

# Использование временного подхода для формирования трехмерного изображения удаленного шероховатого неплоского объекта

В.И.Мандросов

*Предложен метод реконструкции трехмерного изображения удаленного неплоского шероховатого объекта по спекл-структуре его плоского изображения, рассчитываемой с помощью временного подхода, основанного на использовании временной корреляционной функции зондирующего излучения с длиной когерентности, меньшей размеров зондируемого объекта. Анализируется влияние углового разрешения оптической системы, формирующей изображение объекта, и аддитивных шумов на точность реконструкции формы поверхности этого объекта с использованием предлагаемого метода.*

**Ключевые слова:** оптическая когерентность, трехмерные изображения удаленных шероховатых объектов, спекл-структура в оптических изображениях.

## 1. Введение

В литературе описан ряд методов формирования трехмерных изображений удаленных шероховатых неплоских объектов, основанных на цифровой обработке распределения интенсивности в их плоских изображениях [1–4]. К их числу относятся, например, активно внедряемые в практику методы формирования трехмерных изображений, реализуемые путем обработки распределений интенсивности в двух плоских изображениях (стереопарах) объекта, полученных в двух ракурсах [2, 3]. Актуальность этих методов связана с их применением для решения широкого круга задач, включая задачи определения формы поверхности удаленных объектов с целью существенного повышения вероятности их распознавания, высокоточной реконструкции рельефа земной поверхности, особенно в гористой местности, по результатам ее аэрофотосъемки [2] и получения лазерно-индуцированных трехмерных изображений объектов в прозрачных кристаллах [3]. Однако реализация этих методов требует достаточно больших временных затрат, а в случае сильно удаленных объектов – достаточно большого разнесения оптических осей приемных оптических систем, формирующих указанные два изображения. В частности, в работе [3] предлагается метод реконструкции формы поверхности объекта, т.е. формирования трехмерных изображений объекта, по двум его плоским изображениям, сформированным при взаимно перпендикулярном расположении этих осей, что для сильно удаленных объектов делает реализацию данного метода практически невозможной.

В работе [4] была предпринята попытка реконструкции трехмерного изображения удаленного шероховатого

неплоского объекта по контрасту спекл-структуры  $C_k = C(\delta_k)$  усредненного по времени распределения интенсивности  $I_0(\delta_k)$  на различных одинаковых по форме участках его плоского изображения, полученного в одном ракурсе, где  $\delta_k$  – радиус-вектор центра  $k$ -го участка. При этом форма каждого участка представляет собой квадрат со стороной, равной среднему размеру одного спекла  $\delta_r \approx z_1 w$  [5], где  $w = 0.61 \lambda_0 / d_p$  – угловое разрешение по Рэлею [6] оптической системы, формирующей изображение;  $\lambda_0 = \omega_0 / c$  – средняя длина волны зондирующего излучения;  $z_1$  – расстояние от приемной апертуры оптической системы, формирующей изображение, до плоскости изображения;  $d_p$  – диаметр приемной апертуры.

Затем с использованием совокупности измеренных величин  $C_k$  минимально разрешаемые участки поверхности объекта аппроксимируются параллелепипедами с высотой  $k$ -го параллелепипеда  $L_k \approx L_c / C_k$ , где  $L_c$  – длина когерентности зондирующего излучения. При этом основания параллелепипедов имеют форму квадрата со стороной  $A = w r_c$ , где  $r_c$  – расстояние между приемной апертурой и зондируемым объектом. Однако описание метода, позволяющего по расположению аппроксимирующих параллелепипедов в пространстве реконструировать трехмерное изображение удаленного шероховатого неплоского объекта по совокупности величин  $C_k$ , в [4] отсутствовало. В настоящей работе дано детальное описание этого метода с учетом влияния как углового разрешения  $w$  оптической системы, формирующей изображение удаленного неплоского объекта, так и аддитивных шумов на точность реконструкции формы поверхности удаленного объекта.

## 2. Метод реконструкции трехмерных изображений удаленных объектов на основе временного подхода

Перейдем к описанию предлагаемого метода (рис.1). Исследуемый удаленный шероховатый объект  $I$  зондируется малым источником когерентного излучения с длиной когерентности  $L_c$ , меньшей размеров объекта. Опти-

В.И.Мандросов. Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: vmandrosov@mail.ru

Поступила в редакцию 26 апреля 2010 г., после доработки – 28 октября 2010 г.

