

# Автоволны при двухволновом смешении в фоторефрактивных средах

П.А.Прудковский

*Аналитически и численно исследована фазовая часть системы уравнений, описывающей двухволновое смешение в фоторефрактивной сильно инерционной среде. Показано, что в процессе эволюции решение системы проходит через ряд квазистационарных состояний, переключение между которыми осуществляется путем прохождения нелинейной волны. Скорость и профиль такой «волны переключения» полностью определяются этими состояниями, что является признаком автоволнового процесса. Полученные результаты позволяют объяснить принципиальную неустранимость флуктуаций интенсивности света в процессе развития двухволнового смешения в фоторефрактивных средах при достаточно больших интенсивностях световых полей.*

**Ключевые слова:** фоторефракция, волновое смешение, автоволны.

## 1. Введение

Фоторефрактивными называют среды, показатель преломления которых меняется под действием света. Обычно термин «фоторефракция» применяется, если изменения показателя преломления происходят довольно медленно и для описания процессов распространения света в среде недостаточно использовать феноменологический тензор кубической восприимчивости, не учитывающий запаздывания среды. Причиной столь медленных изменений обычно является перераспределение электронной плотности в кристалле, которое приводит к появлению статического электрического поля, модулирующего показатель преломления. В масштабах нелинейной оптики фоторефрактивная нелинейность может иметь гигантское время отклика: в кристаллах ниобата лития, легированного атомами меди или железа, характерное максвелловское время  $\tau_M$  может составлять секунды, часы и месяцы [1,2].

Аналитическое описание волнового смешения в таких средах аналогично описанию волнового смешения в средах с обычной кубической нелинейностью только в стационарном случае. Впрочем, получить точное решение для взаимодействия трех и более мод электромагнитного излучения в нелинейной среде даже в стационарных условиях можно лишь в отдельных случаях [3, 4], поэтому часто приходится ограничиваться численным расчетом поведения модели.

Необходимость описания динамики волнового смешения с учетом немгновенности отклика среды на электромагнитное поле резко усложняет задачу – в этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд мод поля превращается в систему уравнений в частных производных. Аналогичная с математической точки зрения задача

возникает в связи с рассмотрением процессов распространения в нелинейной среде предельно коротких импульсов света [5].

За последние 30 лет особенности двухволнового смешения в фоторефрактивных средах неоднократно исследовались в различных экспериментальных условиях [4, 6–11]. В ряде экспериментов с фотоиндуцированным рассеянием света (ФИРС) было показано, что при небольших интенсивностях световых полей эффективность перекачки энергии из одной моды света в другую нарастает плавно и монотонно [7]. Но с увеличением интенсивности света эффективность энергообмена между модами начинает флуктуировать достаточно сложным и непредсказуемым образом. Например, в работе [9] при смешении двух пучков света с интенсивностями, различающимися на три порядка, в легированном атомами меди кристалле ниобата лития (помещен в электролит для подавления поверхностных полей) интенсивность слабого пучка вела себя так, как показано на рис. 1,а. Неоднократно делались попытки объяснить подобные флуктуации электрическими разрядами внутри фоторефрактивного кристалла или иными паразитными эффектами. Однако в результате численного исследования математической модели двухволнового смешения в фоторефрактивной среде было показано [12], что подобные флуктуации возникают даже в отсутствие каких-либо источников шума (рис.1,б). Данная работа посвящена аналитическому исследованию механизма возникновения неустойчивостей в такой системе.

## 2. Динамика фазовой подсистемы

В рамках классической модели двухволнового смешения в фоторефрактивной среде уравнения для амплитуд мод для описанных выше экспериментальных условий имеют следующий вид [4, 10, 13, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} &= ig^{\mathcal{E}} E_2, \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} &= ig^{\mathcal{E}*} E_1, \end{aligned} \quad (1)$$

П.А.Прудковский. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vysogota@gmail.com

Поступила в редакцию 12 октября 2010 г.

