказывается вполне интегрируемой в двух- или трехмерном случае [53, 54]. Многомерные вполне интегрируемые системы, имеющие физическое содержание, являются исключительно редкими примерами в теории солитонов.

Пусть e_1 , e_2 и e_3 – медленно меняющиеся нормированные огибающие импульсов взаимодействующих волн с частотами несущих волн ω_1 , ω_2 и ω_3 и волновыми числами k_1 , k_2 и k_3 соответственно. Рассмотрим случай, когда генерируется только волна с суммарной или разностной частотой при ее коллинеарном распространении с волнами накачки и холостого хода. В приближении медленно меняющихся огибающих и фаз система уравнений, описывающая взаимодействие трех волн, может быть записана в следующей форме [55, 56]:

$$\begin{aligned} e_{1,z} + v_1^{-1}e_{1,t} &= i\sigma e_2^* e_3^* e^{i\Delta kz}, \\ e_{2,z} + v_2^{-1}e_{2,t} &= i\sigma e_3^* e_1^* e^{-i\Delta kz}, \\ e_{3,z} + v_3^{-1}e_{3,t} &= -i\sigma e_1^* e_2^* e^{-i\Delta kz}, \end{aligned} \quad (14)$$

где для $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$ поля e_1 , e_2 , e_3 – огибающие волн накачки, холостого хода и комплексно-

сопряженная огибающая сигнальной волны соответственно; для $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ и $\Delta k = k_3 + k_2 - k_3$ поля e_1, e_2, e_3 – огибающие сигнальной волны и комплексно-сопряженные огибающие волн холостого хода и накачки соответственно; σ – константа связи; $v_{1,2,3}$ – групповые скорости соответствующих волн. Дисперсия групповых скоростей не учитывается.

Резонансное комбинационное рассеяние (при слабом изменении населенности энергетических уровней атомов или молекул среды) и рассеяние оптических волн на звуковой волне можно рассмотреть как специальные случаи трехволнового взаимодействия. Для нормированной огибающей импульса падающей волны e_1 , огибающей рассеянной волны e_2 и огибающей акустической волны w в [57] использованы уравнения

$$\begin{aligned} ie_{1,\zeta} &= e_2 w e^{i\delta\zeta}, \\ ie_{2,\zeta} &= e_1 w^* e^{-i\delta\zeta}, \\ iw_{,\tau} &= -\epsilon w + e_1 e_2^* e^{-i\delta\zeta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где ϵ – нормированная частотная расстройка; δ – нормированная волновая расстройка. В условиях точного резонанса $\epsilon = 0$, и при выполнении условия фазового синхронизма $\delta = 0$. Предполагается, что групповые скорости падающей и рассеянной волн одинаковы. Можно показать, что при определенных условиях уравнение (15) переписывается в форме системы уравнений РМБ. Благодаря этому для исследования комбинационного (рамановского) рассеяния можно, как и в случае СИП, использовать МОЗР.

Уравнения (14), описывающие взаимодействия трех волн, обладают бесконечным числом законов сохранения и для них имеет место преобразование Бёклунда [55]. Было показано, что эти уравнения выдерживают тест Пенлеве, и существует класс их автомодельных решений, выражаемых через трансцендентные функции Пенлеве P-V и P-VI [58]. Из-за отсутствия дисперсии фазовых и групповых скоростей солитонная часть решения, описывающая взаимодействие трех волн, не отделяется от его несолитонной части, которую часто называют излучением. Это делает очень сложным процесс исследования трехволнового взаимодействия аналитическими методами и заставляет ограничиться рассмотрением только некоторых специальных случаев. Неколлинеарная ГВГ как раз и является примером такого случая, где можно найти частное точное решение без использования МОЗР. При этом полученное решение явно демонстрирует неразделимость солитонов и излучения (несолитонной части решения этих уравнений).

В [59] с помощью МОЗР исследовано вынужденное обратное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна в усиливающей среде для двух первоначально прямоугольных импульсов. ВКР и ВРМБ в квазистационарном режиме рассматривались в [60] как трехволновое взаимодействие, что позволило использовать МОЗР со спектральной задачей Захарова–Шабата.

Для достижения фазового синхронизма часто используются анизотропные кристаллы, позволяющие подобрать в них такое направление, в котором обыкновенная и необыкновенная волны будут иметь равные фазовые скорости. Другой способ достижения синхронизма – подбор угла, под которым пересекаются пучки взаимодей-

ствующих волн, такого, чтобы выполнялось векторное равенство $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Система уравнений, описывающих неколлинеарную ГВГ (в нормализованной форме), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_z e_{1,z} + \eta_x e_{1,x} + v_1^{-1} e_{1,t} &= i\sigma e_2^* e_3, \\ \eta_z e_{2,z} - \eta_x e_{2,x} + v_1^{-1} e_{2,t} &= i\sigma e_1^* e_3, \\ e_{3,z} + v_3^{-1} e_{3,t} &= 2i\sigma e_1 e_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\eta_z = k_{1z}/k_1 = k_{2z}/k_2$; $\eta_x = k_{1x}/k_1 = -k_{2x}/k_2$ – направляющие косинусы пучков волны накачки; e_1, e_2 – нормированные электрические поля пучков накачки, пересекающиеся под углом $2\theta_m$; e_3 – нормированное электрическое поле второй гармоники. Условие синхронизма выполняется, если угол θ_m подобран таким, чтобы для показателей преломления на различных частотах выполнялось условие $n(2\omega) = n(\omega) \cos \theta_m$. Это условие реализуемо только в области аномальной дисперсии, когда $n(2\omega) < n(\omega)$.

1.5. Причины поиска новых, вполне интегрируемых систем

С появлением такого мощного инструмента исследования нелинейных задач, каким является МОЗР, стали возникать новые модели и теории, основанные на вполне интегрируемых уравнениях и описывающие явления в нелинейной оптике. Причем наряду с развитием уже известных теорий были рассмотрены новые задачи и развиты новые способы описания распространения оптических волн в нелинейных средах.

Внутри оптических импульсов наносекундного и пикосекундного диапазонов содержится очень много ($10^6 - 10^3$) колебаний электромагнитного поля. Для описания эволюции такого типа сигналов достаточно рассматривать только огибающую импульса и его фазу. При многоволновом взаимодействии рассматривались импульсы с хорошо разделенными частотами несущих волн. В этом случае представление о электромагнитных сигналах как о квазигармонических волнах вполне приемлемо. Переход в фемтосекундный (10^{-15} с), аттосекундный (10^{-18} с) и зептосекундный (10^{-21} с) диапазоны длительностей делает невозможным приближение квазигармонических волн (или приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз). Упомянутое ранее НУШ неприменимо, и его обобщение приводит к ряду модельных уравнений, среди которых есть вполне интегрируемые.

Если оптический квазигармонический импульс характеризуется определенной частотой несущей волны, можно в резонансных средах ограничиться рассмотрением только тех двух энергетических состояний, переход между которыми происходит под действием импульса, – это модель двухуровневого атома. Большое число частот несущих волн и большее число уровней резонансной среды, участвующих в отклике на такой многочастотный импульс, требуют обобщения двухуровневой модели. Среди обобщений имеются такие, которые основаны на системах вполне интегрируемых уравнений, и в этих случаях солитоны возможны.

Электромагнитное поле – векторное, поэтому может оказаться необходимым обобщение скалярных моделей, рассмотренных выше. В этом направлении удалось най-

ти несколько примеров возникновения векторных (двух- или трехкомпонентных) солитонов.

1.6. Немного о методе обратной задачи рассеяния

Среди гамильтоновых систем существуют такие, в которых можно найти канонические преобразования, переводящие их уравнения движения в уравнения, описывающие ансамбль невзаимодействующих гармонических осцилляторов. После такой замены переменных соответствующие им уравнения движения тривиально интегрируются. Говорят, что гамильтонова система в этом случае допускает переменные типа угол–действие, а сама она называется вполне интегрируемой. С 1967 г. после серии работ Гарднера, Грина, Крускала и Миуры появилось мощное средство исследования вполне интегрируемых систем – МОЗР. В последующие годы МОЗР был развит В.Е.Захаровым, Л.Д.Фаддеевым, А.Б.Шабатом и С.В.Мамаковым, а также Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сегуром (АКНС).

Суть МОЗР в следующем. Пусть $\hat{L} = \hat{L}(\partial_x, q)$ и $\hat{A} = \hat{A}(\partial_x, q)$ – два линейных оператора, где $q(x, t)$ – потенциал – либо скалярная, либо векторная, либо матричная функция переменных x и t . Условия совместности пары уравнений

$$\hat{L}\psi = 0, \quad \hat{T}\psi = (\partial_t - \hat{A})\psi = 0 \tag{17}$$

означает, что операторы \hat{L} и \hat{T} коммутируют, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{L} = [\hat{L}, \hat{A}]. \tag{18}$$

Это операторное уравнение является дифференциальным уравнением (системой уравнений) относительно потенциала (потенциалов) $q(x, t)$. Говорят, что для этого уравнения выражение (18) является представлением Лакса, или представлением нулевой кривизны, а операторы \hat{L} и \hat{A} называют парой Лакса. Часто оператор \hat{L} выбирается в форме $\hat{L} = (\partial_x - \hat{U})$.

Если для конкретного нелинейного эволюционного уравнения удастся найти представление Лакса, то его решение можно получить, действуя по следующему алгоритму. В качестве прямой спектральной задачи берется задача рассеяния, или задача на собственные значения

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi, \quad \partial\lambda/\partial t = 0$$

плюс условия поведения $q(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Решение этой задачи дает собственные значения $\{\lambda_j\}$, собственные функции $\{\psi_j\}$ и матрицу рассеяния. Множество этих величин есть данные рассеяния $C(0)$ при $q(x, 0) = q_0(x)$. Согласно второму уравнению из (17) данные рассеяния $C(t)$ можно определить при всех значениях $t > 0$. Восстановление потенциала $q(x, t)$ по данным рассеяния $C(t)$, т. е. решение обратной спектральной задачи, приводит к решению исходного нелинейного уравнения, для которого (18) есть представление Лакса.

Заметим, что переход от уравнения $\hat{L}\psi = 0$ к уравнению $\hat{L}\psi = \lambda\psi$ сохраняет представление Лакса (18). Поскольку здесь предполагалось, что изменение (деформация) потенциала $q(x, t)$ с течением времени t не меняет спектр оператора \hat{L} , само нелинейное уравнение для $q(x, t)$ называют уравнением изоспектральной деформации.

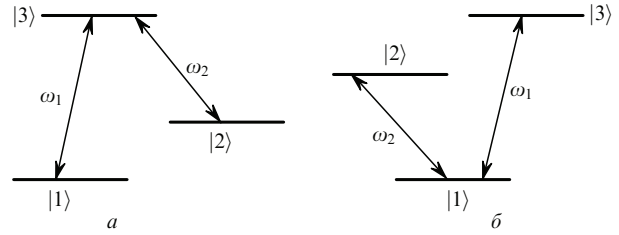


Рис.5. Конфигурации энергетических уровней трехуровневого атома – $\Lambda(a)$ и $V(b)$.

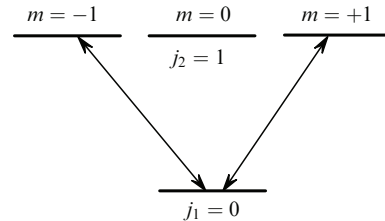


Рис.6. Резонансные переходы между состояниями двухуровневого атома с $j_1 = 0$ и $j_2 = 1$.

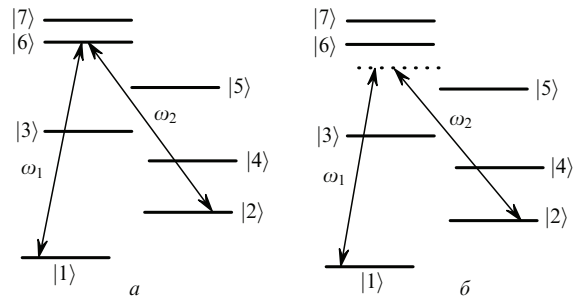


Рис.7. Двойной (a) и двухфотонный (б) резонансы.

Для многих нелинейных уравнений, имеющих представление Лакса, разработан способ построения переменных типа угол–действие. По этой причине их можно считать вполне интегрируемыми.

2. За пределами модели двухуровневых атомов

Развитие теории СИП связано с выходом за пределы модели двухуровневых атомов и с рассмотрением многочастотных УКИ. Исследовалось взаимодействие многоуровневых резонансных сред с излучением, характеризующимся несколькими частотами несущих волн. Кроме того, учитывались прямое взаимодействие между резонансными атомами, нелинейные свойства диэлектрика, в который погружены резонансные атомы, и поляризация (т. е. векторный характер) самого излучения. На рис.5 показаны две конфигурации энергетических уровней трехуровневых атомов, которые представляют ставшую в последнее время очень популярной модель для резонансной когерентной оптики. На рис.6 представлены переходы между вырожденными по проекциям углового момента состояниями двухуровневого атома, когда важно учитывать векторный характер электромагнитного излучения УКИ. Различие между двойным и двухфотонным резонансами иллюстрирует рис.7.

2.1. Двойной резонанс

Пусть оптический импульс распространяется вдоль оси z , и напряженность его электрического поля

$$E(z, t) = A(z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] + \text{компл. сопр.} \quad (19)$$

Несущая частота ω_0 близка к частоте ω_{21} перехода $j_2 \leftrightarrow j_1$ между энергетическими уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, вырожденными по проекциям m_1 и m_2 полных угловых моментов j_1 и j_2 . В общем случае эволюция огибающей УКИ и состояния резонансной среды описываются системой уравнений, для которой точное решение в случае произвольных значений j_1 и j_2 не известно. Но для переходов $j_2 = 0 \leftrightarrow j_1 = 1, j_2 = 1 \leftrightarrow j_1 = 1$ и $j_2 = 1/2 \leftrightarrow j_1 = 1/2$ соответствующие системы обобщенных уравнений ОРМБ (ОРМБ) являются вполне интегрируемыми. Как показано в [61–63], их солитонные решения могут быть получены с привлечением МОЗР. Для переходов $j_2 = 0 \leftrightarrow j_1 = 1$ и $j_2 = 1 \leftrightarrow j_1 = 1$ уравнения ОРМБ могут быть записаны в унифицированной форме:

$$\begin{aligned} e_{,\zeta} &= -i \sum_{a=1,2} \beta_a \langle p^{(a)} \rangle, \\ p_{,\tau}^{(a)} &= i \delta p^{(a)} - i e \cdot \hat{m}^{(a)} + i e n^{(a)}, \\ \hat{m}_{,\tau}^{(a)} &= -i (e^* \otimes p^{(a)} - p^{(a)*} \otimes e), \\ n_{,\tau}^{(a)} &= -i (p^{(a)*} \cdot e - e^* \cdot p^{(a)}), \end{aligned} \quad (20)$$

где символ \otimes обозначает тензорное умножение, т.е. $(a \otimes b)_{ik} = a_i b_k$, а безразмерные переменные $\tau = (t - z/c)$ и $\zeta = \alpha' z$.

Если рассматривать переход $j_1 = 0 \rightarrow j_2 = 1$, то в (20) надо считать, что вектор e определяется компонентами $e_j = dt_{p_0} \hbar^{-1} A_j$, $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$. Для перехода $j_1 = 1 \rightarrow j_2 = 0$ в (20) $e_j = dt_{p_0} \hbar^{-1} A_j$, $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$. Наконец, для перехода $j_1 = 1 \rightarrow j_2 = 1$ имеем $e_j = dt_{p_0} (\sqrt{2} \hbar)^{-1} A_j$ и $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. Здесь и далее нижние индексы принимают значения $j = \pm 1$, $\delta = \Delta \omega t_{p_0}$ – нормированная отстройка от резонанса, а верхний индекс равен 1, 2. Скаляры $n^{(a)}$, векторы $p^{(a)}$ и матрицы $\hat{m}^{(a)}$ выражаются через медленно меняющиеся огибающие элементов матрицы плотности $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} p_j^{(1)} &= \langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_1, j \rangle, \quad p_j^{(2)} = \langle j_2, -j | \hat{\rho} | j_1, 0 \rangle, \\ n^{(1)} &= \langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle, \quad n^{(2)} = -\langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_1, 0 \rangle, \\ m_{ji}^{(1)} &= \langle j_1, j | \hat{\rho} | j_1, l \rangle, \quad m_{ji}^{(2)} = \langle j_2, -j | \hat{\rho} | j_2, -l \rangle. \end{aligned}$$

Уравнения ОРМБ (20) служат условием разрешимости пары линейных уравнений метода обратной задачи рассеяния для иерархии уравнений АКСС большей размерности. Спектральная задача такого сорта в МОЗР впервые была предложена и изучена Манаковым [15] при описании самофокусировки поляризованного светового пучка.