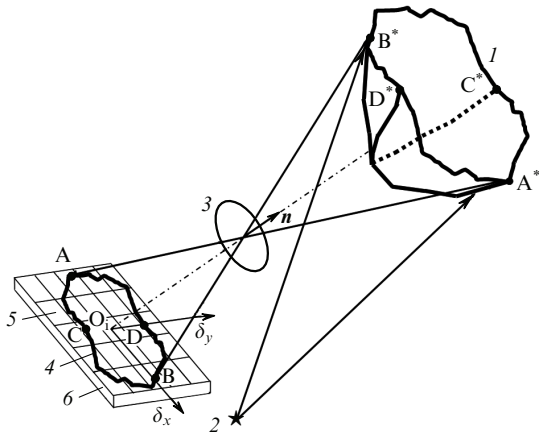


Рис.1. Общая схема регистрации распределения интенсивности в изображении удаленного неплоского шероховатого объекта и формирования его трехмерного изображения: 1 – исследуемый объект; 2 – источник когерентного излучения, зондирующего объект; 3 – оптическая приемная система, формирующая плоское изображение зондируемого объекта; 4 – контур плоского изображения объекта; 5 – матричный фотоприемник; 6 – формирова- тель трехмерного изображения объекта; штрих-пунктирная линия – оптическая ось приемной системы 3; точка  $O_i$  – центр тяжести изобра- жения объекта; точки  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  оптически сопряжены с точ- ками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , находящимися на пересечении контура 4 с коорди- натными осями  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ .

ческая система 3 формирует очерченное контуром 4 пло- ское изображение объекта 1, которое проецируется на матричный приемник 5, состоящий из фотоприемников, приемные апертуры которых имеют форму квадрата со стороной, равной  $\delta_r$ . Радиус-вектор центра приемной апертуры  $k\nu$ -го фотоприемника  $\delta_{k\nu}$  имеет компоненты  $\delta_x = k\delta_r$  и  $\delta_y = \nu\delta_r$ . При этом  $k\nu$ -й фотоприемник реги- стрирует усредненное по времени распределение интен- сивности в изображении исследуемого объекта

$$\bar{I}_0(\delta_{k\nu}) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_0(\delta_{k\nu}) dt,$$

где  $I_0(\delta_{k\nu}, t) = |E_0(\delta_{k\nu}, t, \rho_s)|^2$  – мгновенная интенсивность в этом изображении;  $t_0$  и  $T$  – начальный момент и время ее регистрации;

$$E_0(\delta_{k\nu}, t, \rho_s) \sim \frac{E_s}{\lambda_0 r_c} \int k(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}, \delta_{k\nu}) \times \exp \left[ -2\pi i \frac{2r + \mathbf{r}\rho_s/r_c + \xi(\mathbf{r})}{\lambda_0} \right] u \left( t - \frac{2r + \mathbf{r}\rho_s/r_c}{c} \right) d\mathbf{r} \quad (1)$$

– мгновенное поле на приемной апертуре  $k\nu$ -го фотопри- емника;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки на поверхности объекта;  $u(t)$  – функция модуляции зондирующего излучения [4] с временной корреляционной функцией

$$B_u(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) u^*(1 + \tau) dt;$$

$k(\mathbf{r})$  – распределение коэффициентов отражения по полю на поверхности объекта 1;  $E_s$  и  $\rho_s$  – поле на апертуре и радиус-вектор источника зондирующего излучения;  $\xi(\mathbf{r})$  – распределение высот неровностей поверхности;  $h(\mathbf{r}, \delta_{k\nu})$  – импульсный отклик оптической системы, формирующей изображение. Зарегистрированные сигналы  $\bar{I}_0(\delta_{k\nu})$  посту-

пают на блок 6, который реконструирует форму поверх- ности объекта, или, иными словами, строит трехмерное изображение объекта. Не умаляя общности, будем далее предполагать, что оптическая ось системы 3 пересекает плоское изображение зондируемого объекта в его центре тяжести (точка  $O_i$  на рис.1). Ориентация оптической оси определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$ , направленным вдоль оптической оси системы 3 в сторону зондируемо- го объекта.