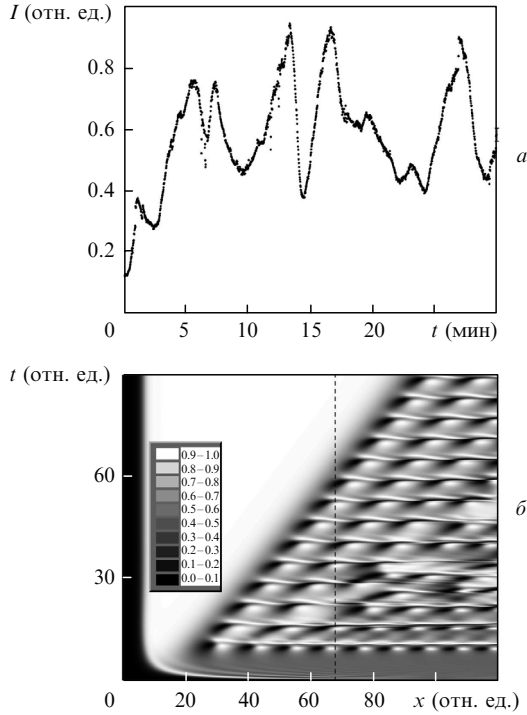


Рис. 1. Двухволновое смешение в фоторефрактивной среде: экспериментальная зависимость интенсивности слабого пучка света от времени при двухволновом смешении в фоторефрактивном кристалле  $\text{LiNbO}_3:\text{Cu}$  [9] (интенсивность сильного пучка света  $I = 20$  мВт) (а) и численное решение системы (1) – зависимость интенсивности сигнала пучка света от времени и длины кристалла (штриховой кривой показано соответствие рис. 1.а) [12] (б).

$$\tau_M \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathcal{E} = \gamma E_1 E_2^*.$$

Интерференционная картина, образованная двумя модами электромагнитного поля  $E_1$  и  $E_2$ , приводит к модуляции показателя преломления электростатическим полем  $\mathcal{E}$ , т. е. к постепенному росту объемной дифракционной решетки, на которой происходит перераспределение энергии между модами поля. Коэффициенты  $g$  и  $\tau_M$  определяют только масштаб взаимодействия, поэтому на будущее мы избавимся от них, сделав замену  $\tilde{t} = t/\tau_M$  и  $\tilde{x} = gx$ . Коэффициент  $\gamma = \beta/\sigma$ , где  $\sigma$  – проводимость среды, а  $\beta$  – компонента фотогальванического тензора [15, 16], который как раз и ответствен за возникновение фоторефракции. Учитывая, что фотогальванический тензор в общем случае имеет как действительную, так и мнимую часть, можно записать  $\gamma = be^{i\delta}$ .

В данной системе уравнений не учтены зависимость фотопроводимости от координат (что оправданно, если интенсивность одного пучка света намного больше интенсивности другого), а также возможное влияние полей поверхностных зарядов, возникающих, если фоторефрактивный кристалл находится в «разомкнутом» состоянии [17].

С учетом закона сохранения энергии  $|E_1|^2 + |E_2|^2 = I_0 = \text{const}$  и неопределенности общей фазы электромагнитного поля система (1) – это четыре действительных уравнения, способ решения которых в общем случае нам неизвестен. Направление перекачки энергии определяется соотношением фаз электромагнитного поля  $E_k = \sqrt{I_k} e^{i\varphi_k}$  и электростатического поля  $\mathcal{E} = Fe^{i\chi}$ . Далее нас будет интересовать именно фазовая часть системы (1). Выде-

лим два уравнения, описывающих эволюцию фаз  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $\psi = \chi - \delta$ :