Если ввести единичный вектор I , определяющий поляризацию УКИ, то односолитонному решению системы уравнений (20) будет отвечать электромагнитный импульс с огибающей в виде

$$e_s(\tau, \zeta) = -i 2\eta I \operatorname{sech}[2\eta(\tau - \tau_0) - b\zeta] \exp(-2\alpha\tau + i\kappa\zeta),$$

где $\eta, \zeta, \alpha, \kappa, b = b(\eta)$ – параметры, определяемые из начальных условий, как и вектор поляризации. Этот УКИ можно назвать поляризованным 2π -импульсом.

Пусть два поляризованных 2π -импульса, различающиеся длительностями ($1/2\eta_1$ и $1/2\eta_2$) и векторами поляризации (I_1 и I_2), входят в резонансную среду в точке $\zeta = 0$ друг за другом с интервалом $\tau_2 - \tau_1$:

$$e_s(\tau, 0) = -i 2\eta_1 I_1 \operatorname{sech}[2\eta_1(\tau - \tau_1)] - i 2\eta_2 I_2 \operatorname{sech}[2\eta_2(\tau - \tau_2)].$$

Для простоты выбраны солитоны с $\alpha = \kappa = 0$. На оси нормированного времени τ первый солитон расположен левее второго, и предполагается, что $\tau_2 - \tau_1 \gg 1/2\eta_1, 1/2\eta_2$, так что они не взаимодействуют. Если $\eta_2 > \eta_1$, то скорость второго солитона выше скорости первого, и через некоторое время они столкнутся, а затем вновь разойдутся, так что при $\zeta \rightarrow \infty$ второй импульс окажется на оси τ левее первого (медленного) импульса. Огибающая двухсолитонного импульса примет следующий вид:

$$\begin{aligned} e_s(\tau, \zeta) &= -i 2\eta_1 I_1' \operatorname{sech}[2\eta_1(\tau - \tau_1') - b_1 \zeta] \\ &\quad - i 2\eta_2 I_2' \operatorname{sech}[2\eta_2(\tau - \tau_2') - b_2 \zeta]. \end{aligned}$$

Возможный фазовый сдвиг включен в изменение векторов поляризации. Правила изменения векторов I_1 и I_2 даются следующими выражениями:

$$I_1' = \epsilon \left[-I_1 + \frac{2\eta_2(I_1 \cdot I_2^*)}{\eta_2 - \eta_1} I_2 \right], \quad I_2' = \epsilon \left[-I_2 + \frac{2\eta_1(I_2 \cdot I_1^*)}{\eta_2 - \eta_1} I_1 \right], \quad (21)$$

где

$$\epsilon = \left[1 + \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)^2} |I_2 \cdot I_1^*|^2 \right]^{-1/2}; \quad (I_1 \cdot I_2^*) = (I_1' \cdot I_2').$$

Формулы показывают, что если солитоны линейно поляризованы до столкновения, то они останутся линейно поляризованными и после него. Но если векторы поляризации первоначальных солитонов таковы, что $(I_1 \cdot I_2) = \cos \theta$, то столкновение приведет к повороту векторов поляризации на углы θ_1 и θ_2 , определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I_1' \cdot I_1 &= \cos \theta_1 = -\frac{1 + B_{12} \cos^2 \theta}{(1 - B_{12} B_{21} \cos^2 \theta)^{1/2}}, \\ I_2' \cdot I_2 &= \cos \theta_2 = -\frac{1 + B_{21} \cos^2 \theta}{(1 - B_{12} B_{21} \cos^2 \theta)^{1/2}}, \end{aligned}$$

где

$$B_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 - \eta_2}; \quad B_{21} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Выражения для N -солитонов, бризеров и преобразование Бёклунда были найдены в работе [64]. В [65, 66] уравнения (20) анализировались с точки зрения их решения с помощью задачи Римана. Были получены солитонные решения и отмечено, что односолитонные решения не всегда описываются обычным sech -импульсом. Показано, что есть солитоны, движущиеся с переменной скоростью и с осциллирующими амплитудами.

Существуют несколько версий уравнений ОРМБ, описывающих распространение УКИ в многоуровневых

средах. Простейшим случаем являются модели атомов с тремя резонансными энергетическими уровнями, называемыми V- и Λ- конфигурациями (рис.4). Было найдено [67, 68], что если силы осцилляторов для каждого перехода в V- или Λ- конфигурации энергетических уровней равны, то может существовать двухчастотный импульс (характеризуется двумя несущими волнами с различной частотой), распространяющийся в среде без искажения формы огибающей. УКИ такого сорта был назван симултоном [69]. Симултаны являются односолитонными решениями уравнений ОРМБ (20). Многосолитонные решения отвечают сталкивающимся симултонам. Симултаны с внутренними осцилляциями (как бы цветные бризеры) являются двухчастотным обобщением 0π-импульсов МакКолла–Хана. Здесь следует отметить, что симултон в общем случае неустойчив по отношению к превращению в один одночастотный 2π-импульс и может оставаться двухчастотным импульсом только в том случае, если среда приготовлена в специальном состоянии, т.е. если резонансные уровни заселены определенным образом [70].

Теория распространения двухчастотного УКИ поляризованного излучения в трехуровневой среде приводит к матричному варианту системы ОРМБ. Для решения этой системы уравнений было получено обобщение МОЗР на случай матричной спектральной задачи Захарова–Шабата–АКНС (или матричной спектральной задачи Манакова). Подробно этот случай рассмотрен в [71–73].

Когерентное распространение трехчастотного УКИ в трехуровневой среде, когда каждая гармоническая компонента УКИ находится в резонансе с соответствующим переходом и, кроме того, среда обладает квадратичной нелинейностью, рассмотрено в [74]. Электрическое поле представлено как когерентная суперпозиция трех полей,

$$E(z, t) = \sum_{j,k=1(j \neq k)}^3 [E_{jk} \exp(-i\omega_{jk}t + ik_{jk}z) + \text{компл. сопр.}],$$

где частоты ω_{jk} близки к частотам переходов между j -м и k -м состояниями трехуровневых атомов. Укороченные уравнения Максвелла записаны в виде

$$(E_{jk,t} + v_{jk}E_{jk,z}) = ia_{jk}Q_{jk} + ib_{jk}E_{jm}E_{nk}, \quad (22)$$

где v_{jk} – групповая скорость для волны с огибающей E_{jk} ;

$$a_{jk} = \frac{4\pi n_a \omega_{jk} d_{jk}}{n^2(\omega_{jk})}; \quad b_{jk} = \frac{2\pi \omega_{jk} \chi^{(2)}}{n^2(\omega_{jk})};$$

d_{jk} – матричный элемент оператора дипольного перехода между j -м и k -м состояниями; $\chi^{(2)}$ – нелинейная восприимчивость второго порядка; $n(\omega_{jk})$ – показатель преломления на частоте ω_{jk} . Элементы матрицы плотности Q_{jk} удовлетворяют уравнениям Неймана

$$2Q_{jk,t} = -i\delta_{jk}Q_{jk} + ig_{jk}(Q_{kk} - Q_{jj})E_{jk} + i(g_{jm}E_{jm}Q_{nk} - Q_{jm}g_{nk}E_{nk}), \quad (23)$$

$$Q_{kk,t} = \text{Im}(g_{kj}E_{kj}Q_{jk} + \text{компл. сопр.}),$$

где $g_{jk} = (2a_{jk}/d_{jk})^{1/2}$.

Рассмотрены случаи, когда все три перехода разрешены и когда один из переходов запрещен в дипольном приближении (напр., $d_{23} = 0$). В обоих случаях для уравнений (22) и (23) получено представление Лакса, позволяющее использовать МОЗР для нахождения солитонных решений.

2.2. СИП при двухфотонном резонансе

В поле мощных оптических импульсов могут развиваться многофотонные процессы. Самая простая ситуация возникает при взаимодействии резонансной среды с парой УКИ, имеющих различные частоты несущих волн ω_1 и ω_2 , такие, что $\omega_1 \pm \omega_2$ совпадает с частотой резонансного перехода ω_{21} . Такой случай называется невырожденным двухфотонным резонансом, в отличие от вырожденного резонанса, когда $\omega_1 = \omega_2$. Соответствующими нелинейными процессами являются двухфотонное поглощение (ДФП, $\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_{21}$) и комбинационное рассеяние (КР, $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_{21}$) взаимодействующих волн. Если длительность импульсов много меньше времен релаксации поляризации и разности населенностей, то возможно их когерентное распространение. Этот подобный СИП процесс, названный двухфотонной самоиндуцированной прозрачностью, описывается на основе уравнений ОРМБ [75–77].

2.1.1. Невырожденный двухфотонный резонанс

Используя нормированные переменные, можно записать систему уравнений (подробности см. в [74]) в следующем виде:

для комбинационного рассеяния

$$\begin{aligned} ie_{1,\zeta} &= -k_{S1}(n - n_0)e_1 - (1/2)\langle p \rangle e_2, \\ ie_{2,\zeta} &= -k_{S2}(n - n_0)e_2 - (1/2)\langle p^* \rangle e_1, \end{aligned} \quad (24)$$

$$p_{,\tau} = i(\delta + \delta_S)p + ine_1e_2^*,$$

$$n_{,\tau} = (i/2)(pe_1^*e_2 - p^*e_1e_2^*);$$

для двухфотонного поглощения

$$\begin{aligned} ie_{1,\zeta} &= -k_{S1}(n - n_0)e_1 - (1/2)\langle p \rangle e_2^*, \\ ie_{2,\zeta} &= -k_{S2}(n - n_0)e_2 - (1/2)\langle p \rangle e_1^*, \end{aligned} \quad (25)$$

$$p_{,\tau} = i(\delta + \delta_S)p + ine_1e_2,$$

$$n_{,\tau} = (i/2)(pe_1^*e_2^* - p^*e_1e_2).$$

Здесь $\delta_S = 2k_{S1}|e_1|^2 + 2k_{S2}|e_2|^2$ учитывает сдвиг частоты перехода из-за высокочастотного эффекта Штарка; p – медленно меняющаяся поляризация; n – разность населенностей резонансных уровней; n_0 – ее равновесное значение. Эти уравнения оказалось удобно переписать в новых переменных, которые являются квадратичными функциями нормированных огибающих УКИ $e_{1,2}$:

$$S_0 = (|e_1|^2 + m|e_2|^2), \quad S_3 = (|e_1|^2 - m|e_2|^2),$$

$$p = R = R_1 + iR_2, \quad n = R_3,$$

$$S = S_1 + iS_2 = (1 - m)e_1e_2 + (1 + m)e_1e_2^*,$$

где $m = 1$ для КР и $m = -1$ для ДФП. В этих переменных обе системы могут быть записаны в единой форме:

$$R_{,\tau} = i[\delta + b^{(+)}S_0 + b^{(-)}S_3]R + iR_3S, \quad (26)$$

$$R_{3,\tau} = (i/2)(RS^* - R^*S),$$

$$S_{,\zeta} = ib^{(-)}\langle R_3 \rangle S - im\langle R \rangle S_3, \quad (27)$$

$$S_{3,\zeta} = (i/2)(\langle R \rangle S^* - \langle R^* \rangle S), \quad S_{0,\zeta} = 0,$$

где $b^{(\pm)} = k_{S1} \pm mk_{S2}$.

Заметим, что отсюда следует закон сохранения «модуля вектора энергетического спина» $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$:

$$(S_1^2 + S_2^2 + mS_3^2)_{,\zeta} = 0,$$

т. е. $S_1^2 + S_2^2 + mS_3^2 = S^2(\tau)$.

В [78, 79] были введены новые переменные:

$$r = R^*e^{i\Phi(\tau)}, \quad s = S^{-1}S^*e^{i\Phi(\tau)}, \quad r_3 = R_3, s_3 = S^{-1}S_3,$$

$$\eta = \int_0^\tau S(\tau_1)d\tau_1, \quad \Phi(\tau) = b^{(+)} \int_0^\tau S_0(\tau_1)d\tau_1.$$

В этих переменных система уравнений (26) и (27) принимает следующий вид:

$$s_{,\zeta} = imrs_3 + i\tilde{g}r_3s, \quad s_{3,\zeta} = \frac{i}{2}(r^*s - rs^*), \quad (28)$$

$$r_{,\eta} = i\tilde{g}rs_3 + ir_3s, \quad r_{3,\eta} = \frac{i}{2}(rs^* - r^*s),$$

где $\tilde{g} = b^{(-)}$. Законы сохранения модуля «векторов спина» $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ и $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ записываются как

$$m(s_1^2 + s_2^2) + s_3^2 = 1, \quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1.$$

Как было показано Каупом и Штойделем [78, 79], полученная таким образом унифицированная система уравнений (28) может быть решена с помощью МОЗР, если все атомы тождественны. Преобразование Бёклунда, позволяющее получать солитонные решения произвольной кратности из односолитонных решений уравнений (28), дано в [80].

С использованием модели Каупа–Штойделя в [81] с помощью МОЗР исследовано распространение УКИ в условиях комбинационного резонанса. Рассмотрен предел, когда КР инициируется флуктуациями поляризации стока импульса малой площади. Учитываются флуктуации накачки. На основе найденного автомодельного решения объясняется сжатие флуктуаций стока поля в сильно нелинейной стадии КР.

Теория рождения солитонов на фронте длинного импульса накачки при вынужденном КР развита в [82]. Исходной точкой является модель Каупа–Штойделя, и для формулировки формализма Узизема и получения с его помощью периодических решений используется МОЗР.

2.2.2. Вырожденный двухфотонный резонанс

В этом случае при резонансном переходе между состояниями двухуровневого атома поглощаются два фотона одной волны. Нормированные уравнения РМБ имеют вид

$$e_{,\zeta} = \frac{i}{2}(re^* - gr_3e),$$

$$ir_{,\tau} = 2(r_3e^2 + ge^*e^*r), \quad (29)$$

$$r_{3,\tau} = i(r^*e^2 - re^{*2}),$$

где g – коэффициент, пропорциональный отношению нелинейной восприимчивости, отвечающей за штарковский сдвиг, к восприимчивости, отвечающей за двухфотонное поглощение. В предположении, что разность населенностей резонансных состояний меняется незначительно, т. е. $r_3 \approx -1 + |r|^2/2$, эти уравнения могут быть сведены к уравнениям, описывающим ГВГ [83], в которых, однако, роль волны накачки играет поле e , а в качестве гармоники выступает поляризация r . Хотя уравнения ГВГ

$$e_{1,\zeta} = -2e_2e_1^*, \quad e_{2,\tau} = e_1^2$$

имеют представление Лакса и МОЗР позволяет найти их решения, солитонов эти уравнения не имеют.

2.3. Когерентное четырехволновое смещение волн

Распространение навстречу друг другу двух пар волн в кубически-нелинейной среде, когда сумма (или разность) несущих частот близка к собственной частоте перехода в среде, было рассмотрено в [84, 85]. Если полное поле представить как суперпозицию полей четырех волн

$$E(z, t) = \sum_{j=1}^2 [A_j \exp(-i\omega_j t + ik_1 j z) + B_j \exp(-i\omega_{2j} t + ik_2 j z) + \text{компл. сопр.}],$$

то укороченные уравнения Максвелла записываются как

$$\begin{aligned} (A_{1,z} + v_1^{-1}A_{1,z}) &= ia_{11}A_1|B_1|^2 + ia_{12}A_2(B_1B_2^*)e^{i\delta}, \\ (A_{2,z} + v_2^{-1}A_{2,z}) &= ib_{11}A_2|B_2|^2 + ib_{12}A_1(B_2B_1^*)e^{-i\delta}, \\ (B_{1,z} + u_1^{-1}B_{1,z}) &= ia_{22}B_1|A_1|^2 + ia_{21}B_2(A_1A_2^*)e^{-i\delta}, \\ (B_{2,z} + u_2^{-1}B_{2,z}) &= ib_{22}B_2|A_2|^2 + ib_{21}B_1(A_2A_1^*)e^{i\delta}, \end{aligned} \quad (30)$$

где v_1, v_2, u_1, u_2 – групповые скорости; a_{jk} и b_{jk} – константы связи; $\delta = (k_{12} - k_{11} + k_{21} - k_{22})z$ – фазовая (волновая) расстройка. Исследованы случаи точного синхронизма ($\delta = 0$) и следующие соотношения для групповых скоростей: $v_1 = v_2 = -u_1 = -u_2$, $v_1 = -v_2 = u_2 = -u_1$. Для этой системы уравнений найдено представление Лакса и разлит МОЗР. Построены солитонные и квазиавтомодельные решения, описывающие распад исходного неустойчивого состояния. С использованием МОЗР в [86] найдено однозонное решение, которое представляет собой периодическую волну*. Выведено уравнение Узизема для медленных огибающих.