Реконструкция трехмерного изображения объекта осу- ществляется путем ступенчатой аппроксимации поверх- ности объекта системой параллелепипедов (рис.2). Для этого вначале с применением временного подхода [4], основанного на использовании функции  $B_u(\tau)$ , опреде- ляется контраст спекл-структуры в плоском изображе- нии на  $k\nu$ -м участке этого изображения, который прое- циируется на приемную апертуру  $k\nu$ -го фотоприемника. В отсутствие шумов этот контраст определяется по фор- муле [4]

$$C_{k\nu} = \frac{\langle \bar{I}_0^2(\delta_{k\nu}) \rangle_{\xi} - 1}{\langle \bar{I}_0(\delta_{k\nu}) \rangle_{\xi}^2} - 1 \approx \frac{L_c}{L_{k\nu}}, \quad (2)$$

где  $L_{k\nu} = L(\delta_{k\nu})$  – высота параллелепипеда, аппроксими- рующего участок исследуемой поверхности объекта, оптически сопряженный с  $k\nu$ -м участком его изображе-

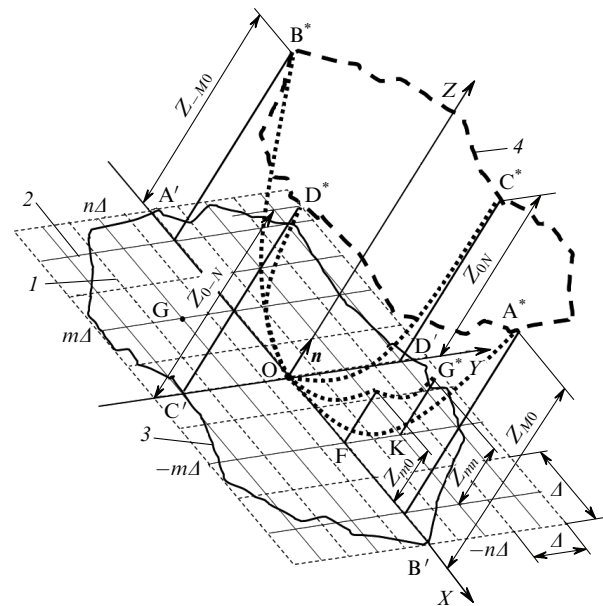


Рис.2. Схема реконструкции произвольных участков поверхности зондируемого удаленного объекта в масштабе  $\mu = r_c/z_i$  в системе координат  $XYZ$ , ориентированной так, чтобы плоскость  $XY$  располагалась параллельно апертуре матричного фотоприемника 5 на рис.1: 1 – штриховая сетка, повторяющая в масштабе  $\mu$  структуру матричного фотоприемника 5 на рис.1; 2 – координатная сетка на плоскости  $XY$ ; 3 – замкнутая линия, повторяющая в масштабе  $\mu$  контур 4 на рис.1; 4 – реконструируемый в масштабе  $\mu$  контур объекта, оптически сопряженный с контуром его плоского изображения 4 на рис.1;  $Z_{m0}$  и  $Z_{-m0} = KG^*$  – высоты участков поверхности реконструируемого трехмерного изображения объекта, которые оптически сопряжены с участками его плоского изображе- ния, проецируемыми на фотоприемники с номе- рами  $-m0$  и  $-m-n$ ;  $Z_{m0}$ ,  $Z_{0N}$  и  $Z_{0-N}$  – высоты участков поверхности реконструируемого трехмерного изображения объекта, которые оптически сопряжены с участками его плоского изображе- ния, располагающимися в районе точек пересечения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  кон- тура 4 на рис.1 с осями  $\delta_x$  и  $\delta_y$ ; пунктирные линии образуют каркас реконструируемой поверхности исследуемого объекта.

ния с центром в точке с радиусом-вектором  $\delta_{kv}$ ; угловые скобки  $\langle \dots \rangle_{\xi}$  обозначают операцию усреднения по различным реализациям высот неровностей поверхности  $\xi(\mathbf{r})$ . Соотношение (2) справедливо при условии  $L_{kv} \geq 10L_c$  [4]. Далее в плоскости  $XY$ , оптически сопряженной с плоскостью изображения  $\delta_x \delta_y$ , строится сетка 2, состоящая из квадратных ячеек со стороной  $\Delta = \mu \delta_r = \omega r_c$ , где  $\mu = r_c / z_1$  – масштабный множитель. На этой сетке прочерчивается замкнутая линия 3, повторяющая в масштабе  $\mu$  контур плоского изображения объекта (контур 4 на рис. 1) и пересекающая оси  $X$  и  $Y$  в точках  $A', B', C', D'$ , которые соответствуют точкам пересечения  $A, B, C, D$  координатных осей  $\delta_x$  и  $\delta_y$  с контуром 4 на рис. 1. Затем на сетке 2 для  $m$ -й ячейки фиксируется точка  $G$  с координатами  $x = -m\Delta$ ,  $y = -n\Delta$ , которая соответствует центру  $m$ -го участка плоского изображения, радиус-вектор которого  $\delta_{mn}$  имеет компоненты  $\delta_x = -m\delta_r$  и  $\delta_y = -n\delta_r$ . После этого на реконструируемой поверхности определяются координаты  $x_0 = m\Delta$ ,  $y_0 = n\Delta$  и  $z_0 = Z_{mn}$  точки  $G^*$ , оптически сопряженной с точкой  $G$ . При условии  $L_{mn} \geq 10L_c$  и с учетом соотношения (2) высота  $mn$ -го аппроксимирующего параллелепипеда  $KG^*$  с нижним квадратным основанием, совпадающим с  $mn$ -й ячейкой сетки 2 (рис. 2),