$$\psi_t = -A \sin(\psi + \varphi), \quad (2)$$

$$\varphi_x = -B \sin(\psi + \varphi - \alpha),$$

где  $A = b\sqrt{I_1 I_2}/F$ ;  $B = F(I_1 - I_2)/\sqrt{I_1 I_2}$ ; нижние индексы отвечают частной производной по соответствующей переменной. Параметр  $\alpha = \pi/2 - \delta$ , определяющий соотношение мнимой и действительной частей фотогальванического тензора, – существенная характеристика фоторефрактивного отклика. Хорошо известно [18, 19], что стационарный энергообмен на несмещенной дифракционной решетке, возникающей в случае действительного фотогальванического тензора ( $\delta = 0$ ), невозможен. С другой стороны, в случае чисто мнимого фотогальванического тензора ( $\delta = \pi/2$ ) или диффузионного механизма фоторефракции, т. е. решетки, сдвинутой на четверть длины волны относительно интерференционной картины, система уравнений (1) сводится к уравнению  $\sin$ -Гордона с затуханием [12, 14]. Мы же рассмотрим общий случай произвольного сдвига дифракционной решетки  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Хотя коэффициенты  $A$  и  $B$ , являющиеся комбинациями амплитуд, отнюдь не постоянны, разумно предполагать, что изменения фаз значительно быстрее приводят к качественному изменению характера энергообмена, чем изменения амплитуд (за исключением выделенного случая равенства интенсивностей мод поля). Поэтому можно рассмотреть динамику системы (2) в приближении постоянных коэффициентов  $A$  и  $B$ . Ниже будет показано, что в такой системе возникает автоволна переключения, отчасти аналогичная волне переброса, рассмотренной в 1937 г. в пионерской работе Колмогорова, Петровского и Пискунова [20]: форма и скорость автоволны определяются только состояниями, между которыми происходит переключение.

### 3. Квазистационарные состояния и волна переключения

#### 3.1. Квазистационарное решение системы (2)

При  $\alpha \neq 0$  фазы  $\varphi$  и  $\psi$  не могут быть постоянными одновременно и во времени, и в пространстве. Однако можно найти решение, при котором постоянной остается их сумма:  $\psi + \varphi = d$ . Интегрируя оба уравнения (2) и сравнивая их друг с другом, получаем общий вид такого квазистационарного решения, которое будем обозначать индексом «q»:

$$\psi_q(x, t) = -At \sin d + Bx \sin(d - \alpha) + d + C, \quad (3)$$

$$\varphi_q(x, t) = At \sin d - Bx \sin(d - \alpha) - C.$$

Значения констант  $d$  и  $C$  можно определить из граничного или начального условия. Разность фаз мод электромагнитного поля до входа в кристалл остается постоянной, что дает граничное условие  $\varphi(0, t) = \varphi_0 = \text{const}$ , из которого следует  $d_1 = 0$ ;  $\pi$ . С другой стороны, начальная фаза дифракционной решетки определяет начальное условие  $\psi(x, 0) = \psi_0 = \text{const}$ , откуда  $d_2 = \alpha$ ;  $\pi - \alpha$ . Таким образом, в системе сначала формируется постоянное по  $x$ , но меняющееся со временем решение  $\psi_2(x, t) = \psi_0 -$

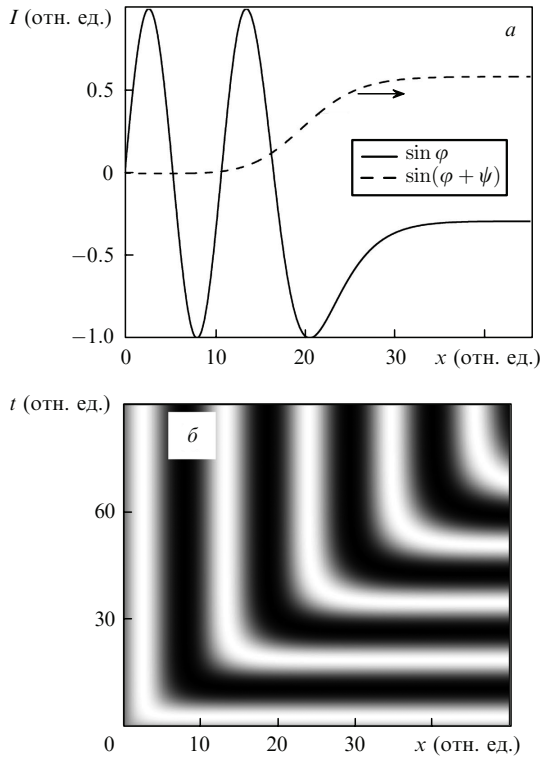


Рис.2. Численное решение системы (2) при  $\alpha = 0.2\pi$  – переключение между квазистационарными решениями  $\varphi_2 + \psi_2 = d_2 = \alpha$  и  $\varphi_1 + \psi_1 = d_1 = 0$ : волна переключения в момент  $t = 20$ , стрелкой показано направление движения волны переключения (а) и двумерная зависимость  $\sin \varphi$  от времени и координаты (б).