Четырехволновое взаимодействие волн, идущих навстречу друг другу в условиях двухфотонного резонанса,

*Солитоны эволюционируют из начальных условий в виде уединенной волны. Если начальным условием является периодическая протяженная волна, то вместо N солитонов возникнут N -зонные решения, соответствующие обобщению кноидальных волн. Дискретный спектр МОЗР (см. п. 1.6) превращается в набор разрешенных зон, давших название периодическим решениям.

рассмотрено в [87]. С использованием ранее развитого для этой задачи МОЗР найдены периодические (однозонные) решения, которые являются периодическими аналогами солитонов и обладают свойствами солитонов.

2.4. СИП в нелинейной среде керровского типа

Усиления нелинейных свойств оптических волокон можно достичь путем введения в них резонансных примесей. В конце прошлого века большое внимание уделялось исследованию волокон, легированных ионами эрбия. Такие волокна оказались подходящими для создания волоконных усилителей. Внимание исследователей привлекали также когерентные явления (фотонное эхо, СИП) в этих «одномерных» средах.

Известно, что НУШ, которое используется для описания оптических солитонов в волокнах, является вполне интегрируемым [11, 23], как и уравнения РМВ, описывающие когерентный режим распространения в резонансной среде. Решение НУШ и уравнений РМВ опирается на одну и ту же спектральную задачу МОЗР. Система уравнений, которая описывает когерентное распространение в волокне с резонансными примесями, объединяет в себе обе указанные системы уравнений, что указывает на возможность ее полной интегрируемости при определенных условиях.

Эволюция УКИ, распространяющегося в нелинейном одноимодовом волокне с резонансными примесями, описывается следующей системой уравнений [88–91]:

$$\begin{aligned} i e_{,\zeta} + s e_{,\tau\tau} + \mu |e|^2 e + \kappa \langle p \rangle &= 0, \\ p_{,\tau} = i \delta p + 2 i f e r, \quad r_{,\tau} = i f (e^* p - e p^*), \end{aligned} \quad (31)$$

где e определено как медленно меняющаяся комплексная огибающая УКИ (см. п. 1.2). Взаимодействие излучения с резонансными примесями характеризуется безразмерной константой $f \sim dA_0$, где d – эффективный матричный элемент оператора дипольного момента перехода между резонансными уровнями. Коэффициент κ выражается через длину дисперсии L_d и длину резонансного поглощения L_a [30, 73]: $\kappa = L_d(L_a f)^{-1}$.

Распространение УКИ поляризованного излучения в волокне с нелинейностью керровского типа, когда резонансные уровни примесей вырождены по ориентации полных угловых моментов j_1 и j_2 , в некоторых случаях описывается вполне интегрируемыми уравнениями. Для напряженности электрического поля УКИ в квазигармоническом приближении следует записать:

$$\begin{aligned} E_j(t, x, y, z) = A_0 e_j(t, z) \Psi(x, y) \exp(-i\omega_0 t + i\beta_0 z) \\ + A_0 e_j^*(t, z) \Psi^*(x, y) \exp(i\omega_0 t - i\beta_0 z). \end{aligned}$$

Как и в (20), индекс $j = \pm 1$, поэтому можно говорить о векторном оптическом солитоне. Та же система уравнений возникает, если нелинейное волокно содержит трехуровневые примеси, а УКИ характеризуется двумя частотами несущей волны: $\omega_0 \rightarrow \omega_{1,2}$ и $\Psi(x, y) \rightarrow \Psi(\omega_{1,2}; x, y)$.

В [92, 93] было теоретически исследовано распространение поляризованных УКИ в керровской среде с резонансными примесями. Помимо двухуровневой системы, рассмотрены случаи, когда энергетические состояния

двухуровневых примесей могут быть вырождены. Интегрируемыми системами уравнений оказались только те, которые описывают переходы $j_1 = 0 \leftrightarrow j_2 = 1$ и $j_1 = 1 \rightarrow j_2 = 1$.

Уравнения для нормированных огибающих $e = (e_1, e_2)$ и переменных, определяющих состояние резонансных примесей, можно записать в унифицированной форме:

$$\begin{aligned} i e_{,\zeta} + s e_{,\tau\tau} + \hat{\mu}(e \cdot e^*)e &= \kappa \sum_{a=1,2} \beta_a \langle p^{(a)} \rangle, \\ p_{,\tau}^{(a)} = i \delta p^{(a)} - i f (e \cdot \hat{m}^{(a)} - e n^{(a)}), \\ \hat{m}_{,\tau}^{(a)} = -i f (e^* \otimes p^{(a)} - p^{(a)*} \otimes e), \\ n_{,\tau}^{(a)} = -i f (p^{(a)*} \cdot e - e^* \cdot p^{(a)}). \end{aligned} \quad (32)$$

Переменные, входящие в уравнения Блоха в (32), были определены ранее (см. п. 2.1).

В [72, 92] было найдено, что как система уравнений (31), так и система (32) являются вполне интегрируемыми, но только при условии, что $L_d L_a^{-1} = 2f^2$. Это условие означает, что солитон СИП должен быть также и солитоном НУШ. Иначе говоря, амплитуда и длительность 2π -импульса должны быть такими, чтобы происходила точная компенсация дисперсионного уширения УКИ его сжатием из-за фазовой автомодуляции. Условие сосуществования солитонов СИП и НУШ подробно обсуждалось в [94] и затем экспериментально изучалось в волокне, легированном ионами Er^{3+} [95]. При комнатной температуре время релаксации поляризации T_2 составляет ~ 0.1 пс, величина дипольного момента резонансного (на длине волны 1.53 мкм) перехода $|d_{12}| = 4.7 \times 10^{-3}$ Д. Чтобы солитон СИП и солитон НУШ имели примерно одинаковую мощность, было использовано волокно с почти нулевой дисперсией групповых скоростей второго порядка. При охлаждении волокна до 4.2 К (в этом случае $T_2 \approx 10$ нс) наблюдались устойчивые 2π - и 4π -импульсы (солитоны СИП).

Другие примеры вполне интегрируемой модели, описывающей распространение УКИ в волокне с примесями, были представлены в [96–98]. Вместо НУШ использовалось уравнение типа уравнения Хироты с целью учета дисперсии групповых скоростей третьего порядка, самообострения фронта и самоиндуцированного комбинационного рассеяния:

$$\begin{aligned} i e_{,\zeta} + (1/2) e_{,\tau\tau} + \hat{\mu} |e|^2 e \\ + i c (e_{,\tau\tau\tau} + 3 |e|^2 e_{,\tau} + (3/2) e (|e|^2)_{,\tau}) + \kappa \langle p \rangle = 0, \\ p_{,\tau} = i \delta p + 2 i f e r, \quad r_{,\tau} = i f (e^* p - e p^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Показано, что эта система уравнений обладает свойством Пенлеве при выполнении определенного соотношения между параметрами модели. Также было найдено представление Лакса, что позволяет решить МОЗР для решения указанных уравнений и найти явно ее солитонное решение. В [99] вместо уравнения НУШ в (31) рассматривалось комплексное модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ)

$$ie_{,\zeta} - i(e_{,\tau\tau} + 6|e|^2e_{,\tau} + 3e(|e|^2)_{,\tau}) + \kappa(p) = 0, \quad (34)$$

$$p_{,\tau} = i\delta p + 2ifer, \quad r_{,\tau} = if(e^*p - ep^*).$$

Было найдено представление нулевой кривизны и с помощью преобразований Бёклунда получено солитонное решение рассматриваемой системы. В обоих случаях обсуждаемые системы уравнений являются вполне интегрируемыми при условии, что $L_d L_a^{-1} = 2f^2$.

Распространение УКИ в волокне, содержащем резонансные примеси, было рассмотрено в работе [100]. В отличие от других моделей, здесь учитывались инерционность керровской нелинейности волокна и поправка к показателю преломления, обусловленная изменением населенности резонансных уровней; дисперсия групповых скоростей третьего порядка во внимание не принималась. Модель описывается следующей системой уравнений:

$$ie_{,\zeta} + e_{,\tau\tau} + \hat{\mu}|e|^2e + i\epsilon(|e|^2)_{,\tau} - gre + ikp = 0, \quad (35)$$

$$p_{,\tau} = i\delta p + 2ier, \quad r_{,\tau} = i(e^*p - ep^*).$$

При определенных соотношениях между параметрами в (35) эта система уравнений вполне интегрируема. Для данных уравнений найдены пара Лакса и солитонное решение.

3. Фемтосекундные оптические солитоны

Успехи в получении фемтосекундных импульсов электромагнитного поля путем компрессии или прямой генерации в лазерных системах привели к необходимости развития новых моделей, описывающих распространение таких импульсов, в которых приближение медленно меняющихся огибающих не используется. При этом модель, приводящая ко вполне интегрируемым уравнениям и имеющая солитонные решения, была бы весьма привлекательна.

3.1. СИП в модели однонаправленных волн

Вероятно, самая первая вполне интегрируемая модель, примененная для описания когерентного распространения УКИ, в которой приближение медленно меняющихся огибающих было отброшено, рассмотрена в [48, 50]. Если полные уравнения МБ солитонными решениями не обладают, то, положив, что электромагнитная волна движется только в одном направлении, можно получить уравнения РМБ (6), (7), для которых существует единственное ограничение на длительность импульса: он должен быть много короче времени релаксации поляризации. В нормированном виде уравнения РМБ записываются как

$$e_{,\zeta} = -\langle r_{1,\tau} \rangle, \quad r_{1,\tau} = -r_2, \quad (36)$$

$$r_{2,\tau} = r_1 + er_3, \quad r_{3,\tau} = -er_2.$$

Односолитонные решения описывают импульс в полуволну колебания – однополярный всплеск электромагнитного поля. Двухсолитонные (многосолитонные) импульсы отвечают случаю столкновения односолитонных УКИ. Но среди двухсолитонных решений есть отвечаю-

щие связанному состоянию двух солитонов – бризеры, которые очень похожи на импульсы в несколько колебаний напряженности поля.

3.2. Более чем НУШ

Для описания нелинейных явлений, происходящих с оптическими импульсами фемтосекундной длительности в нелинейном волокне, в [26, 101, 102] было предложено использовать высшее нелинейное уравнение Шредингера (ВНУШ). После перехода к нормированным переменным его можно представить в виде НУШ с дополнительными слагаемыми:

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + \hat{\mu}|e|^2e + i(\eta_3e_{,\tau\tau\tau} + \mu_2|e|^2e_{,\tau} + \mu_3e(|e|^2)_{,\tau}) = 0. \quad (37)$$

Здесь параметр η_3 соответствует дисперсии групповых скоростей третьего порядка, а μ_2 и μ_3 соответствуют двум инерциальным вкладам в нелинейную поляризуемость, отвечающим за образование ударной волны и рамановское саморассеяние.

Если $\eta_3 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$ и $\hat{\mu} = 0$, то ВНУШ (37) редуцируется к нелинейному уравнению Шредингера с производной (НУШП)

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + i(|e|^2e)_{,\tau} = 0. \quad (38)$$

Это уравнение вполне интегрируемое [103]. Используя МОЗР, можно найти его как солитонные, так и многосолитонные решения. Заметим, что условие $\hat{\mu} = 0$ несущественно для редукции ВНУШ ко вполне интегрируемому уравнению, а результирующее при этом модифицированное НУШП

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + \hat{\mu}|e|^2e + i(|e|^2e)_{,\tau} = 0 \quad (39)$$

остается вполне интегрируемым уравнением [104].

Если $\eta_3 = 1$, $\mu_2 = \pm 6$, $\mu_3 = 0$, то уравнение (37) сводится к уравнению Хироты [105]

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + \hat{\mu}|e|^2e + ie_{,\tau\tau\tau} \pm 6i|e|^2e_{,\tau} = 0, \quad (40)$$

которое представляет собой другой пример вполне интегрируемого уравнения.

В общем случае уравнение (37) не является, видимо, вполне интегрируемым. Однако если предположить, что $\eta_3 = \epsilon_1$, $\mu_2 = \pm 6\epsilon_1$, $\mu_3 = 3\epsilon_1$ и $\hat{\mu} = 2s$, то ВНУШ сведется к новому интегрируемому уравнению. В этом случае замена переменных в (37) даст

$$u_{,\zeta} + \epsilon_1(u_{,\xi\xi\xi} + 6|u|^2u_{,\xi} + 3u|u_{,\xi}^2) = 0. \quad (41)$$

Здесь электрическое поле связано с решением уравнения (41) соотношением

$$e(\zeta, \tau) = u(\zeta, \xi) \exp\left(\frac{i\tau}{3\epsilon_1} + \frac{2is^3\xi}{27\epsilon_1^2}\right).$$

Это уравнение было получено в [106], где показано, что его решение можно получить с помощью МОЗР. В отличие от солитонов НУШ, солитоны уравнения Сасы–Сатзумы (41) могут быть двугорбыми и меняющими полярность подобно бризерам СИП. Найдены однопараметрическое семейство солитонов, четырехпараме-

трическое семейство бризеров и общее N -солитонное решение уравнения Сасы – Сатзумы [107].

3.3. Альтернатива НУШ

В работе [108] была предложена модель, описывающая распространение очень коротких (вплоть до одного колебания) импульсов электромагнитного поля в нерезонансной диэлектрической среде. Авторы исходили из скалярного волнового уравнения, описывающего распространение плоской волны вдоль оси координат z :

$$E_{,zz} - c^{-2}E_{,tt} = 4\pi c^{-2}P_{1,tt}.$$

Поляризация P разделяется на линейную и нелинейную части: $P = P_{\text{lin}} + P_{\text{nl}}$. В общем случае линейная часть поляризации представляется интегралом:

$$P_{\text{lin}}(z, t) = \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t - t')E(z, t')dt'.$$

Стоящая под интегралом функция отклика $\chi^{(1)}(t - t')$ – линейная восприимчивость в области длин волн 1.6–3 мкм – аппроксимируется выражением, фурье-спектр которого (в длинах волн) есть

$$\chi^{(1)}(\lambda) = \chi_0^{(1)} + \chi_2^{(1)}\lambda^2,$$

где $\chi_0^{(1)} = 1.11 \text{ мкм}^{-2}$; $\chi_2^{(1)} = 0.0106 \text{ мкм}^{-2}$. Что касается нелинейной части поляризации, то используется выражение $P_{\text{nl}} = \chi^{(3)}E^3$, означающее, что учитывается только кубическая нелинейность, причем дисперсия нелинейной восприимчивости отсутствует (отклик мгновенный). Эти предположения позволяют переписать исходное волновое уравнение в следующем виде:

$$E_{,zz} - v^{-2}E_{,tt} - 4\pi^2\chi_2^{(1)}E = 4\pi\chi^{(3)}c^{-2}E_{,tt}^3, \quad (42)$$

где v – фазовая скорость (как в обычном диэлектрике).

Линейная часть этого уравнения совпадает с уравнением Клейна – Гордона, у которого есть решения, описывающие бегущие слева направо и справа налево волны. Следующее приближение – ограничиться волнами, бегущими только в одном направлении. Редукция волнового уравнения (42) проводится с помощью метода многомасштабной теории возмущений; подробности этой процедуры можно найти в [108]. Результирующее уравнение, названное уравнением Шафера – Вайна (ШВ), имеет вид

$$E_{,zt} + 2\pi^2\chi_2^{(1)}E + 2\pi\chi^{(3)}c^{-2}E_{,tt}^3 = 0. \quad (43)$$

Если сделать подходящую замену переменных и переобозначить независимые переменные, то это уравнение может быть представлено в следующей изящной форме:

$$e_{\tau\xi} = e + (e^3/6)_{,\xi\xi}. \quad (44)$$

В этом виде уравнение ШВ было изучено в [109, 110], где показано, что оно является вполне интегрируемым. Этот же результат был воспроизведен в [111, 112], где дополнительно были найдены солитонные решения и гамилтонова структура уравнения ШВ. С использованием МОЗР в [110] была получена формула для многосолитонного решения уравнения ШВ.

Численное решение полного волнового уравнения и сравнение его результатов с результатами решения уравнения ШВ показало, что для импульсов в несколько колебаний согласие полученных данных значительно лучше, чем в случае, если бы вместо уравнения ШВ решалось НУШ.

Попытка обобщить это уравнение на случай двухкомпонентного (поляризованного) электромагнитного излучения [113] не привела к уравнениям, имеющим физический смысл.