$$Z_{mn} = Z_{m0} + \sum_{v=0}^n L_{mv} \approx Z_{m0} + L_c \sum_{v=0}^n 1/C_{mv}, \quad (3)$$

где

$$Z_{m0} = \sum_{k=0}^m L_{k0} \approx L_c \sum_{k=0}^m 1/C_{k0} \quad (4)$$

– высота  $m0$ -го аппроксимирующего параллелепипеда с верхним квадратным основанием, точка пересечения диагоналей которого имеет координаты  $x_0 = m\Delta$ ,  $y_0 = 0$  и  $z_0 = Z_{m0}$ . Вычисление  $Z_{m0}$  проводится по формуле (4) путем суммирования величин  $L_{k0}$  вдоль отрезка  $OF$  на оси  $X$ . Для вычисления  $Z_{mn}$  в соответствии с формулой (3) дополнительно проводится суммирование величин  $L_{mv}$  вдоль отрезка  $FK$ , параллельного оси  $Y$ . Точки  $A^*, B^*, C^*, D^*$ , располагающиеся на контуре изображения поверхности объекта на высотах  $Z_{-M0}, Z_{M0}, Z_{0N}, Z_{0-N}$  соответственно (рис. 2), оптически сопряжены с отмеченными на рис. 1 точками  $A, B, C, D$ . Ниже будет проведена оценка этих высот.

Задавая поверхность исследуемого объекта в виде функции  $Z_0(x, y)$ , покажем, что при уменьшении  $\Delta$  высота  $mn$ -го аппроксимирующего параллелепипеда  $Z_{mn}$  стремится к высоте этой поверхности  $Z_0(x_0, y_0)$ . В самом деле, из соотношений (3) и (4) получаем

$$Z_{mn} = \sum_{k=0}^m L_{k0} + \sum_{v=0}^n L_{mv}, \quad (5)$$

где, как видно из геометрических соображений,

$$L_{k0} = Z_{k0} - Z_{(k-1)0} \approx Z'_{0x}(x = k\Delta, 0)\Delta, \quad (6)$$

$$L_{mv} = Z_{mv} - Z_{m(v-1)} \approx Z'_{0y}(x = m\Delta, y = v\Delta)\Delta. \quad (7)$$

Будем далее предполагать, что  $Z_0(0, 0) = 0$ . Тогда переходя при  $\Delta \rightarrow 0$  от суммирования в соотношении (5) к интегрированию, с учетом соотношений (6), (7) получаем

$$Z_{mn} \rightarrow \int_0^{x_0} Z'_{0x}(x, 0)dx + \int_0^{y_0} Z'_{0y}(x_0, y)dy = Z_0(x_0, 0) -$$

$$-Z_0(0, 0) + Z_0(x_0, y_0) - Z_0(x_0, 0) = Z_0(x_0, y_0), \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

На рис. 3 представлена схема, иллюстрирующая реконструкцию поверхности исследуемого объекта путем ее аппроксимации системой параллелепипедов с квадратными основаниями  $\Delta \times \Delta$  в тех ее участках, которые оптически сопряжены с участками плоского изображения объекта, находящимися на координатных осях  $\delta_x$  и  $\delta_y$ . Параллелепипеды 4, 5, 6, 7 с высотами  $Z_{-M0}, Z_{M0}, Z_{0N}$  и  $Z_{0-N}$  (рис. 2) аппроксимируют участки реконструируемой поверхности, оптически сопряженные с участками плоского изображения зондируемого объекта с центрами в точках  $A, B, C, D$ , располагающимися под номерами  $-M0, M0, 0N, 0-N$  на пересечении контура изображения 2 с осями  $\delta_x$  и  $\delta_y$ . Жирная штриховая линия и линия из точек в плоскости изображения отмечают пути, по которым в формуле (4) проводится суммирование величин  $L_{k0}$  с целью определения высот  $Z_{-M0}$  и  $Z_{M0}$  участков реконструируемой поверхности, оптически сопряженных с  $-M0$ -м и  $M0$ -м участками плоского изображения с центрами в точках  $A$  и  $B$ , отмеченными радиусами-векторами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . На рис. 3 также показаны радиусы-векторы  $r_1$  и  $r_2$  точек  $A^*$  и  $B^*$  на реконструируемой