$At \sin \alpha$ ,  $\varphi_2(x, t) = d_2 - \psi(x, t)$ , которое потом сменяется стационарным решением

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_0 - Bx \sin \alpha, \tag{4}$$

$$\psi_1(x, t) = d_1 - \varphi(x, t).$$

Смена одного решения другим происходит путем прохождения волны переключения. На рис.2 показан результат численного решения системы (2), демонстрирующий подобный переходный процесс.

### 3.2. Анализ устойчивости

Прежде чем переходить к изучению волны переключения, необходимо уточнить, какие из двух возможных значений констант  $d_1$  и  $d_2$  реализуются. Для этого проведем анализ устойчивости решения (3). Введем малые отклонения  $\psi = \psi_q + \varepsilon$  и  $\varphi = \varphi_q + \rho$  и линеаризуем относительно них систему (2):

$$\varepsilon_t = -A(\varepsilon + \rho) \cos d, \tag{5}$$

$$\rho_x = -B(\varepsilon + \rho) \cos(d - \alpha).$$

Предполагая гармоническую зависимость малых отклонений  $\varepsilon, \rho \sim \exp(i\omega t - ikx)$ , получаем

$$\omega = \frac{Ak \cos d}{B \cos(d - \alpha) - ik}. \tag{6}$$

Из условия устойчивости решения следует  $\text{Im } \omega > 0$ , т. е. устойчивыми являются решения с  $d_1 = 0$  и  $d_2 = \alpha$ .

### 3.3. Модификация начального условия

Как было показано выше, со временем в системе реализуется стационарное решение (4), соответствующее граничному условию  $\varphi(0, t) = \varphi_0$ . Однако если учесть, что коэффициент  $B$ , играющий роль пространственного масштаба системы, вообще говоря, непостоянен, это решение нельзя считать окончательным. При изменении коэффициента  $B$  система выйдет из стационарного состояния, а пространственное распределение фазы электростатического поля  $\psi(x)$  станет новым начальным условием  $\psi(x, 0) = \psi_0 + B_{\text{old}}x \sin \alpha = \psi_0 + B_{\text{new}}x \sin \gamma$ . Такому начальному условию соответствует квазистационарное решение (3) с параметром  $d_3 = \alpha + \gamma$ ;  $\pi + \alpha - \gamma$ :

$$\psi_3(x, t) = \psi_0 + Bx \sin \gamma - At \sin(\gamma \pm \alpha), \tag{7}$$

$$\varphi_3(x, t) = d_3 - \psi(x, t).$$

Важно отметить, что при условии  $\pi/2 - \alpha < \gamma < \pi/2$  оно оказывается неустойчивым для обоих значений параметра  $d_3$ .

Неустойчивость этого решения проявляется в том, что периодически в системе возникает несколько резких осцилляций, после которых система вновь на некоторое время возвращается в прежнее состояние. Затем осцилляции возникают вновь – и так до тех пор, пока до этого места не дойдет волна переключения, переводящая систему в состояние (4). На рис.3 показаны результаты численного решения системы (2) в этом случае, иллюстрирующие как сбой фазы, происходящий в результате потери устойчивости решения с параметром  $d_3 = \alpha + \gamma$ , так и волну переключения в данном случае.