3.4. Распространение предельно коротких импульсов

Когда рассматривается резонансная среда, в которой все процессы релаксации отброшены как значительно более медленные (по сравнению с длительностью импульса электромагнитного поля), частота резонансного перехода ω_a дает единственный масштаб времени. * Если длительность импульса t_p удовлетворяет условию $t_p\omega_a \gg 1$, для описания его эволюции можно использовать представление о квазигармонических волнах (или, что то же, рассматривать медленно меняющиеся огибающие). В противном случае, если $t_p\omega_a \leq 1$, необходимо использовать полные уравнения Максвелла или – при определенных условиях – приближение однонаправленных волн. Отношение $\varepsilon = \omega_R/\omega_a$, где ω_R – мгновенная частота Раби (т. е. $(d/\hbar)\max|E|$), дает новый параметр теории. Пусть амплитуда УКИ такова, что частота ω_R мала по сравнению с минимальной частотой резонансного перехода. Следовательно, можно использовать ε как малый параметр для решения уравнений Блоха (5) по теории возмущений и полученную таким образом поляризацию среды подставить в волновое уравнение, не прибегая к приближению медленно меняющихся огибающих УКИ [114]. В приближении однонаправленных волн волновое уравнение записывается как

$$E_{,z} + c^{-1}E_{,t} = -(2\pi n_a d/c)\langle r_{1,t} \rangle, \quad (45)$$

где поляризация ансамбля двухуровневых атомов с точностью до третьего порядка малости по ε записывается как

$$\begin{aligned} \langle r_{1,t} \rangle &= 2\langle d/\hbar\omega_a \rangle E - 2\langle d/\hbar\omega_a^3 \rangle E_{,tt} \\ &- 4\langle |d|^2 d/\hbar^3 \omega_a^3 \rangle E^3. \end{aligned} \quad (46)$$

Подстановка (46) в уравнение (45) и последующая замена переменных (детали см. в [114]) приводят к известному в теории солитонов [31] модифицированному уравнению Кортевега – де Фриза (мКдФ)

$$e_{,\tau} + 6e^2e_{,\xi} + e_{,\xi\xi\xi} = 0. \quad (47)$$

Как известно [115], уравнение мКдФ является вполне интегрируемым, и его солитонные решения получаются с помощью МОЗР. Односолитонные решения отвечают распространению электромагнитных всплесков (предельно коротких импульсов (ПКИ), видеоимпульсов), бризеры – импульсам в несколько колебаний поля (рис.8).

*Надо помнить, что при переходе от микроскопических уравнений электродинамики к макроскопическим поля усреднялись по физически малому объему. Эта процедура определяет границы применимости макроскопических уравнений Максвелла.

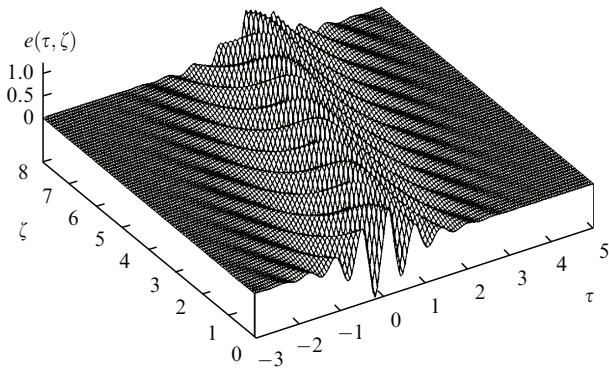


Рис.8. Бризер мКдФ – двухсолитонное решение уравнения мКдФ (выглядит как электромагнитный импульс в несколько колебаний).

В [116] рассмотрены случаи, когда описание можно и нужно проводить без приближения медленно меняющихся огибающих. В качестве примеров рассмотрены уравнения КдФ (в квадратичной среде), мКдФ (в кубической среде) и \sin -Гордона (в резонансной среде). В статье [117], сравнивая результаты описания распространения импульсов в несколько колебаний с помощью мКдФ, уравнения \sin -Гордона (SG), уравнения ШВ и некоторых модельных уравнений, авторы пришли к заключению, что наиболее подходящим является комбинированное уравнение мКдФ – SG [118, 119]:

$$e_{,\zeta} + c_1 \sin \vartheta + 3c_2 e^2 e_{,\tau} + c_3 e_{,\tau\tau\tau} = 0, \quad \vartheta_{,\tau} = e. \quad (48)$$

При условии, что $c_3 = 2c_2$, это уравнение вполне интегрируемо [118], и его солитонные, точнее бризерные, решения хорошо воспроизводят эволюцию импульсов в несколько колебаний, полученную в численных расчетах.

Для описания распространения ПКИ были получены и другие уравнения [120–125]. Обзор некоторых можно найти в [126]. Однако они не являются вполне интегрируемыми и не имеют солитонных решений. Так, например, распространение поляризованного УКИ в резонансной среде может быть описано двухкомпонентным обобщенным уравнением мКдФ, которое только для случая фиксированной поляризации импульса сводится ко вполне интегрируемому уравнению. В то же время численное моделирование распространения и взаимодействия уединенных волн с использованием упомянутых уравнений показывает их устойчивость или слабое затухание. Столкновение таких импульсов сопровождается слабым испусканием линейных диспергирующих волн. Все это делает их похожими на солитоны.

3.5. СИП в двухуровневой среде с постоянным дипольным моментом

Обычно модели резонансного взаимодействия импульсов электромагнитного излучения с веществом учитывали только те состояния атомов или молекул, для которых оператор дипольного момента не имеет диагональных элементов. Однако существуют среды (полярные молекулы, несимметричные квантовые точки, квантовые ямы), для которых оператор дипольного момента имеет диагональные элементы [127–129]. Распространение очень коротких и предельно коротких импульсов электромагнитного излучения в таких средах изучалось в [130–140]. В упомянутых работах рассматривалась плоская электромагнитная волна, распространяющаяся

в среде из атомов или молекул, у которых переход из основного состояния в возбужденное характеризуется оператором дипольного момента с ненулевыми как недиагональными (d_{12}, d_{21}), так и диагональными (d_{11}, d_{22}) матричными элементами. Благодаря диагональным матричным элементам оператора дипольного момента перехода атомы или молекулы имеют постоянную поляризуемость. Говорят, что резонансная система обладает постоянным дипольным моментом (ПДМ). Если диполь-дипольное взаимодействие меньше энергии тепловых флуктуаций и нет внешнего постоянного электрического поля, то макроскопическое значение поляризации среды равно нулю. Во всех упомянутых в этом разделе статьях рассматривались только паразлектрики. В случае ПКИ предполагается, что всеми релаксационными процессами в системе атомов можно пренебречь.

Предположение, что волны распространяются только в одном направлении, позволяет привести полные уравнения МБ к более простой системе уравнений – РМБ (6), (7), в которых учитываются диагональные матричные элементы оператора дипольного момента перехода. Для рассматриваемого случая уравнения РМБ имеют следующий вид [126]:

$$E_{,z} + c^{-1} E_{,t} = -\frac{\pi n_a}{c} \langle (d_{22} - d_{11}) r_{3,t} + 2d_{12} r_{1,t} \rangle, \quad (49)$$

$$r_{1,t} = -\left[\omega_a + \frac{(d_{11} - d_{22})E}{\hbar} \right] r_2,$$

$$r_{2,t} = \left[\omega_a + \frac{(d_{11} - d_{22})E}{\hbar} \right] r_1 + \frac{2d}{\hbar} E r_3, \quad (50)$$

$$r_{3,t} = -\frac{2d}{\hbar} E r_2.$$

Эти уравнения отличаются от (6), (7) дополнительными слагаемыми, пропорциональными $d_{11} - d_{22}$.

Уравнения (49), (50) можно переписать в нормированной форме, как это было сделано ранее для (9) и (10), так, чтобы получить нормированную систему уравнений

$$e_{,\zeta} = -\langle r_{1,\tau} - \mu r_{3,\tau} \rangle, \quad (51)$$

$$r_{1,\tau} = -(1 + \mu e) r_2, \quad (52)$$

$$r_{2,\tau} = (1 + \mu e) r_1 + e r_3, \quad r_{3,\tau} = -e r_2,$$

где $\mu = (d_{11} - d_{22})/2d_{12}$ – мера влияния ПДМ на отклик резонансной системы на электромагнитный импульс. Уравнение (51) можно переписать как $e_{,\zeta} = \langle r_2 \rangle$.

При условии отсутствия неоднородного уширения резонансной линии было найдено [131], что система уравнений (51), (52) допускает представление Лакса и, следовательно, является вполне интегрируемой. Другое (калибровочно-эквивалентное) представление Лакса рассмотрено в [132]. Гамильтонова структура уравнений (51) и (52) определена в [135]. Учет неоднородного уширения резонансной линии сохраняет свойство полной интегрируемости этой системы уравнений [136].

С использованием метода преобразований Дарбу в [137–139] были получены солитонные решения системы

уравнений (51), (52), в частности бризерное решение, возникновение и эволюцию которого численно исследовал автор статьи [140]. Аналитические выражения для двухсолитонных решений уравнений (51) и (52), в том числе и для бризеров, ранее получены в [131].

Если в уравнениях (51) и (52) положить параметр μ равным нулю, то можно получить систему уравнений РМБ, имеющую солитонные решения, которые могут описывать как импульсы в несколько колебаний (бризеры), так и однополярный импульс – всплеск электромагнитного поля (предельно короткий импульс) [39, 42]. Солитоны уравнений РМБ имеют «площадь»

$$\vartheta(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\zeta, \tau) d\tau,$$

кратную 2π ; это означает, что под действием такого импульса атомы переходят из основного состояния в возбужденное и обратно, так, чтобы по прохождении солитона состояние резонансной среды оказалось первоначальным. Сколько раз произойдет такой «оборот» населенности – такова кратность «площади» импульса двум π . Бризер имеет «площадь», равную нулю, и потому часто называется 0π -импульсом. В случае, когда μ отлично от нуля, площадь бризера не равна нулю и его форма не симметрична, что и наблюдалось в расчетах [140]. Кроме того, его групповая скорость может быть значительно меньше скорости света в среде.

4. Многокомпонентные солитоны

4.1. Векторные оптические солитоны

В общем случае векторный солитон отвечает солитонному решению системы нелинейных уравнений, которое можно представить как матрицу-строку. Так, например, векторный солитон НУШ есть решение следующего многокомпонентного (векторного) НУШ

$$ie_{,\zeta} + se_{,\tau\tau} + \hat{\mu}(e \cdot e^*)e = 0, \quad (53)$$

где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Индексы компонент вектора здесь могут иметь различный физический смысл, например частоты (для полихроматического импульса) или проекции вектора поляризации поляризованного электромагнитного импульса.

Уравнение (53) представляет собой пример вполне интегрируемого уравнения, используемого в нелинейной оптике. Оно принадлежит иерархии уравнений АКНС, которые могут быть решены с помощью МОЗР со спектральной задачей Манакова [15]. Многосолитонное решение для n -компонентного НУШ было получено в [99, 141].

В качестве простого векторного обобщения НУШП можно привести уравнение

$$ie_{,\zeta} + e_{,\tau\tau} - i[(e \cdot e^*)e]_{,\tau} = 0. \quad (54)$$

В [142] МОЗР применен к векторному (двухкомпонентному) НУШП. Результаты использовались при исследовании модуляционной неустойчивости циркулярно поляризованных длинных альвеновских волн.

В [143] найдено, что учитывающее нелинейное изменение групповой скорости уравнение

$$ie_{,\zeta} + e_{,\tau\tau} \pm i(e \cdot e^*)e_{,\tau} = 0, \quad (55)$$

будучи вполне интегрируемым, имеет солитонные решения.

Другой пример векторных нелинейных волн возникает при рассмотрении распространения в оптическом волокне фемтосекундного оптического импульса с учетом двулучепреломления и высших порядков дисперсии групповых скоростей и нелинейной восприимчивости. Вполне интегрируемым уравнением в этом случае является двухкомпонентное уравнение Сасы–Сатзумы [144], обобщающее уравнение (41):

$$u_{,\zeta} + \epsilon[u_{,\zeta\zeta\zeta} + 6(u \cdot u^*)u_{,\zeta} + 3u(u \cdot u^*)_{,\zeta}] = 0. \quad (56)$$

В [144] было рассмотрено также трехкомпонентное уравнение Сасы–Сатзумы. Найдено, что это уравнение имеет представление Лакса и может быть решено с помощью МОЗР. Однако точное солитонное решение более просто можно получить методом преобразований Дарбу–Бёклунда.

4.2. СИП в трехуровневой среде для поляризованных импульсов

Частный случай взаимодействия поляризованного излучения с резонансной средой рассмотрен в [145]. Предполагалось, что двухчастотный УКИ распространяется в трехуровневой среде в случае, когда один из уровней V- или Λ -конфигурации не вырожден, а два других уровня трехкратно вырождены по проекциям углового момента. Или, наоборот, два уровня вырождены (триплеты), а смежный уровень не вырожден (синглет).

4.2.1. Переход $j_1 = 0 \rightarrow j_2 = 1 \rightarrow j_3 = 0$.

Из компонент электрического поля УКИ можно образовать 2×2 -матрицу $\hat{e} = (e_k^j)$, где нижний индекс обозначает «цвет» – частоту несущей волны ω_1 или ω_2 , а верхний индекс – круговую поляризацию. Для левополяризованного излучения $j = -1$, для правополяризованного излучения $j = +1$. Элементы матрицы перехода собраны в матрицы \hat{p} , \hat{n} и \hat{m} согласно следующим правилам:

для V-перехода ($j, l = \pm 1$)

$$p_1^j = \langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_2, j \rangle, \quad p_2^j = \langle j_3, 0 | \hat{\rho} | j_2, j \rangle, \quad n_1^1 = \langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle,$$

$$n_2^2 = \langle j_3, 0 | \hat{\rho} | j_3, 0 \rangle, \quad m_{jl} = \langle j_2, j | \hat{\rho} | j_2, l \rangle, \quad n_1^2 = \langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_3, 0 \rangle = n_1^{1*};$$

для Λ -перехода ($k, l = \pm 1$)

$$p_1^k = \langle j_2, -k | \hat{\rho} | j_1, 0 \rangle, \quad p_2^k = \langle j_3, -k | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle,$$

$$n_1^1 = -\langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle, \quad n_2^2 = -\langle j_3, 0 | \hat{\rho} | j_3, 0 \rangle,$$

$$m_{kl} = -\langle j_2, -l | \hat{\rho} | j_2, -k \rangle, \quad n_1^2 = -\langle j_1, 0 | \hat{\rho} | j_3, 0 \rangle = n_2^{1*}.$$

Соответствующие этому случаю перехода в трехуровневой среде уравнения РМБ (в приближении медленно меняющихся огибающих) записываются как система матричных уравнений:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{,\zeta} &= -i\langle \hat{p} \rangle, \\
\hat{p}_{,\tau} &= i\delta\hat{p} + i(\hat{n}\hat{e} - \hat{e}\hat{m}), \\
\hat{m}_{,\tau} &= i(\hat{p}^+\hat{e} - \hat{e}^+\hat{p}), \\
\hat{n}_{,\tau} &= i(\hat{p}\hat{e}^+ - \hat{e}\hat{p}^+).
\end{aligned}
\tag{57}$$

Эта система уравнений имеет представление Лакса и решена с помощью МОЗР. Для нее найдены односолитонные решения, преобразование Бёклунда (что позволяет строить солитонные решения произвольной кратности) и бесконечная последовательность законов сохранения. Как и в случае поляризованного 2π -импульса, нормированная огибающая двухчастотного поляризованного солитона – решения системы уравнений (57) – определяется формулой

$$\begin{aligned}
\hat{e}(\tau, \zeta) &= I^{(p)} \otimes I^{(c)} 2\eta \operatorname{sech}[2\eta(\tau - \tau_0) - b\zeta] \\
&\times \exp(-2\alpha\tau + i\kappa\zeta),
\end{aligned}$$

где $I^{(p)}$ – единичный вектор в пространстве поляризаций и $I^{(c)}$ – единичный вектор в пространстве частот (цвета). Столкновение двух таких солитонов приводит к вращению этих векторов. Формулы, определяющие поворот векторов поляризации и цвета, подобны (21). Векторы $I^{(p)}$ вращаются независимо от векторов $I^{(c)}$. Следовательно, при столкновении солитонов происходит изменение поляризации и перераспределение энергии между компонентами двухчастотных поляризованных солитонов.

4.2.2. Переход $j_1 = 1 \rightarrow j_2 = 1 \rightarrow j_3 = 0$.