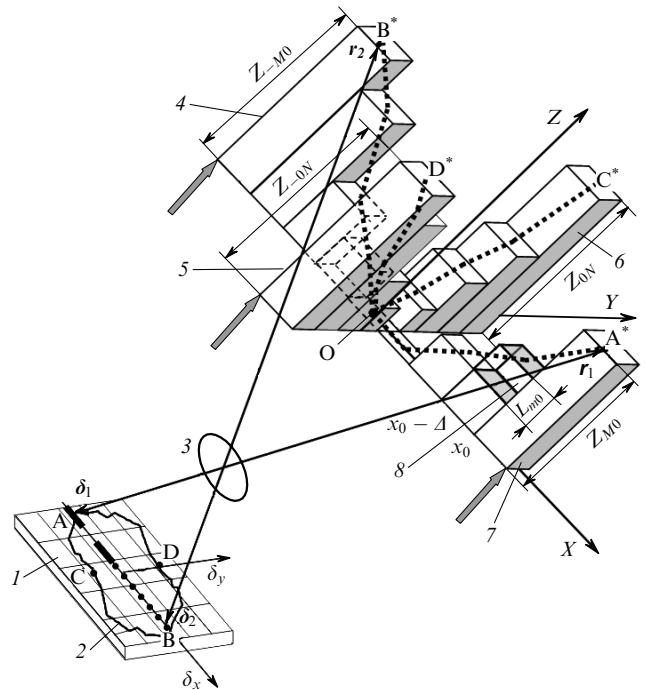


Рис. 3. Схема реконструкции поверхности зондируемого объекта путем ее аппроксимации системой параллелепипедов в тех участках, которые оптически сопряжены с участками изображения объекта, находящимися на координатных осях  $\delta_x$  и  $\delta_y$ :

1 – апертура матричного фотоприемника; 2 – контур плоского изображения объекта; 3 – оптическая система, формирующая изображение объекта; 4–7 – параллелепипеды, аппроксимирующие поверхность реконструируемого трехмерного изображения объекта в тех ее участках, которые оптически сопряжены с участками плоского изображения объекта, располагающимися на пересечении контура 2 с осями  $\delta_x$  и  $\delta_y$ ; 8 – параллелепипед, аппроксимирующий участок поверхности объекта, расположенный между точками с координатами  $x = x_0$  и  $x = x_0 - \Delta$ ; пунктирные линии обозначают сечения  $B^*OA^*$  и  $D^*OC^*$  реконструируемой поверхности взаимно перпендикулярными плоскостями  $XZ$  и  $YZ$ ; стрелки указывают направление распространения зондирующего излучения по отношению к зондируемому объекту.

поверхности исследуемого объекта, оптически сопряженных с точками А и В. Аналогично определяются высоты  $Z_{0N}$  и  $Z_{0-N}$ .

### 3. Влияние углового разрешения оптической системы, формирующей изображение удаленного объекта, на точность реконструкции формы его поверхности

Представляемый здесь метод позволяет строить трехмерное изображение исследуемого объекта путем аппроксимации его поверхности системой параллелепипедов с квадратными основаниями  $\Delta \times \Delta$  и высотами, определяемыми по контрасту спекл-структуры на различных участках плоского изображения этого объекта. Но эта аппроксимация при большой величине  $\Delta = wr_c$ , т. е. при плохом угловом разрешении  $w$  оптической системы 3 на рис.1 и 3, является достаточно грубой, в результате чего реконструированная форма поверхности исследуемого объекта будет иметь в различных точках  $(x_0, y_0)$  различные отклонения от ее исходной формы  $\delta Z_0(x_0, y_0) = Z_0(x_0, y_0) - Z_{m0}$ . Определим точность реконструкции формы поверхности объекта в точке  $(x_0, y_0)$  как относительную погрешность  $\eta(x_0, y_0) = \delta Z_0(x_0, y_0) / Z_0(x_0, y_0)$  оценки высоты  $Z_0(x_0, y_0)$ . Не умаляя общности, оценим эту погрешность в зависимости от  $w$  в предположении, что  $Z_0(x, y) = (x^2 + y^2)/(2a)$ , где  $a$  – радиус кривизны поверхности, и что определяется высота  $Z_{m0}$  в сечении В\*ОА\* этой поверхности плоскостью XZ (см. рис.3) в точке с координатами  $x = x_0, y = 0$ . С учетом того, что это сечение является параболой  $Z_0(x, 0) = x^2/(2a)$ , а также соотношения (4) будем иметь