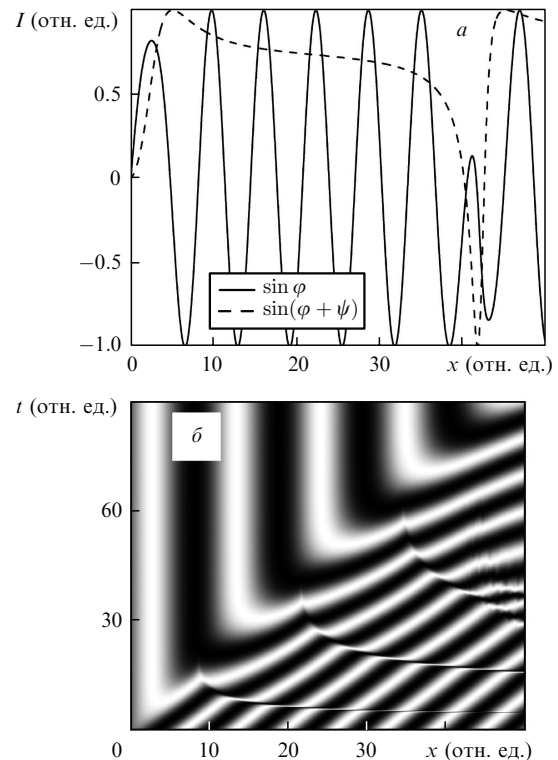


Рис.3. Численное решение системы (2) при  $\alpha = 0.2\pi$ ,  $\gamma = 0.48\pi$  – переключение между квазистационарными решениями  $\varphi_3 + \psi_3 = d_3 = \alpha + \gamma$  и  $\varphi_1 + \psi_1 = d_1 = 0$ : волна переключения ( $0 < x < 15$ ) и осцилляция, вызванная неустойчивостью ( $30 < x < 50$ ) в момент  $t = 3.3$  мин (а) и двумерная зависимость  $\sin \varphi$  от времени и координаты (б).

### 3.4. Волна переключения

Будем искать волну переключения в виде  $\psi + \varphi = f(x - Vt)$ . Тогда из (2) следует уравнение для функции  $f$ :

$$Vf' = A \sin f - BV \sin(f - \alpha) - C. \quad (8)$$

Скорость волны и константа  $C$  определяются состояниями с параметрами  $d_1$  и  $d_3$ ; между этими состояниями происходит переключение  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha + \gamma$ :

$$V = A \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) / B \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right), \quad (9)$$

$$C = BV \sin \alpha.$$

Интегрируя (8), получаем вид волны переключения

$$f(x) = \frac{d_3}{2} + 2 \arctan \left[ \tan \frac{d_3}{4} \tanh \left( 4Bx \tan \frac{d_3}{2} \sin \alpha \right) \right]. \quad (10)$$

На рис.4 показано, что это выражение хорошо описывает форму волн переключения, полученных в результате численного решения системы (2) (см. рис.2,а, 3,а).

### 4. Заключение

Итак, в работе исследована подсистема уравнений (2), описывающая эволюцию разности фаз оптических полей  $\varphi$  и фазы электростатического поля  $\psi$  при двухволновом смешении в фоторефрактивной среде. С учетом полученных результатов решение системы (1), найденное численно в работе [12] (см. рис.1,б), можно описать в приближении поочередно меняющихся фаз и амплитуд. На начальном этапе формируется квазистационарное распределение фаз (3) с параметром  $d_2 = \alpha$ , которое после прохождения первой волны переключения сменяется решением (4). Однако изменения амплитуд объемной дифракционной решетки и мод электромагнитного поля приводят к изменению коэффициентов  $A$  и  $B$ , в результате чего в системе формируется решение (7), которое после прохождения очередной волны переключения вновь сменяется решением (4), и т. д. Дополнительные флуктуации возникают вследствие неустойчивостей, развивающихся в квазистационарных состояниях типа (7). Так продолжается до тех пор, пока не сформируется распределение амплитуд электростатического поля и световых пучков, соответствующее стационарному решению системы (1) при условии постоянства суммы фаз ( $\psi + \varphi = d_1 = 0$ ):

$$A = 1, \quad (11)$$

$$B(x) = -I_0 b \tanh(I_0 b x \cos \alpha - \theta_0),$$

где начальная фаза  $\theta_0$  определяется граничным условием для соотношения интенсивностей мод электромагнитного поля на входной грани кристалла. Отсюда легко видеть, почему флуктуации эффективности энергообмена наблюдаются только при достаточно большой суммарной интенсивности световых пучков: если коэффициент  $A$ , определяющий временной масштаб задачи, практически не зависит от  $I_0$ , то коэффициент  $B$  прямо пропорционален суммарной интенсивности света. Другим словами, пространственный масштаб задачи уменьшается с ростом интенсивности  $I_0$ , а эффективная длина фоторефрактивного кристалла растет.