В этом случае элементы матрицы перехода собраны в скаляр n и в матрицы \hat{p} , \hat{r} , \hat{k} , \hat{m} согласно следующим правилам:

для V-перехода

$$p_1^k = \langle j_1, -k | \hat{\rho} | j_2, j \rangle, \quad p_2^k = \langle j_3, -k | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle,$$

$$n = -\langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle, \quad m_{kl} = -\langle j_1, -l | \hat{\rho} | j_1, -k \rangle,$$

$$k_{kl} = -\langle j_3, -l | \hat{\rho} | j_3, -k \rangle, \quad r_{kl} = -\langle j_1, -l | \hat{\rho} | j_3, -k \rangle;$$

для Λ -перехода

$$p_1^k = \langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_1, k \rangle, \quad p_2^k = \langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_3, k \rangle, \quad n = \langle j_2, 0 | \hat{\rho} | j_2, 0 \rangle,$$

$$m_{kl} = \langle j_1, k | \hat{\rho} | j_1, l \rangle, \quad k_{kl} = \langle j_3, k | \hat{\rho} | j_3, l \rangle, \quad r_{kl} = -\langle j_3, l | \hat{\rho} | j_3, k \rangle.$$

Здесь удобно образовать четырехкомпонентный вектор электрического поля УКИ $e = (e_1^{-1}, e_1^{+1}, e_2^{-1}, e_2^{+1})$, вектор поляризаций $p = (p_1^{-1}, p_1^{+1}, p_2^{-1}, p_2^{+1})$ и 4×4 -матрицу \hat{M} , построенную из блоков:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{m} & \hat{r} \\ \hat{r}^+ & \hat{k} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнения РМБ можно записать в виде

$$e_{,\zeta} = -i\langle p \rangle,$$

$$p_{,\tau} = i\delta p - ie \cdot \hat{M} + ien, \tag{58}$$

$$\hat{M}_{,\tau} = -i(e^* \otimes p - p^* \otimes e),$$

$$n_{,\tau} = -i(p^* \cdot e - e^* \cdot p).$$

Полученная система уравнений схожа с системой (20). Тем самым ее решение легко может быть получено с помощью МОЗР. Как и в предшествующем случае, были найдены солитоны и определен характер их взаимодействия (подробнее см. в [73]).

4.3. СИП в анизотропной/изотропной двухуровневой среде с постоянным дипольным моментом

Анизотропия оператора дипольного момента (она может быть связана с кристаллической структурой матрицы, содержащей резонансные атомы) и влияние ПДМ учитываются в гамильтониане системы двухуровневых атомов введением следующего слагаемого – гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{int}} &= -\hat{\sigma}_+(d_{zx}^{(1)} E_x + d_{zy}^{(1)} E_y) + \hat{\sigma}_-(d_{zx}^{(2)} E_x + d_{zy}^{(2)} E_y) \\
&+ \hat{\sigma}_1(d_{xx} E_x + d_{xy} E_y) + \hat{\sigma}_2(d_{yx} E_x + d_{yy} E_y),
\end{aligned}$$

где используются матрицы $\hat{\sigma}_{\pm} = (1 \pm \hat{\sigma}_3)$ и обычные матрицы Паули $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$. Поперечные компоненты вектора электрического поля обозначены как E_x и E_y ; $d_{zx}^{(a)}, d_{zy}^{(a)}$ – диагональные матричные элементы оператора дипольного момента в основном ($a = 1$) и в возбужденном ($a = 2$) состояниях; d_{jk} – вещественные компоненты тензора дипольного момента перехода между состояниями $a = 1$ и $a = 2$ [146–148].

В нормированных переменных система обобщенных уравнений РМБ имеет следующий вид:

$$e_{x,\zeta} = (\kappa_x r_1 + \kappa_y r_2 - r_3) e_y - r_2,$$

$$e_{y,\zeta} = -(\kappa_x r_1 + \kappa_y r_2 - r_3) e_x + \rho r_1,$$

$$r_{1,\tau} = (1 - \kappa_x e_x - \kappa_y e_y) r_2 + e_y r_3, \tag{59}$$

$$r_{2,\tau} = -(1 - \kappa_x e_x - \kappa_y e_y) r_1 - e_x r_3,$$

$$r_{3,\tau} = e_x r_2 - e_y r_1.$$

Здесь e_x и e_y – нормированные проекции на соответствующие оси электрического поля импульса; κ_x, κ_y и ρ – параметры задачи, выражаемые через матричные элементы ПДМ и вещественные компоненты тензора дипольного момента перехода; r_1, r_2, r_3 – компоненты вектора Блоха.

С помощью МОЗР найдено решение для изотропного предела ($\rho = 1$) общей интегрируемой модели взаимодействия двухкомпонентного электромагнитного поля с двухуровневыми атомами [146]. Более сложная задача, отвечающая анизотропному случаю ($\rho \neq 1$), решена в [147, 148]. В этом случае МОЗР основан на спектральной задаче нового типа, ранее не встречавшейся в теории солитонов. В недавно появившейся статье [149] представлен детальный обзор МОЗР, используемого для точного решения систем уравнений РМБ с учетом поляризации

поля и ПДМ, и даны явные выражения для их солитонных решений.

4.4. Когерентное распространение поляризованных предельно коротких импульсов

Распространение импульсов в несколько колебаний в резонансной среде двухуровневых атомов в приближении однонаправленной волны описывалось вполне интегрируемой моделью, основанной на скалярных уравнениях РМБ (6) и (7). Учет поляризации электромагнитного поля, сохраняющий свойство интегрируемости, был сделан в [150]. Рассматривалось взаимодействие ПКИ с двухуровневой средой, состоящей из атомов с энергетическим σ -переходом ($j = 1/2, m = -1/2 \leftrightarrow j = 1/2, m = 1/2$, где j и m – полный угловой момент и его проекция на ось квантования соответственно). В этом случае матричный элемент дипольного момента записывается как $\mathbf{d} = d_x \hat{x} - d_y \hat{y}$, где \hat{x}, \hat{y} – орты декартовой системы координат, определяющие оси x и y , ортогональные направлению распространения волны z . Уравнения для компонент электромагнитного импульса имеют вид

$$E_{x,zz} - c^{-2} E_{x,tt} = 4\pi c^{-2} n_a d_x r_{1,tt},$$

$$E_{y,zz} - c^{-2} E_{y,tt} = 4\pi c^{-2} n_a d_y r_{2,tt},$$

а уравнения Блоха таковы:

$$r_{1,t} = -\omega_0 r_2 + (d_y/\hbar) E_y r_3,$$

$$r_{2,t} = \omega_0 r_1 - (d_y/\hbar) E_x r_3,$$

$$r_{3,t} = (d_x/\hbar) E_x r_2 - (d_y/\hbar) E_y r_1.$$

Используя приближение однонаправленной волны и вводя нормированные зависимости (e_1, e_2) и независимые (ζ и τ) переменные, систему векторных уравнений РМБ можно записать [150 – 152] как

$$\begin{aligned} e_{1,\zeta} &= r_{1,\tau}, \quad e_{2,\zeta} = \rho^2 r_{2,\tau}, \\ r_{1,\tau} &= -r_2 + e_2 r_3, \quad r_{2,\tau} = r_1 - e_1 r_3, \\ r_{3,\tau} &= e_1 r_2 - e_2 r_1, \end{aligned} \quad (60)$$

где $\rho = d_y/d_x$. Если сделать замену $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow (-r_1, -r_2, r_3)$ и положить $e_2 = 0$, то система (60) трансформируется в РМБ (6) и (7).

Рассмотренный в [152] изотропный случай ($d_y = d_x$) дает систему векторных уравнений РМБ, интегрируемую с помощью МОЗР, основанного на спектральной задаче Каупа–Ньюэлла [103], которая использовалась для решения НУШ с производной (38). Солитонные решения можно найти в указанной статье. Авторы работы [152] получили многосолитонные решения системы векторных РМБ методом преобразований Дарбу и Бёклунда. Среди этих решений имеются и бризеры, которые описывают электромагнитные импульсы с малым числом колебаний поля:

$$e_{br}(\zeta, \tau) = -2ik \sin 2\phi \frac{\cosh[\tau \sin 2\phi - (\zeta/2) \cot \phi + i\phi]}{\cosh^2[\tau \cos 2\phi + (\zeta/2) + i\phi]}$$

$$\times \exp(it \cos 2\phi + i\zeta/2), \quad (61)$$

где k и ϕ – две зависящие от начального условия постоянные.

Если полагать отношение d_y/d_x произвольным, то решение системы уравнений (60) все равно может быть получено с помощью МОЗР, но спектральную задачу надо использовать другую. Эта новая спектральная задача и представление нулевой кривизны для системы уравнений (60) были найдены в [150], где дано и солитонное решение, которое из-за громоздкости здесь не представлено. Многосолитонные решения, в том числе бризеры, были получены позже в работе [153], авторы которой, используя результаты [150], построили преобразование Дарбу и Бёклунда для (60) в общем случае. Нетривиальные группы симметрии соответствующего представления нулевой кривизны изучены в [146, 154]. Там же показано, как решения векторных уравнений РМБ выражаются через решения матричной задачи Гильберта–Римана. Многие результаты, связанные с описанием распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в двухуровневой среде, собраны в обзоре [149].

4.5. Оптические доменные стенки

Изучение динамики состояний поляризации двух оптических импульсов или пучков, распространяющихся в нелинейной керровской среде навстречу друг другу, привело к формулировке моделей, предсказывающих образование разделяющих области различной поляризации доменных стенок.

Так, в работе [155] рассмотрено распространение навстречу друг другу оптических импульсов в изотропной кубически-нелинейной среде. Волны распространяются в направлениях \hat{z} и $-\hat{z}$ вдоль оси z и характеризуются медленно меняющимися огибающими $e^{(\pm)} = e_x^{\pm} \hat{x} + e_y^{\pm} \hat{y}$. Система укороченных уравнений для огибающих имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e_{j,\tau}^{(\pm)} \pm e_{j,\zeta}^{(\pm)} &= ig_{int} \{ [(e^{(+)*} \cdot e^{(+)}) + (e^{(-)*} \cdot e^{(-)})] e_j^{(\pm)} \\ &+ (e^{(\mp)*} \cdot e^{(\pm)}) e_j^{(\mp)} \}, \end{aligned} \quad (62)$$

где $\zeta = k_0 z$, $\tau = k_0 v_{gint} t$ – нормированные координата и время; k_0 – волновое число несущей волны; v_{gint} – групповая скорость (дисперсия групповых скоростей не учитывалась). Константа взаимодействия g_{int} определена через линейную ($\chi^{(1)}$) и нелинейную ($\chi^{(3)}$) восприимчивости: $g_{int} = 2\pi\chi^{(3)}/(1 + 4\pi\chi^{(1)})$.

Состояние поляризации часто описывается вектором Стокса \mathcal{S} . В настоящей задаче используются два таких вектора:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(\pm)} &= (e_x^{(\pm)*} e_y^{(\pm)} + \text{компл. сопр.}, \\ &ie_x^{(\pm)*} e_y^{(\pm)} + \text{компл. сопр.}, |e_x^{(\pm)}|^2 - |e_y^{(\pm)}|^2). \end{aligned}$$

Модули этих векторов, $|\mathcal{S}^{(\pm)}|^2 = (e^{(\pm)} \cdot e^{(\pm)*})$, остаются постоянными, так что состояние поляризации определяется только ориентацией векторов Стокса.

С использованием новых независимых переменных $2\eta = \zeta - \tau$ и $2\xi = -(\zeta + \tau)$ и системы уравнений (62) в [155] было получено два связанных уравнения Блоха, описывающих вращение введенных векторов Стокса вокруг друг друга:

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} \mathbf{S}^{(+)} &= g_{\text{int}} \mathbf{S}^{(-)} \times \mathbf{S}^{(+)}, \\ \partial_{\eta} \mathbf{S}^{(-)} &= -g_{\text{int}} \mathbf{S}^{(-)} \times \mathbf{S}^{(+)}. \end{aligned} \quad (63)$$

В работах [156, 157] рассмотрен случай двулучепреломляющей среды с кубической нелинейностью. Уравнения для векторов Стокса выглядят более сложно, но, пренебрегая керровским самовоздействием по сравнению с их кросс-взаимодействием, эти уравнения можно упростить и свести ко вполне интегрируемым уравнениям движения анизотропного кирального поля на группе $O(3)$ [158, 159]:

$$\partial_{\xi} \mathbf{S}^{(+)} = \mathbf{S}^{(+)} \times \hat{J} \mathbf{S}^{(-)}, \quad \partial_{\eta} \mathbf{S}^{(-)} = \mathbf{S}^{(-)} \times \hat{J} \mathbf{S}^{(+)}, \quad (64)$$

где \hat{J} – диагональная матрица, определяемая восприимчивостями нелинейной среды. Когда матричные элементы \hat{J} различны, решения (64) определяют устойчивые состояния поляризации при параллельных либо ортогональных векторах встречных волны.

Рассмотренные модели напоминают модель изотропного в случае (63) или анизотропного (64) ферромагнетика. Известно, что в ферромагнетиках существуют доменные стенки, описывающие переход от одного устойчивого состояния магнитных моментов к другому. В оптике доменная стенка отвечает области, в которой происходит изменение состояния поляризации взаимодействующих волн, например левополяризованные волны превращаются в правополяризованные.

5. Деформированные солитоны

В традиционной схеме МОЗР спектральный параметр соответствующей линейной задачи на собственные значения предполагается постоянным. Потенциалы, входящие в спектральную задачу МОЗР, изменяются (деформируются) согласно соответствующей системе интегрируемых уравнений, а так как спектральный параметр постоянный, то говорят, что данное интегрируемое уравнение задает изоспектральную деформацию. Если отказаться от постоянства спектрального параметра, то можно получить уравнения, решаемые методом обратной задачи рассеяния, однако солитонные решения в них свою форму при распространении не сохраняют.

В некоторых задачах нелинейной волоконной оптики используются модели, основанные на НУШ с переменными коэффициентами. Например, распространение оптических солитонов в волокне с контролируемой дисперсией или с контролируемыми потерями. В общем случае используются уравнения, не являющиеся вполне интегрируемыми и солитонными решениями не обладающие. Но есть случаи, когда замена переменных позволяет свести такое неавтономное НУШ ко вполне интегрируемому [160, 161].

5.1. Деформированные уравнения РМБ

В работе [162] было предложено обобщение МОЗР, в котором спектральный параметр является функцией координаты и времени. Нелинейные эволюционные уравнения, решаемые таким методом, содержат переменные коэффициенты и иногда называются деформированными (неизоспектральными) интегрируемыми уравнениями. Соответствующие солитонные решения будем называть деформированными солитонами.

В нелинейной оптике был найден пример такой системы уравнений. Это обобщенные уравнения МБ, описы-

вающие эволюцию УКИ в двухуровневой среде, в которой возбужденное состояние атомов непрерывно заполняется, а основное состояние опустошается таким образом, что разность населенностей меняется с постоянной скоростью. Соответствующие деформированные уравнения РМБ имеют следующий вид [162]:

$$e_{,\xi} = p, \quad p_{,\tau} = er, \quad r_{,\tau} = -\frac{1}{2}(e^*p + ep^*) - 4\bar{c}. \quad (65)$$

Параметр \bar{c} описывает накачку двухуровневой среды.

Другой пример деформированных уравнений РМБ, приведенный в [163], дается уравнениями

$$e_{,\xi} = p, \quad p_{,\tau} + \bar{c}p = er, \quad r_{,\tau} + \bar{c}r = -\frac{1}{2}(e^*p + ep^*). \quad (66)$$

Эта система предполагает, что разность населенностей и поляризация в двухуровневой среде релаксируют с одинаковой скоростью.

В этой же статье рассмотрена система уравнений

$$ie_{,\xi} + \frac{1}{2}e_{,\tau\tau} + \frac{1}{4}|e|^2e = ip, \quad (67)$$

$$p_{,\tau} = er, \quad r_{,\tau} + \frac{1}{2}(e^*p + ep^*) = -4\bar{c},$$

описывающая распространение УКИ в оптическом волокне с резонансными примесями при точном резонансе и непрерывной накачке. Условие, при котором (65) и (67) обладают свойством Пенлеве, было определено в [164]. Двухсолитонное решение системы уравнений (65) и (67) представлено в [165]. Найдено преобразование Бёклунда, позволяющее строить многосолитонные решения исходя из односолитонных.

В [166] в рамках двух интегрируемых систем обобщенных уравнений РМБ рассмотрена эволюция предельно коротких импульсов. Первая модель описывает взаимодействие поля с двухуровневой невырожденной средой с учетом постоянного дипольного момента и внешней постоянной накачки. Система уравнений, обобщающих (51) и (52), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}e_{,\xi} &= r_2, \\ r_{1,\tau} &= -(1 + \mu e)r_2 + \bar{b}(\xi), \\ r_{2,\tau} &= (1 + \mu e)r_1 + er_3, \\ r_{3,\tau} &= -er_2 + \bar{c}(\xi), \end{aligned} \quad (68)$$

где параметр \bar{b} описывает наведенную поляризацию среды. Показано, что данная система интегрируется с помощью МОЗР, и представлена общая формула для N -солитонного решения. На примере частных решений исследуется влияние постоянного дипольного момента и накачки на динамику солитонов.