$$\begin{aligned} Z_{m0} &= \sum_{k=0}^m L_{k0} \approx L_c \sum_{k=0}^m 1/C_{k0} \approx \Delta \sum_{k=0}^m Z'_{0x}(k\Delta, 0) \\ &= \sum_{k=0}^m k\Delta^2/a = (\Delta^2/a)m(m-1). \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая далее соотношения  $Z_0(x, 0) = x^2/(2a)$ ,  $\Delta = wr_c$ ,  $x_0 \approx m\Delta$ , (8) и (9), получаем  $\eta(x_0, 0) \approx \Delta/x_0 = wr_c/x_0$ . С уменьшением углового разрешения  $w$  до определенной величины  $w_m$  точность определения формы поверхности растет. Это связано с тем, что  $\eta$  уменьшается до минимальной погрешности  $\eta_m$  определения высоты  $Z_{m0}$  поверхности объекта в точке с координатами  $x = x_0 = m\Delta$ ,  $y = y_0 = 0$ . В самом деле, из соотношения (7) следует, что последнее слагаемое в формуле (9)  $L_{m0} \approx x_0 wr_c/a$ . Это слагаемое определяет высоту параллелепипеда  $\delta$  на рис.3, аппроксимирующего участок поверхности исследуемого объекта, расположенный между точками с координатами  $x = x_0 - \Delta, y = 0, z = Z_0(x_0 - \Delta, 0)$  и  $x = x_0, y = 0, z = Z_0(x_0, 0)$ . Учтем также, что соотношение  $L_{m0} \approx x_0 wr_c/a$  имеет место только при выполнении условия  $L_{m0} \geq 10L_c$  [4]. Из этого условия следует, что угловое разрешение  $w$  не должно быть меньше, чем

$$w_m = 10L_c a / (r_c x_0). \quad (10)$$

Тогда из соотношений  $\eta \approx wr_c/x_0$  и (10) получаем

$$\eta_m \approx 10L_c a / x_0^2. \quad (11)$$

При приближении к вершине поверхности объекта, расположенной в точке с координатами  $x = x_0 = 0, y =$

$y_0 = 0$  (точка О на рис.2 и 3), величина  $\eta_m$  неограниченно возрастает. Поэтому целесообразно, например, выбрать вокруг этой вершины небольшую область радиусом  $0.1a$  и достаточно высокую ( $\eta_m = 0.05$ ) точность реконструкции формы поверхности на границе этой области. Тогда с учетом (10) и (11) получим  $w_m = 5 \times 10^{-3} a / r_c$ . При таком угловом разрешении вне выбранной области, т. е. при  $x_0 > 0.1a$ , имеем  $\eta(x_0, 0) \approx w_m r_c / x_0$ . С ростом  $x_0$  величина  $\eta$  уменьшается, достигая минимума  $\eta_b \approx 5 \times 10^{-3} \sigma_\xi / l_\xi$  на границе области (радиусом  $\rho_b = a\sigma_\xi / l_\xi$ ) обратного рассеяния исследуемого объекта [7], где  $l_\xi$  и  $\sigma_\xi$  – радиус корреляции и среднеквадратичное отклонение высот неровностей на поверхности исследуемого объекта. При плавных ( $\sigma_\xi / l_\xi \approx 0.2$ ) неровностях поверхности исследуемого объекта  $\eta_b \approx 10^{-2}$ , а при крутых ( $\sigma_\xi / l_\xi \approx 1$ )  $\eta_b \approx 5 \times 10^{-3}$ .

Таким образом, мы показали, что существует минимальное угловое разрешение  $w_m$ , при котором достигается самая точная аппроксимация формы поверхности объекта системой параллелепипедов. Однако при достаточно высоком уровне шумов даже при таком угловом разрешении форма поверхности реконструируется с заметными искажениями, анализ которых будет проведен в разд.4.