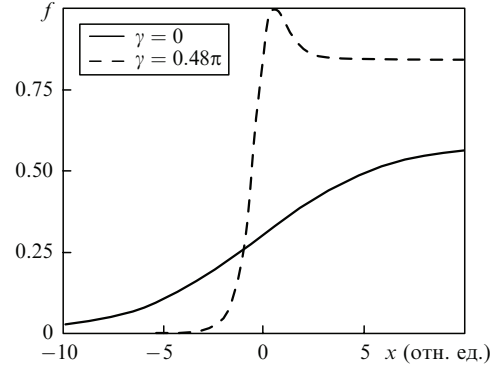


Рис.4. Точный вид волны переключения (10) с параметрами, соответствующими параметрам численного решения на рис.2,а (сплошная кривая) и рис.3,а (штриховая кривая).

Следует отметить, что параллельно двухволновому смешению в кристалле может развиваться ФИРС, отбирающее часть интенсивности света и оказывающее влияние на фазу световых пучков. Однако если интенсивность слабого пучка света заметно превышает интенсивность затравочного излучения ФИРС [7, 9], то двухволновое смешение развивается быстрее, и шумовые голографические решетки ФИРС не способны конкурировать с решеткой, на которой идет двухволновое смешение.

Таким образом, исследование подсистемы (2) позволяет объяснить важные особенности динамики двухволнового смешения в фоторефрактивной среде, а также продемонстрировать интересный механизм возникновения автоволновых решений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-00555-а).

1. Пашков В.А., Соловьев Н.М., Уюкин Е.М. *ФТТ*, **21**, 1879 (1979).
2. Sommerfeldt R., Rupp R.A., Vormann H., Kratzig E. *Phys. Stat. Sol. A*, **99**, K15 (1987).
3. Cronin-Golomb M., White J.O., Fisher B., Yariv A. *Opt. Lett.*, **7**, 313 (1982).
4. Novicov A., Odoulov S., Oleinik O., Sturman B. *Ferroelectrics*, **66**, 1 (1986).
5. Leblond H., Sazonov S.V., Mel'nikov I.V., Mihalache D., Sanchez F. *Phys. Rev. A*, **74**, 063815 (2006).
6. Salamo G.J., Miller M.J., Clark III W.W., Wood G.L., Sharp E.J., Neurgaonkar R. *Appl. Opt.*, **27**, 4356 (1988).
7. Забродин К.Н., Пенин А.Н. *Квантовая электроника*, **18**, 622 (1991).
8. Pedersen H.C., Johansen P.M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 1065 (1995).
9. Прудковский П.А., Пенин А.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **70**, 660 (1999).
10. Goukov M., Odoulov S., Woike Th., Imbrock J., Imlau M., Kratzig E., Bäumer C., Hesse H. *Phys. Rev. B*, **65**, 195111 (2002).
11. Schwalenberg S. *Phys. Rev. E*, **71**, 066608 (2005).
12. Прудковский П.А. *Письма в ЖЭТФ*, **77**, 421 (2003).
13. Прудковский П.А., Скугаревский О.В., Пенин А.Н. *Вестник Моск. ун-та. Сер. физика, астрономия*, **5**, 38 (1998).
14. Bugauchuk S., Kovacs L., Mandula G., Polgar K., Rupp R.A. *Phys. Rev. E*, **67**, 046603 (2003).
15. Glass A.M., von der Linde D., Negran T.J. *Appl. Phys. Lett.*, **25**, 233 (1974).
16. Стурман Б.И. *Квантовая электроника*, **7**, 483 (1980).
17. Osipov Yu.M., Sturman V.I. *Opt. Commun.*, **79**, 345 (1990).
18. Зельдович Я.Б. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, **5**, 20 (1970).
19. Винецкий В.Л., Кухтарев Н.В., Одулов С.Г., Соскин М.С. *УФН*, **129**, 113 (1979).
20. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. *Бюллетень МГУ. Секция А*, **1**, 1 (1937).