Вторая модель описывает взаимодействие импульсов двухкомпонентного электрического поля с двухуровневой вырожденной средой (основное состояние является триплетом, возбужденное – синглетом) при постоянной накачке верхнего уровня и опустошении нижних уровней. Система уравнений для этой модели такова:

$$\begin{aligned}
 e_{1,\zeta} &= -p_1, \quad e_{2,\zeta} = -p_2, \\
 p_{1,\tau} &= -(1 + \mu_1 e_1)s_1 - 2n_1 e_1 + q_1 e_2, \\
 p_{2,\tau} &= -(1 + \mu_2 e_2)s_2 - 2n_2 e_2 + q_1 e_1, \\
 s_{1,\tau} &= (1 + \mu_1 e_1)p_1 + q_2 e_2, \quad s_{2,\tau} = (1 + \mu_2 e_2)p_2 - q_2 e_1, \quad (69) \\
 q_{1,\tau} &= -(e_1 p_2 + e_2 p_1), \quad q_{2,\tau} = (e_1 s_2 - e_2 s_1), \\
 n_{1,\tau} &= 2e_1 p_1 + e_2 p_2 + (\bar{c}_1 + \bar{c}_2), \\
 n_{2,\tau} &= e_1 p_1 + 2e_2 p_2 + (\bar{c}_1 + \bar{c}_2).
 \end{aligned}$$

Здесь e_1, e_2 – нормированные циркулярно право- и левополяризованные компоненты электрического поля; $\mu_1 = (d_{22} - d_{11})/d_{12}$ и $\mu_2 = (d_{33} - d_{11})/d_{12}$ – коэффициенты, учитывающие штарковские сдвиги энергетических уровней; \bar{c}_1 и \bar{c}_2 – скорости заполнения верхнего уровня и опустошения нижних уровней; элементы матрицы плотности связаны с переменными в уравнениях системы (69) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 ip_1 &= \varrho_{12} - \varrho_{21}, \quad ip_2 = \varrho_{13} - \varrho_{31}, \quad s_1 = \varrho_{12} + \varrho_{21}, \\
 q_1 &= \varrho_{23} + \varrho_{32}, \quad iq_2 = \varrho_{23} - \varrho_{32}, \quad n_1 = \varrho_{11} - \varrho_{22}, \\
 n_2 &= \varrho_{11} - \varrho_{33}.
 \end{aligned}$$

Для случая разных начальных населенностей подуровней на примере солитонных решений показано, что накачка приводит к изменению динамики поляризации. Двухсолитонное решение используется для анализа особенностей взаимодействия солитонов в двухуровневой среде при наличии внешней накачки.

В некоторых задачах модельные уравнения отличаются от вполне интегрируемой формы слагаемыми с малым параметром. В таком случае может быть использована теория возмущений для солитонов [167, 168]. Теория возмущений для систем эволюционных уравнений, близких к системам, интегрируемым в рамках МОЗР с зависящим от пространственно-временных переменных спектральным параметром, представлена в [169]. Эта теория используется для исследования эволюции солитонных импульсов света в двухуровневой среде с накачкой верхнего уровня с учетом линейных и нелинейных потерь и дисперсии. Изучен также вклад радиационной части решения с учетом возмущений и показано, что существует область значений параметров, в которой этим вкладом можно пренебречь.

5.2. Деформированные уравнения РМБ при двухфотонном поглощении

В [163] была предложена система уравнений, которые отвечают деформациям уравнений Каупа – Штойделя (26) и (27), описывающих СИП при двухфотонном резонансе:

$$\begin{aligned}
 r_{3,\zeta} &= \frac{i}{2}(s^* r - sr^*) - \frac{\bar{c}}{4} r_3, \\
 r_{,\zeta} &= isr_3 + igs_3 r - \frac{\bar{c}}{4} r, \quad (70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{3,\tau} &= -\frac{i}{2}(s^* r - sr^*) + \epsilon \frac{\bar{c}}{4} r_3, \\
 s_{,\tau} &= igr_3 s + iers_3 + \epsilon \bar{c} \left(if - \frac{g}{2} \right) r.
 \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon = 1$ отвечает двухфотонному поглощению, а $\epsilon = -1$ – ВКР. Параметр f определен как $f^2 = (\epsilon - g^2)/4$.

Другой пример деформации уравнений Каупа-Штойделя имеет вид

$$\begin{aligned}
 r_{3,\zeta} &= \frac{i}{2}(s^* r - sr^*) + 4\bar{h}s_3, \\
 r_{,\zeta} &= isr_3 + igs_3 r - 8\bar{h} \left(if + \frac{g}{2} \right) s, \quad (71)
 \end{aligned}$$

$$s_{3,\tau} = -\frac{i}{2}(s^* r - sr^*) - \bar{c}s_3,$$

$$s_{,\tau} = igr_3 s + iers_3 - \bar{c}s,$$

где $\bar{h} = if\bar{c}/[4\epsilon(if + g/2) - g/2]$. Большого внимания эти системы не привлекли.

5.3. Деформированные НУШ

В статье [170] развит метод задачи Римана для решения деформированного НУШ

$$ie_{,\tau} + e_{,\zeta\zeta} \pm 2|e|^2 e + \frac{i}{2\tau} e = 0, \quad (72)$$

которое содержит дополнительное слагаемое, линейное по полю и обратно пропорциональное времени (для пространственных солитонов) или координате (для временных солитонов). Само уравнение было представлено в [162] как пример деформации НУШ, его решение описывает цилиндрически расходящиеся волны в кубически-нелинейной среде. Эта деформация тривиальна в том смысле, что при подходящей замене переменных уравнение (72) можно свести к обычному НУШ.

Более общий пример деформации НУШ представлен в [171, 172]:

$$ie_{,\tau} + (f(\zeta)e)_{,\zeta\zeta} + 2f(\zeta)|e|^2 e + 2e \int_{-\infty}^{\zeta} f_{,\zeta_1} |e|^2 d\zeta_1 = 0. \quad (73)$$

Здесь пространственная неоднородность задана произвольной функцией $f(\zeta)$. При $f(\zeta) = 1$ получается обычное НУШ. Уравнение вполне интегрируемо и имеет решения в форме деформированных солитонов, которые в частных случаях выбора неоднородности движутся с ускорением.

5.4. Солитоны НУШ в неоднородной среде

Для описания электромагнитной волны в неоднородной среде в [14] было предложено уравнение

$$ie_{,\tau} + e_{,\zeta\zeta} + 2(|e|^2 - \alpha\zeta)e = 0, \quad (74)$$

которое, как было показано, может быть решено с помощью МОЗР при условии, что спектральный параметр линейно меняется с τ . Солитонное решение имеет следующий вид:

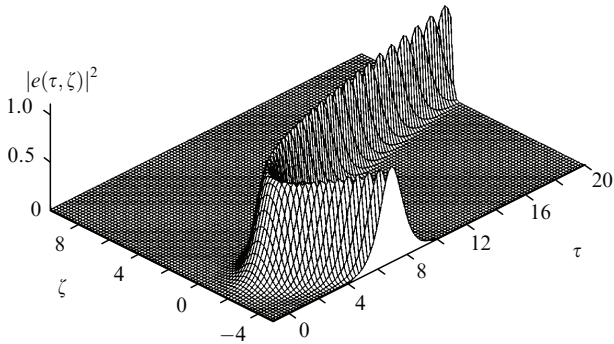


Рис.9. Разворот солитона в неоднородной среде – движение с постоянным ускорением.

$$e_s(\tau, \zeta) = \frac{2\eta \exp\{2i(\zeta - \alpha\tau)\zeta - 4i[\alpha^2\tau^3/3 - \alpha\zeta\tau^2 + (\zeta^2 - \eta^2)\tau]\}}{\cosh[2\eta(\zeta + 2\alpha\tau^2 - 4\zeta\tau - \zeta_0)]}. \quad (75)$$

Здесь параметры η, ζ , определяются из начальных условий, а ζ_0 – положение центра тяжести солитона в начальный момент времени. Если в стандартном солитоне положение центра тяжести линейно меняется со временем ($\zeta = \zeta_0 + 4\zeta\tau$), так что ζ имеет смысл групповой скорости, для деформированного солитона траектория центра тяжести дается выражением

$$\zeta = \zeta_0 + 4\zeta\tau - 2\alpha\tau^2.$$

Следовательно, солитон как целое движется с постоянным ускорением. При $\alpha > 0, \zeta > 0$ траектория движения солитона напоминает траекторию тела, брошенного вертикально вверх (рис.9). В [14] было найдено также N -солитонное решение и получена рекуррентная формула для вычисления интегралов движения.

Уединенные волны в среде, неоднородность которой описывается квадратичной функцией, в работе [173] изучались с помощью следующего уравнения:

$$ie_{,\tau} + e_{,\zeta\zeta} + 2(|e|^2 + \alpha\zeta^2)e = 0. \quad (76)$$

С помощью обобщенного МОЗР были найдены солитонные решения, соответствующие нестационарным и движущимся ускоренно импульсам. Интерес к этому уравнению обусловлен исследованиями бозе-конденсата ультрахолодных атомов. Если рассматривать конденсат, который находится в сигароподобной магнитной ловушке, а в продольном направлении удерживается с помощью оптической параболической ловушки, то уравнение Гросса – Питаевского [174] можно записать в виде (76).

В статье [175] рассмотрено НУШ с переменным коэффициентом в линейном слагаемом. Зависимость этого коэффициента от координаты дается параболической функцией, имеющей максимум при положительном значении координаты:

$$ie_{,\tau} + \frac{1}{2}e_{,\zeta\zeta} + |e|^2e + i\gamma e - \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\zeta^2\right)e = 0. \quad (77)$$

Найдено решение в форме уединенной волны. При определенных параметрах возможно отражение уединенной волны от неоднородности.

5.5. Солитоны неавтономного НУШ

Неавтономным нелинейным уравнением Шредингера называют уравнение

$$ie_{,\zeta} + \frac{1}{2}D(\zeta)e_{,\tau\tau} + R(\zeta)|e|^2e + i\gamma(\zeta)e = 0. \quad (78)$$

В некоторых случаях (например, для описания пространственных деформированных солитонов) переменные ζ и τ меняются местами. При определенном соотношении между коэффициентами с помощью замены переменных это уравнение может быть преобразовано в обычное НУШ.

При условии, что входящие в (78) коэффициенты, отвечающие за дисперсию групповых скоростей D , нелинейность R и диссипацию γ , связаны соотношением

$$2\gamma DR = RD_{,\zeta} - R_{,\zeta}D,$$

можно найти представление нулевой кривизны для (78) [176], а следовательно, многосолитонные решения неавтономного НУШ. Чтобы найти солитонное и двухсолитонное решения в [176] было использовано преобразование Дарбу, непосредственно следующее из уравнений МОЗР. Для односолитонного решения траектория центра тяжести солитона в плоскости (ζ, τ) задана уравнением

$$\tau = \tau_0 + a_1 \int_0^\zeta D(\xi)d\xi,$$

где a_1 – константа, определяемая из начальных условий. И если задать параметр дисперсии D периодической функцией, то солитон периодически будет менять направление движения (рис.10). Амплитуда солитона может расти, убывать или оставаться постоянной, что определяется выбором коэффициентов в (78). Важно отметить, что при этом столкновение солитонов не приводит к их разрушению. Такие деформированные солитоны являются истинными солитонами, т. е. решениями вполне интегрируемого уравнения, как показано в [177].

Помимо ярких солитонов с нулевой асимптотикой, НУШ имеет решения, которые называются серыми и темными солитонами и представляют собой движущийся провал интенсивности волны на постоянном ненулевом фоне. В случае неавтономного НУШ серые солитоны рассмотрены в [178]. При определенном соотношении между параметрами в уравнении (78) найдены солитонные решения. Было показано, что если первоначальный солитон имеет фазовую модуляцию (чирп), то серый деформированный солитон может испытывать самокомпрессию.

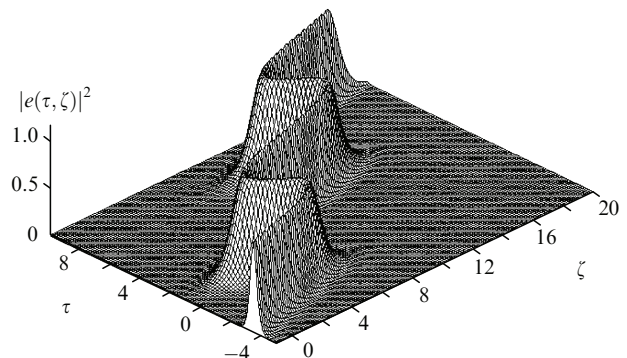


Рис.10. Движение солитона с переменным ускорением в среде с периодически меняющимися параметрами.

Обобщенное на двухкомпонентный случай неавтономное НУШ

$$\begin{aligned} ie_{1,\zeta} + \frac{1}{2}D(\zeta)e_{1,\tau\tau} + R(\zeta)(|e_1|^2 + |e_2|^2)e_1 + i\gamma(\zeta)e_1 &= 0, \\ ie_{2,\zeta} + \frac{1}{2}D(\zeta)e_{2,\tau\tau} + R(\zeta)(|e_1|^2 + |e_2|^2)e_2 + i\gamma(\zeta)e_2 &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

рассматривалось в [179]. Если потребовать выполнения соотношения

$$2\gamma \frac{R}{D} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{R}{D} \right)$$

между коэффициентами, описывающими дисперсию групповых скоростей, нелинейный отклик и диссипацию, то можно найти представление нулевой кривизны для системы (79) и, применив МОЗР, найти солитонные решения. В том числе двухсолитонные решения, которые описывают столкновение двух солитонов.

Недавно в [180] было рассмотрено неавтономное НУШ

$$ie_{,\zeta} + \frac{1}{2}D(\zeta)e_{,\tau\tau} + R(\zeta)|e|^2e - (2\alpha(\zeta)\tau + \Omega^2(\zeta)\tau^2)e = 0, \quad (80)$$

которое имеет солитонные решения с изменяющимися с ζ параметрами (фазовой и групповой скоростями, амплитудой и фазой). Такие солитоны названы в [180] неавтономными. Подобно обычным (с фиксированными параметрами) солитонам неавтономные солитоны взаимодействуют упруго. Более того, в [181] было показано, что путем ряда преобразований (80) переводится в стандартное НУШ.

6. Применение интегрируемых моделей

В нелинейной оптике существуют явления, для описания которых привлекаются вполне интегрируемые системы уравнений, как то НУШ, РМБ, уравнений трех волн и др., или предлагаются модели, анализ которых осуществляется с использованием формализма МОРЗ.

6.1. Прохождение ультракороткого импульса через тонкую пленку

Прохождение УКИ через границу раздела двух диэлектрических сред, на которой расположена тонкая (толщиной l меньше длины волны несущей волны) пленка резонансно поглощающих атомов, рассмотрено в ряде работ, среди которых стоит отметить [182]. Пусть тонкая пленка находится в точке $z = 0$ на оси, вдоль которой распространяется электромагнитная волна. Волновое уравнение имеет вид

$$E_{,zz} - n^2c^{-2}E_{,tt} = 4\pi c^{-2}P_{II}\delta(z).$$

Поляризация $P = n_a d\langle r_1 \rangle$, где r_1 определяется из решения уравнений Блоха (7). Показатель преломления n диэлектрических сред определен как $n(z) = 1$ при $z < 0$ и $n(z) = n > 1$ при $z > 0$. Вне пленки решение волнового уравнения для гармонической волны имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E^-(z, t) &= E_{in}\exp(ik_1z - i\omega t) \\ &+ E_{ref}\exp(-ik_1z - i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad z < 0, \end{aligned}$$

$$E^+(z, \omega) = E_{tr}\exp(ik_2z - i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad z > 0.$$

Здесь $k_1 = \omega/c$, $k_2 = \omega n/c$ – волновые числа падающей и преломленной волн. Амплитуды отраженной и прошедшей волн можно выразить через амплитуду падающей волны и поляризацию тонкой пленки. Для квазигармонической волны УКИ это может оказаться непросто. В [182] предлагается решать систему уравнений для вспомогательного поля $\tilde{E}(z, t)$, которое определяется уравнением

$$\tilde{E}_{,z} = i(4\pi\omega_0 n_a dl/n)\langle r_1(t) \rangle \delta(z).$$

Краевыми условиями являются выражения

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{E}(z, t) = E_{in}, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{E}(z, t) = E_{tr}.$$

Уравнение для $\tilde{E}(z, t)$ и уравнения Блоха (7), как было показано в [182], можно решить с помощью МОЗР и найти преломленный УКИ. Если считать, например, что огибающая падающей волны $E_{in}(t) = 2\eta^{-1}\text{sech}(\eta t)$, то огибающая преломленной волны будет иметь следующую форму:

$$E_{tr}(t) = 2\eta^{-1}\{\text{sech}(\eta t) + e^{i\varphi_0}\text{sech}[\eta(t - t_0)]\},$$

где сдвиг фазы φ_0 и t_0 определяются при решении линейных уравнений МОЗР. Таким образом, при когерентном взаимодействии УКИ с атомами тонкой пленки возникает импульс запаздывающего излучения.