### 4. Влияние аддитивных шумов на точность реконструкции формы поверхности

Проанализируем влияние аддитивного шумового поля на точность реконструкции формы поверхности исследуемого объекта по контрасту распределения усредненной по времени интенсивности в его плоском изображении. В присутствии шумов с учетом соотношения (1)  $k\nu$ -й фотоприемник (см. рис.1) регистрирует сигнал

$$\bar{I}_s(\delta_{k\nu}) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_s(\delta_{k\nu}, t) dt,$$

где

$$I_s(\delta_{k\nu}, t) = E_s(\delta_{k\nu}, t, \rho_s)^2;$$

$$E_s(\delta_{k\nu}, t, \rho_s) = E_0(\delta_{k\nu}, t, \rho_s) + E_n(\delta_{k\nu}, t);$$

$E_n(\delta_{k\nu}, t)$  – аддитивное шумовое поле на приемной апертуре фотоприемника. Это поле, как показано в работе [7], можно интерпретировать как поле в изображении мысленно расположенного вблизи исследуемого удаленного объекта фонового, в среднем плоского шероховатого объекта. Тогда контраст спекл-структуры на  $k\nu$ -м участке суммарного плоского изображения исследуемого и фонового объектов  $C_{sk\nu} = \langle \langle \bar{I}_s(\delta_{k\nu})^2 \rangle_\xi \rangle_\zeta / \langle \langle \bar{I}_s(\delta_{k\nu}) \rangle_\xi \rangle_\zeta^2 - 1$ , где скобки  $\langle \dots \rangle_\xi$  обозначают операцию усреднения по распределению высот  $\zeta(r)$  неровностей поверхности фонового объекта, проводимую наряду с операцией усреднения по распределению  $\xi(r)$ . Предполагая, что поля  $E_0(\delta_{k\nu}, t)$  и  $E_n(\delta_{k\nu}, t)$  распределены по гауссову закону и статистически независимы, получаем для контраста  $C_{sk\nu}$  следующее соотношение:

$$\begin{aligned} C_{sk\nu} &= \left\{ \frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} [ \langle E_0(\delta_{k\nu}, t_1) E_0^*(\delta_{k\nu}, t_2) \rangle_\xi ]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \langle \langle E_n(\delta_{k\nu}, t_1) E_n^*(\delta_{k\nu}, t_2) \rangle_\xi \rangle_\zeta ]^2 dt_1 dt_2 \right\} / F_{k\nu}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где



$$F_{kv} = \langle \bar{I}_0(\delta_{kv}) \rangle_\xi + \langle \bar{I}_n(\delta_{kv}) \rangle_\xi;$$

$$\bar{I}_n(\delta_{kv}) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |E_n(\delta_{kv}, t)|^2 dt$$

– функция, которую можно интерпретировать как усредненное по времени распределение интенсивности в изображении фонового объекта. Как следует из работы [7], при условии достаточно высокого углового разрешения  $w$  оптической системы, формирующей изображение исследуемого объекта,

$$\langle \bar{I}(\delta_{kv}) \rangle_\xi \sim \int k_0(\mathbf{r}) |h(\mathbf{r}, \delta_{kv})|^2 d\mathbf{r} \approx \Delta^2 k_0(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}), \quad (13)$$

где

$$k_0(\mathbf{r}) \sim (l_\xi/\sigma_\xi)^2 |k(\mathbf{r})|^2 \exp[-(q_\xi l_\xi/\sigma_\xi)^2] \quad (14)$$

– распределение коэффициента отражения по интенсивности на поверхности исследуемого объекта;  $q_\xi = q_\perp/q_N$ ;  $q_\perp = (4 - q_N^2)^{1/2}$ ;  $q_N = \mathbf{qN}$ ;  $\mathbf{q} \approx 2\mathbf{r}/r$ ;  $\mathbf{N}$  – нормаль к средней поверхности исследуемого объекта. Для усредненного по времени распределения интенсивности  $\bar{I}_n$  в изображении фонового объекта имеет место аналогичное соотношение:

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}_n(\delta_{kv}) \rangle_\xi &\sim \int k_n(\mathbf{r}) |h(\mathbf{r}, \delta_{kv})|^2 d\mathbf{r} \\ &\approx \Delta^2 (l_\xi/\sigma_\xi)^2 k_n(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $k_n(\mathbf{r})$  – распределение коэффициента отражения по интенсивности на поверхности фонового объекта;  $l_\xi$  и  $\sigma_\xi$  – радиус корреляции и среднеквадратичное отклонение высот  $\zeta(\mathbf{r})$  неровностей на этой поверхности.