Обобщение на случай поляризованного излучения или трехуровневых атомов пленки дано в [183]. Там же рассмотрен случай падения УКИ на тонкую пленку под произвольным углом. Показано, что число солитонов в отраженной и преломленной волнах зависит от угла падения.

6.2. Рамановский солитон

В [184] сообщалось о наблюдении аномального обратимого истощения накачки при комбинационном рассеянии и образовании короткого всплеска стокова излучения. Это явление интерпретировалось как образование солитона под действием случайного фазового сдвига в импульсе стокова излучения, а сам короткий всплеск с тех пор стали называть рамановским солитоном. Численное моделирование [185] показало, что механизм фазового сдвига может привести к усилению рамановского солитона даже при наличии затухания когерентности и отстройке от резонанса, и была выявлена возможность распространения устойчивого рамановского солитона в оптическом волокне. Экспериментальные результаты, подтверждающие предсказание о том, что квантовые флуктуации приводят к образованию спонтанного рамановского солитона, представлены в [186].

В работах [187, 188] рассмотрена модель, описывающая взаимодействие трех волн:

$$e_{1,\zeta} = -qe_2, \quad e_{2,\zeta} = q^*e_1, \quad q_\tau = -\vartheta q + e_1e_2. \quad (81)$$

В этих уравнениях e_1, e_2 – огибающие импульсов накачки и рассеянной волны; q – огибающая поляризации среды; ϑ – коэффициент затухания поляризации (когерентности). Задача с начальными условиями для этой системы уравнений решена в [188] с помощью МОЗР. Получено

условие, необходимое для возникновения рамановских солитонов, и определены их параметры.

Для интерпретации эксперимента из работы [184] в [189] использовалась другая модель, не учитывающая затухание когерентности:

$$e_{,\tau} = \gamma a_1 a_2^*, \quad a_{1,\zeta} = e a_2, \quad a_{2,\zeta} = e^* a_1. \quad (82)$$

Здесь a_1, a_2 – амплитуды возбужденного и основного состояний среды. Краевые условия

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} a_1 = 1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} a_2 = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} e = 0$$

отвечают предположению, что до образования солитона среда находилась в возбужденном состоянии. Таким образом, эта модель описывает распад возбужденного состояния с образованием импульса излучения. Уравнения решались с использованием МОЗР. Поскольку спектр спектральной задачи МОЗР не содержит дискретной части, наблюдаемый в эксперименте рамановский солитон на самом деле не соответствует решению уравнений (82). Для длинного импульса уравнения были затем модифицированы так, чтобы учесть потери затухания когерентности (фононной волны), но полученная система не является вполне интегрируемой.

Последующие исследования рамановского солитона проводились в [190–192] с использованием МОЗР, позволяющего решать краевые задачи на полуоси. Основное внимание при анализе ВКР сосредоточивалось на анализе несолитонной части спектра уравнения МОЗР.

6.3. Модель лазерного усилителя и сверхфлуоресценции

Для описания усиления электромагнитных импульсов при их прохождении через среду с инверсной населенностью было предложено использовать уравнения СИП [193]. Модель двухуровневого усилителя без потерь исследована в [194]. Было найдено решение уравнений СИП в автомодельной форме, которое следует из уравнения

$$v\phi_{,zz} + \phi_{,z} - \sin \phi = 0.$$

Проведенное численное решение показывает, что стационарного импульса нет, но если ввести линейные потери в волновое уравнение, то удастся получить стационарное решение [195], называемое π -импульсом. МОЗР в анализе модели лазерного усилителя впервые использован в [196]. Было установлено, что солитоны в этой модели отсутствуют. Задача о распространении УКИ в протяженном двухуровневом усилителе была переформулирована в [197, 198] в краевую задачу на полуоси. Показано, что усиливаемый импульс всегда имеет квазиавтомодельную форму. Вблизи переднего фронта УКИ описывается уравнением Пенлеве, тогда как на заднем фронте решение переходит в режим автомодельных колебаний высокой частоты.

Уравнения СИП были использованы в [199], чтобы описать явление суперфлуоресценции (т.е. формирование коротких импульсов света из флуктуаций поляризации в двухуровневой среде с инвертированной населенностью). В отличие от СИП импульсы суперфлуоресценции образуются из неустойчивого состояния резонансной среды, и МОЗР должен быть переформулирован для решения краевой задачи на полуоси времени. Решение этой проблемы обсуждалось в [191, 199, 200].

6.4. Развитие МОЗР и его применение в нелинейной оптике

Следует подчеркнуть, что развитие МОЗР на случай решения краевых задач на конечном интервале или полуоси позволяет строго описать переходные процессы при ВКР [189, 190] и ряд других процессов в нелинейной оптике [201, 202].

Для решения уравнений на конечном интервале в [200] с помощью МОЗР был развит метод эффективной S -матрицы. В качестве примера использования развитого формализма были изучены ГВГ и ВКР. Метод задачи Римана – Гильберта для интегрирования уравнений, заданных на полуоси, представлен в [202]. Рассмотрено применение этого подхода для развития теории возмущений, позволяющей анализировать системы, близкие ко вполне интегрируемым, а также приложения к случаю СИП и ВКР на ограниченном интервале. Показано, что благодаря дефазировке атомов может стабилизироваться рамановский солитон (рамановский всплеск электромагнитного поля).

6.4.1. Кноидальные волны

Кноидальными волнами периодические решения уравнения КдФ были названы по той причине, что они выражаются функцией sn , известной как косинус Якоби. Обычные гармонические волны следовало бы тогда называть косинусоидальными. Помимо решений, отвечающих уединенным волнам, вполне интегрируемые системы имеют также решения, описывающие периодические волны, более общие, чем кноидальные (см. сноску в п. 2.3). МОЗР послужил для построения периодических решений некоторых уравнений нелинейной оптики. Методом Уизема на основе МОЗР была развита теория рождения солитонов на фронте длинного импульса накачки при ДФП и ВКР в модели Каупа – Штойделя [28] [82, 203]. Периодические решения, описывающие четырехволновое взаимодействие идущих навстречу друг другу волн в условиях ДФП, впервые найдены в [204]. Однако надо отметить, что физического смысла эти решения не имеют, поскольку для бесконечно протяженных во времени периодических волн пренебрегать релаксацией поляризации и разности населенностей нельзя.

6.4.2. Связи с моделями теории поля

Интересно, что как уравнения СИП МакКолла – Ханна, так и уравнения ОРМБ в случае, когда отсутствует неоднородное уширение резонансной линии и выполнен точный резонанс, могут быть отображены на уравнения движения модели главного кирального поля [205]. С той же моделью связаны уравнения Каупа – Штойделя, описывающие СИП при двухфотонном резонансе [206]. Авторы работы [207] недавно провели исследование различных обобщений уравнений ОРМБ для многоуровневых сред и нашли, что эти системы обладают скрытой неабелевой симметрией.

Аналогично тому, как унитарное преобразование связывает гамильтонианы различных теорий оптического резонанса и квантовой оптики, было найдено [208], что оно позволяет также получать из представления Лакса одной точно интегрируемой системы представление Лакса другой системы. Как пример применения унитарных преобразований в теории интегрируемых систем в [209, 210] рассматривалась модель распространения различно поляризованных импульсов в условиях КР и ДФП на переходах $j_1 = 0 \rightarrow j_2 = 0$ и $j_1 = 1 \rightarrow j_2 = 1$. Модели получены путем применения унитарного преобразования к

представлению Лакса уравнений поляризационной теории двойного резонанса в трехуровневой системе с Λ -конфигурацией энергетических уровней.

6.4.3. Метод штарковского переключения для оптических солитонов

Одним из методов когерентной спектроскопии является техника (метод) штарковского переключения. Резонансная атомная или молекулярная среда помещается в поле непрерывного лазерного излучения, частота несущей волна которого отличается от частоты перехода. Затем с помощью импульса постоянного электрического поля в силу эффекта Штарка частота перехода меняется так, что оказывается в резонансе. Подобным образом можно «включать» и «выключать» резонансное взаимодействие. С помощью такой техники изучались когерентные переходные процессы: оптические нутации, свободный распад индукции, фотонное эхо, когерентные рамановские биения.

Тем же методом можно возбуждать оптические солитоны в резонансной среде. На основе МОЗР развита теория [21], описывающая распространение УКИ при условии, что резонансное взаимодействие с атомами среды «включается» дополнительным штарковским импульсом. В основу МОЗР положена нетрадиционная спектральная задача. Обобщение на случай поляризованных УКИ представлено в [212].

6.4.4. Солитоны и электромагнитно-индуцированная прозрачность

Модель трехуровневых атомов является простейшей моделью, которая используется при изучении явления электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭМИП). В [213] показано, что двухфотонная самоиндуцированная прозрачность может возникнуть благодаря подавлению релаксации в среде, так что режим распространения электромагнитного импульса станет когерентным.

В работах [214, 215] взаимодействие солитонов в условиях ЭМИП рассмотрено на основе системы уравнений (21). Замедление электромагнитного импульса в условиях ЭМИП обсуждалось в [216, 217] на основе модели трехуровневых атомов с Λ -конфигурацией энергетических уровней. Показано, что групповая скорость солитона монотонно уменьшается с увеличением интенсивности управляющего лазерного поля.

6.4.5. Солитоны в искусственных средах

В последние годы возник и нарастает интерес к искусственным материалам (метаматериалам), которые могут проявлять необычные электродинамические свойства. Отрицательное преломление – наиболее обсуждаемое свойство таких материалов [218]. На сегодняшний день подобных сред, прозрачных в оптическом диапазоне, нет, но исследование их возможных нелинейных свойств активно ведется. В прозрачных метаматериалах возможны солитоны НУШ или солитоны двухкомпонентного НУШ [219, 220]. Интересные явления могут ожидать в метаматериалах благодаря одновременному существованию в них прямых и обратных волн* [221]. На возможность СИП для обратной волны указано в недавней работе [222].

В [223] описана искусственная среда, состоящая из заполненных атомами и фотонами микрорезонаторов.

*В изотропной среде у обратной волны фазовая и групповая скорости направлены в противоположные стороны, тогда как в прямой волне направления этих скоростей одинаковы.

Показано, что распространение внешнего поля в условиях комбинационного резонанса с атомами микрорезонатора при участии фотонов микрорезонатора описывается в некоторых случаях обычными уравнениями МБ для однофотонного резонанса. При этом об атомах и фотонах микрорезонатора можно говорить как о новом элементарном излучателе – атомно-фотонном кластере, на состояниях которого реализуются неприводимые представления алгебры динамической симметрии задачи, т. е. полиномиальной алгебры третьего порядка.

7. Заключение

Последовательное использование МОЗР привело к открытию множества уравнений, обладающих солитонными решениями. Солитонные решения, как правило, являются устойчивыми по отношению к взаимным столкновениям и малым возмущениям (хотя эта устойчивость не асимптотическая – малые возмущения остаются малыми, а сами солитоны могут изменять свои параметры). Это свойство делает поиск таких уравнений привлекательным для развития теорий нелинейных волн. В физике очень мало моделей основано на вполне интегрируемых системах, поэтому они могут рассматриваться как первый порядок теории возмущений. Была развита специальная теория возмущений для уравнений, близких к интегрируемым, которая широко используется в разных областях физики, в том числе и в нелинейной оптике [167, 168].

Существует обширная область нелинейной оптики, где термин солитон используется для обозначения устойчивых (живучих, robust soliton) электромагнитных импульсов. Системы уравнений, описывающие их распространение и взаимодействие, не являются интегрируемыми и даже теория возмущений здесь не эффективна. Самый известный пример – щелевые (брэгговские) солитоны, которые могут распространяться в периодических нелинейных средах. Помимо них изучаются вихревые (топологические) солитоны, параметрические (в частности квадратичные) солитоны, солитоны в фотонных кристаллах, в решетках из волноводов, диссипативные и некогерентные солитоны. Всем этим как бы солитонам посвящены недавно вышедшие книги [224 – 227].

Мне доставляет удовольствие поблагодарить моих коллег А.М.Башарова, С.О.Елютина, И.Р.Габитова, Н.Н.Розанова, Е.В.Казанцеву, Дж.-Ги Капуто, А.А.Заболотского, Б.И.Манцызова, С.В.Сазонова и С.А.Козлова за многократные обсуждения различных вопросов теории солитонов, их места в нелинейной оптике и в задачах распространения предельно коротких импульсов в резонансных и нерезонансных средах. Я благодарен Laboratoire de Mathematiques, INSA de Rouen за поддержку и гостеприимство в период подготовки статьи. Работа частично поддерживалась РФФИ (грант № 09-02-00701-а) и Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

8. Литература

1. Lax P.D. *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**, 467 (1968).
2. Аскарьян Г.А. *ЖЭТФ*, **42**, 1568 (1962).
3. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 908 (1967).
4. Таланов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **2**, 218 (1965).
5. Kelley P.L. *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 1005 (1965).

6. Карпман В.И., Крушкаль Е.М. *ЖЭТФ*, **55**, 530 (1968).
7. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. *УФН*, **93**, 19 (1967).
8. Власов С.Н., Таланов В.И. *Самофокусировка волн* (Н.Новгород: изд-е ИПФ РАН, 1997).
9. *Self-focusing: Past and Present: Fundamentals and Prospects (Topics in Applied Physics)* Boyd R.W., Lukishova S.G., Shen Y.R. (Eds.) (New York: Springer-Verlag, 2009).
10. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ*, **61**, 118 (1971).
11. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ*, **64**, 1627 (1973).
12. Манаков С.В. *ЖЭТФ*, **65**, 1392 (1973).
13. Захаров В.Е., Рубенчик Л.М. *ЖЭТФ*, **65**, 997 (1973).
14. Chen H.H., Liu C.S. *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 693 (1976).
15. Манаков С.В. *ЖЭТФ*, **65**, 505 (1973).
16. Hasegawa A., Tappert F. *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 142 (1973).
17. Hasegawa A., Tappert F. *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 171 (1973).
18. Jain M., Tzoar N. *J. Appl. Phys.*, **49**, 4649 (1978).
19. Bendow B., Gianino P.D., Tzoar N., Jain M. *J. Opt. Soc. Am.*, **70**, 539 (1980).
20. Bloom D.M., Mollenauer L.F., Lin Ch., Taylor N., Del Gaudio A.M. *Opt. Lett.*, **4**, 297 (1979).
21. Mollenauer L.F., Stolen R.H., Gordon J.P. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1095 (1980).
22. Mollenauer L.F., Stolen R.H., Islam M.N. *Opt. Lett.*, **10**, 229 (1985).
23. Захаров В.Е., Манаков С.В. *ТМФ*, **19**, 332 (1974).
24. Olmedilla E. *Physica D*, **25**, 330 (1987).
25. Выслоух В.А. *УФН*, **136**, 519 (1982).
26. Kodama Yu. *J. Stat. Phys.*, **39**, 597 (1985).
27. Kumar A. *Phys. Rep. C*, **187**, 63 (1990).
28. Hasegawa A. *Rep. Prog. Phys.*, **65**, 6, 999 (2002).
29. Hasegawa A. *Optical Solitons in Fibers* (Berlin: Springer-Verlag, 1990).
30. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996).
31. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987).
32. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов* (М.: Наука, 1986).
33. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980).
34. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
35. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
36. Slusher R.F. *Progr. Opt.*, **12**, 53 (1974).
37. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
38. Lamb G.L. Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
39. Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K. *J. Phys. A*, **6**, 1337 (1973).
40. Lamb G.L. Jr. *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 196 (1973).
41. Тахтаджян Л.А. *ЖЭТФ*, **66**, 476 (1974).
42. Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K., Eilbeck J.C. *Lett. Nuovo Cimento*, **8**, 775 (1973).
43. Lamb G.L. Jr. *Phys. Rev. A*, **9**, 422 (1974).
44. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. *J. Math. Phys.*, **15**, 1852 (1974).
45. Каур Д.Д. *Phys. Rev. A*, **16**, 704 (1977).
46. Gibbon J.D., Eilbeck J.C. *J. Phys. A*, **5**, L122 (1972).
47. Caudrey P.J., Gibbon J.D., Eilbeck J.C., Bullough R.K. *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 237 (1973).
48. Caudrey P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Bullough R.K. *J. Phys. A*, **6**, L53 (1973).
49. Rosanov N.N., Kozlov V.V., Wabnitz S. *Phys. Rev. A*, **81**, 043815 (2010).
50. Eilbeck J.C., Bullough R.K. *J. Phys. A*, **5**, 820 (1972).
51. Bullough R.K., Jack P.M., Kitchenside P.W., Saunders R. *Phys. Scr.*, **20**, 364 (1979).
52. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
53. Каур Д.Д. *Physica D*, **3**, 374 (1981).
54. Каур Д.Д. *Stud. Appl. Math.*, **62**, 75 (1980).
55. Захаров В.Е., Манаков С.В. *ЖЭТФ*, **69**, 1654 (1975).
56. Каур Д.Д. *Stud. Appl. Math.*, **55**, 9 (1976).
57. Chu F.Y.F., Scott A.C. *Phys. Rev. A*, **12**, 2060 (1975).
58. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики* (М.: МИФИ, 2008).
59. Enns R.H., Guenther D.V., Rangnerkar S.S. *Canad. J. Phys.*, **58**, 1468 (1980).
60. Ghosh Roy D.N., Rao D.V.G.L.N. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2308 (1991).
61. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **57**, 564 (1984).
62. Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **87**, 1594 (1984).
63. Башаров А.М., Маймистов А.И., Скляров Ю. М. *Оптика и спектроскопия*, **62**, 418 (1987).
64. Steudel H. *J. Mod. Opt.*, **35**, 693 (1988).
65. Chowdhury Roy A., De Mrityunjoy. *Aust. J. Phys.*, **41**, 735 (1988).
66. Chowdhury Roy A., De Mrityunjoy. *Inverse Probl.*, **4**, 901 (1988).
67. Konopnicki M.J., Ebedly J.H. *Phys. Rev. A*, **24**, 2567 (1981).
68. Kujański A. *Opt. Commun.*, **43**, 375 (1982).
69. Konopnicki M.J., Drummond P.D., Ebedly J.H. *Appl. Phys. B*, **28**, 103 (1982).
70. Маймистов А.И., Скляров Ю.М. *Оптика и спектроскопия*, **59**, 760 (1985).
71. Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **94**, 61 (1988).
72. Maimistov A.I., Basharov A.M., Elyutin S.O., Sklyarov Yu.M. *Phys. Rep.*, **191**, 1 (1990).
73. Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1999).
74. Zabolotskii A.A. *Phys. Lett. A*, **113**, 459 (1986).
75. Беленов Э.М., Полуэктов И.А. *ЖЭТФ*, **56**, 1407 (1969).
76. Takatsujii M. *Phys. Rev. A*, **11**, 619 (1975).
77. Steudel H. *Ann. Phys. (DDR)*, **34**, 188 (1977).
78. Steudel H. *Physica D*, **6**, 155 (1983).
79. Каур Д.Д. *Physica D*, **6**, 143 (1983).
80. Meinel R. *Opt. Commun.*, **49**, 224 (1984).
81. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **93**, 84 (1987).
82. Камчатнов А.М. *ЖЭТФ*, **109**, 786 (1996).
83. Steudel H., Каур Д.Д. *J. Phys. A*, **33**, 1445 (2000).
84. Zabolotskii A.A. *Phys. Lett. A*, **127**, 83 (1988).
85. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **97**, 127 (1990).
86. Zabolotskii A.A. *Phys. Rev. A*, **50**, 3384 (1994).
87. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **107**, 1100 (1995).
88. Власов Р.А., Докторов Е.В. *Докл. АН БССР*, **26**, 322 (1982).
89. Doctorov E.V., Vlasov R.A. *Opt. Acta*, **30**, 223 (1983).
90. Маймистов А.И., Манькин Э.А. *ЖЭТФ*, **85**, 1177 (1983).
91. Kakei S., Satsuma J. *J. Phys. Soc. Japan*, **63**, 885 (1994).
92. Башаров А.М., Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **66**, 167 (1989).
93. Маймистов А.И., Башаров А.М. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **62**, 354 (1998).
94. Nakazawa M., Yamada E., Kubota H. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2625 (1991).
95. Nakazawa M., Kimura Y., Kurokawa K., Suzuki K. *Phys. Rev. A*, **45**, R23 (1992).
96. Porsezian K., Nakkeeran K. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2941 (1995).
97. Nakkeeran K., Porsezian K. *J. Phys. A*, **28**, 3817 (1995).
98. Nakkeeran K. *Phys. Lett. A*, **275**, 415 (2000).
99. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. *ТМФ*, **53**, 55 (1982).
100. Zabolotskii A.A. *Phys. Lett. A*, **124**, 500 (1987).
101. Kodama Yu., Hasegawa A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**, 510 (1987).
102. Potasek M.J. *J. Appl. Phys.*, **65**, 941 (1989).
103. Каур Д.Д., Newell A.C. *J. Math. Phys.*, **19**, 798 (1978).
104. Kawata T., Sakai J.-I., Kobayashi N. *J. Phys. Soc. Japan*, **48** (4), 1371 (1980).
105. Hirota R. *J. Math. Phys.*, **14**, 805 (1973).
106. Sasa N., Satsuma J. *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, 409 (1991).
107. Mihalache D., Torner L., Moldoveanu F., Panoiu N.-C., Truta N. *Phys. Rev. E*, **48**, 4699 (1993).
108. Schafer T., Wayne C.E. *Physica D*, **196**, 90 (2004).
109. Sakovich A., Sakovich S. *J. Phys. Soc. Japan*, **74**, 239 (2005).
110. Victor K.K., Thomas B.V., Kofane T.C. *J. Phys. A*, **40**, 5585 (2007).
111. Brunelli J.C. *Phys. Lett. A*, **353**, 475 (2006).
112. Matsuno Y. *J. Phys. Soc. Japan*, **76**, 084003 (2007).
113. Sakovich S. *J. Phys. Soc. Japan*, **77**, 123001 (2008).
114. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **76**, 636 (1994).
115. Wadati M. *J. Phys. Soc. Japan*, **34**, 1289 (1973).
116. Беленов Э.М., Назаркин А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 252 (1990).
117. Leblond H., Mihalache D. *Phys. Rev. A*, **79**, 063835 (2009).
118. Konno K., Kameyama W., Sanuki H. *J. Phys. Soc. Japan*, **37**, 171

- (1974).
119. Leblond H., Sazonov S.V., Mel'nikov I.V., Mihalache D., Sanchez F. *Phys. Rev. A*, **74**, 063815 (2006).
 120. Козлов С.А., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **111**, 404 (1997).
 121. Козлов С.А. *Оптика и спектроскопия*, **84**, 979 (1998).
 122. Bespalov V.G., Kozlov S.A., Shpolyanskiy Yu.A., Walmsley I.A. *Phys. Rev. A*, **66**, 013811 (2002).
 123. Скобелев С.А., Ким А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **80**, 727 (2004).
 124. Maimistov A.I., Caputo J.-G. *Physica D*, **189**, 107 (2004).
 125. Kazantseva E.V., Maimistov A.I., Caputo J.-G. *Phys. Rev. E*, **71**, 056622 (2005).
 126. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000).
 127. Bavli R., Band Y.B. *Phys. Rev. A*, **43**, 5039 (1991).
 128. Calderon O.G., Melle S., Gonzalo I. *Phys. Rev. A*, **65**, 023811 (2002).
 129. Koćiac S., Ikončić Z., Milanovic V. *Opt. Commun.*, **140**, 89 (1997).
 130. Casperson L.W. *Phys. Rev. A*, **57**, 609 (1998).
 131. Agrotis M.A., Ercolani N.M., Glasgow S.A., Moloney J.V. *Physica D*, **138**, 134 (2000).
 132. Caputo J.-G., Maimistov A.I. *Phys. Lett. A*, **296**, 34 (2002).
 133. Agrotis M.A. *Phys. Lett. A*, **315**, 81 (2003).
 134. Maimistov A.I., Caputo J.-G. *Opt. Spectrosc.*, **94**, 245 (2003).
 135. Agrotis M.A. *Physica D*, **183**, 141 (2003).
 136. Glasgow S.A., Agrotis M.A., Ercolani N.M. *Physica D*, **12**, 82 (2005).
 137. Ustinov N.V. *Breather-like Pulses in a Medium with the Permanent Dipole Moment*, arXiv: nlin.SI/0512056.
 138. Сазонов С.В., Устинов Н.В. *Квантовая электроника*, **35**, 701 (2005).
 139. Сазонов С.В., Устинов Н.В. *Письма в ЖЭТФ*, **83**, 573 (2006).
 140. Елютин С.О. *ЖЭТФ*, **128**, 47 (2005).
 141. Nogami Y., Warke C.S. *Phys. Lett. A*, **59**, 251 (1976).
 142. Morris H.C., Dodd R.K. *Phys. Scr.*, **20**, 505 (1979).
 143. Tsuchida T., Wadati M. *Phys. Lett. A*, **257**, 53 (1999).
 144. Nakkeeran K., Porsezian K., Sundaram P.Sh., Mahalingam A. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1425 (1998).
 145. Башаров А.М., Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **68**, 1112 (1990).
 146. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **133**, 970 (2008).
 147. Zabolotskii A.A. *Physica D*, **237**, 540 (2008).
 148. Zabolotskii A.A. *Phys. Rev. E*, **77**, 036603 (2008).
 149. Zabolotskii A.A. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **173**, 175 (2009).
 150. Заболотский А.А. *Письма в ЖЭТФ*, **77**, 558 (2003).
 151. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **125**, 1229 (2004).
 152. Steudel H., Zabolotskii A.A. *J. Phys. A*, **37**, 5047 (2004).
 153. Steudel H., Zabolotskii A.A., Meinel R. *Phys. Rev. E*, **72**, 056608 (2005).
 154. Zabolotskii A.A. *Phys. Rev. E*, **75**, 036612 (2007).
 155. Tratnik M.S., Sipe J.E. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1104 (1987).
 156. Захаров В.Е., Михайлов А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **45**, 279 (1987).
 157. Mikhailov A.V., Wabnitz S. *Opt. Lett.*, **15**, 1055 (1990).
 158. Чередник И.В. *ТМФ*, **47**, 225 (1981).
 159. Захаров В.Е., Михайлов А.В. *ЖЭТФ*, **74**, 1953 (1978).
 160. Grimshaw R. *Proc. Royal Soc., London, A*, **368** (1734), 377 (1979).
 161. Herrera J.J.E. *J. Phys. A*, **17**, 95 (1984).
 162. Бурцев С.П., Захаров В.Е., Михайлов А.В. *ТМФ*, **70**, 323 (1987).
 163. Burtsev S.P., Gabitov I.R. *Phys. Rev. A*, **49**, 2065 (1994).
 164. Porsezian K., Mahalingam A., Sundaram Sh.P. *Chaos, Solitons & Fractals*, **12**, 1137 (2001).
 165. Porsezian K., Seenuvasakumaran P., Ganapathy R. *Phys. Lett. A*, **348**, 233 (2006).
 166. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **121**, 1012 (2002).
 167. Карпман В.И., Маслов Е.М. *ЖЭТФ*, **75**, 504 (1978).
 168. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 763 (1989).
 169. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **120**, 749 (2004).
 170. De M., Roy Chowdhury A. *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, 3637 (1991).
 171. Balakrishnan R. *Physica D*, **16**, 405 (1985).
 172. Balakrishnan R. *Phys. Rev. A*, **32**, 1144 (1985).
 173. Balakrishnan R. *Physica D*, **18**, 303 (1986).
 174. Пигаевский Л.П. *УФН*, **176**, 345 (2006).
 175. Gupta M.R., Som B.K., Dasgupta B. *Phys. Lett. A*, **69**, 172 (1978).
 176. Ruiyu Hao, Lu Li, Zhonghao Li, Wenrui Xue, Guosheng Zhou. *Opt. Commun.*, **236**, 79 (2004).
 177. Sundaram P.Sh., Mahalingam A., Alagesa T. *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, 1412 (2008).
 178. Juanfen Wang, Lu Li, Suotang Jia. *Opt. Commun.*, **274**, 223 (2007).
 179. Tian J., Jihong Li, Kang L., Zhou G. *Phys. Scr.*, **72**, 394 (2005).
 180. Serkin V.N., Hasegawa A., Belyaeva T.L. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 074102 (2007).
 181. Kundu A. *Phys. Rev. E*, **79**, 015601(R) (2009).
 182. Рупасов В.И., Юдсон В.И. *ЖЭТФ*, **93**, 494 (1987).
 183. Башаров А.М., Маймистов А.И., Манькин Э.А. *ЖЭТФ*, **97**, 1530 (1990).
 184. Druhl K., Wenzel R.G., Carlsten J.L. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1171 (1983).
 185. Wolfson R., Druhl K. *Opt. Lett.*, **14**, 125 (1989).
 186. MacPherson D.C., Swanson R.C., Carlsten J.L. *Phys. Rev. A*, **40**, 6745 (1987).
 187. Druhl K., Alsing G. *Physica D*, **20**, 429 (1986).
 188. Kaup D.J. *Physica D*, **19**, 125 (1986).
 189. Claude C., Leon J. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 3479 (1995).
 190. Leon J., Mikhailov A.V. *Phys. Lett. A*, **253**, 33 (1999).
 191. Leon J. *Phys. Rev. A*, **47**, 3264 (1993).
 192. Moskovchenko E.A., Kotlyarov V.P. *J. Phys. A*, **39**, 15013 (2006).
 193. Басов Н.Г., Амбарцумян Р.В., Зуев В.С., Крюков П.Г., Летохов В.С. *ЖЭТФ*, **50**, 23 (1966).
 194. Lamb G.L. Jr. *Phys. Lett. A*, **29**, 507 (1969).
 195. Armstrong G.A., Courtens E. *IEEE J. Quantum Electron.*, **4**, 411 (1968).
 196. Lamb G.L., Jr. *Phys. Rev. A*, **12**, 2052 (1975).
 197. Манаков С.В. *ЖЭТФ*, **83**, 68 (1982).
 198. Манаков С.В., Новокшенов В. Ю. *ТМФ*, **69**, 40 (1986).
 199. Габитов И.Р., Захаров В.Е., Михайлов А.В. *ТМФ*, **63**, 11 (1985).
 200. Steudel H., Kaup D.J. *J. Phys. A*, **32**, 6219 (1999).
 201. Steudel H., Kaup D.J. *J. Phys. A*, **33**, 1445 (2000).
 202. Doctorov E.V., Shchesnovich V.S. *Inverse Problems*, **17**, 971 (2001).
 203. Kamchatnov A.M., Steudel H. *Phys. Lett. A*, **226**, 355 (1997).
 204. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **107**, 1100 (1995).
 205. Переломов А.М. *УФН*, **134**, 577 (1981).
 206. Maimistov A.I. *Phys. Lett. A*, **144**, 11 (1990).
 207. Park Q.-H., Shin H.J. *Phys. Rev. A*, **57**, 4621 (1998).
 208. Башаров А.М. *ЖЭТФ*, **97**, 169 (1990).
 209. Башаров А.М. *Оптика и спектроскопия*, **93**, 625 (2002).
 210. Башаров А.М. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **66**, 357 (2002).
 211. Башаров А.М., Кашурникова О.В. *Оптика и спектроскопия*, **99**, 820 (2005).
 212. Башаров А.М. *ЖЭТФ*, **128**, 987 (2005).
 213. Nazarkin A., Netz R., Sauerbrey R. *Phys. Rev. A*, **74**, 041806(R) (2006).
 214. Wadati M. *J. Phys. Soc. Japan*, **77**, 024003 (2008).
 215. Kumar V.R., Radha R., Wadati M. *Phys. Rev. A*, **78**, 041803(R) (2008).
 216. Rybin A.V., Vadeiko I.P., Bishop A.R. *J. Phys. A*, **38**, L177 (2005).
 217. Rybin A.V., Vadeiko I.P., Bishop A.R. *J. Phys. A*, **38**, L357 (2005).
 218. Агранович В.М., Гаршштейн Ю.Н. *УФН*, **176**, 1052 (2006).
 219. Marklund M., Shukla P.K., Steno L., Brodina G. *Phys. Lett. A*, **341**, 231 (2005).
 220. Lazarides N., Tsironis G.P. *Phys. Rev. E*, **71**, 036614 (2005).
 221. Maimistov A.I., Gabitov I.R. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **147**, 265 (2007).
 222. Zeng J., Zhou J., Kurizki G., Opatrny T. *Phys. Rev. A*, **80**, 061806(R) (2009).
 223. Башаров А.М. *ЖЭТФ*, **137**, 1090 (2010).
 224. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов* (М.: Физматлит, 2005).
 225. Маломед Б.А. *Контроль солитонов в периодических средах* (М.: Физматлит, 2009).
 226. Манцызов Б.И. *Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов* (М.: Физматлит, 2009).
 227. *Диссипативные солитоны*. Под ред. Н.Ахмедиева и А.Анкевича (М.: Физматлит, 2008).