Рассмотрим далее первое слагаемое в фигурных скобках в соотношении (12), которое, как следует из работы [4], после интегрирования по  $t_1$  и  $t_2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\langle E_0(\delta_{kv}, t_1) E_0^*(\delta_{kv}, t_2) \rangle_\xi|^2 dt_1 dt_2 \\ &\approx \iint k(\mathbf{r}_1) k(\mathbf{r}_2) |h(\mathbf{r}_1, \delta_{kv}) h^*(\mathbf{r}_2, \delta_{kv})|^2 F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |B_u[\tau/\tau_c = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/L_c]|^2$ . Будем далее предполагать, что выполняется условие  $L_c \ll L_{kv}$ . С учетом этого условия функция  $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  в выражении (16) будет уже остальных функций, и после его интегрирования по  $\mathbf{r}_1$  получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\langle E_0(\delta_{kv}, t_1) E_0^*(\delta_{kv}, t_2) \rangle_\xi|^2 dt_1 dt_2 \\ &\sim [L_c/L_{kv}(\delta_{kv})] \Delta^4 k_0^2(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}). \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что фоновый объект в среднем плоский, можно показать, что второе слагаемое, стоящее в фигурных скобках в формуле (12), имеет вид

$$\frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\langle E_n(\delta_{kv}, t_1) E_n^*(\delta_{kv}, t_2) \rangle_\xi|^2 dt_1 dt_2 \sim$$

$$\sim (l_\xi/\sigma_\xi)^4 \Delta^2 k_n^2(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}).$$

Будем далее считать, что  $\sigma_\xi/l_\xi \approx 1$ , т. е. что неровности поверхности фонового объекта имеют крутые склоны. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T^2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\langle E_n(\delta_{kv}, t_1) E_n^*(\delta_{kv}, t_2) \rangle_\xi|^2 dt_1 dt_2 \\ &\sim \Delta^2 k_n^2(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}). \end{aligned} \quad (18)$$

Окончательно с учетом соотношений (12), (16), (17) и (18) получим

$$C_{skv} = \frac{[L_c/L_{kv}(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv})] k_0^2(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}) + k_n^2(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv})}{[k_0(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}) + k_n(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv})]^2}. \quad (19)$$

В отсутствие шумов высота  $kv$ -го параллелепипеда с основанием в форме квадрата со стороной  $\Delta \approx \mu\delta_r$ , аппроксимирующего минимально разрешаемый  $kv$ -й участок поверхности исследуемого объекта,  $L_{kv} \approx L_c/C_{skv}$ . Координаты центра этого основания в системе координат  $XYZ$  (рис.2) связаны с компонентами  $\delta_{xk}$  и  $\delta_{yv}$  радиуса-вектора  $\delta_{kv}$  соотношениями  $x_k = -\mu\delta_{xk}$ ,  $y_v = -\mu\delta_{yv}$ . В присутствии шумов высота  $kv$ -го аппроксимирующего параллелепипеда определяется из соотношения  $L_{skv} \approx L_c/C_{skv}$ . При условии  $k_n^2/k_0^2 \ll L_c/L_{kv}$ , т. е. при достаточно малых шумах, с учетом выражений (13), (15) и (19) и в предположении, что в разных точках изображения шумы постоянны, а именно  $k_n(\mathbf{r} = -\mu\delta_{kv}) = k_n(\mathbf{r} = 0)$ , получим следующее соотношение:

$$L_{skv} - L_{kv} \approx \frac{2L_{kv}k_n(0,0)}{k_0(x_k, y_v)} = \frac{2L_{kv}\langle \bar{I}_n(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi}{\langle \bar{I}_0(x_k = -\mu\delta_{xk}, y_v = -\mu\delta_{yv}) \rangle_\xi}. \quad (20)$$

Зададим реконструируемую в присутствии шумов поверхность исследуемого объекта в виде функции  $Z(x, y)$  и зафиксируем в плоскости  $XZ$  точку с координатами  $x_0 = m\Delta$ ,  $y_0 = n\Delta$  (рис.2). В присутствии аддитивного шума высота  $Z(x_0, y_0)$  поверхности в этой точке рассчитывается по формуле, аналогичной (5), а именно:

$$Z_{smn} = \sum_{k=0}^m L_{sk0} + \sum_{v=0}^n L_{smv}. \quad (21)$$

Тогда, учитывая выражения (5)–(8), (19) и (21), из которых следует, что

$$\begin{aligned} &Z_{smn} - Z_{mn} \approx 2k_n(0,0) \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^m L_{k0}/k_0(x_k, 0) + \sum_{v=0}^n L_{mv}/k_0(x_m, y_v) \right] \end{aligned}$$

( $Z_{mn}$  – высота  $mn$ -го аппроксимирующего параллелепипеда в отсутствие шумов), при  $\Delta \rightarrow 0$  будем иметь

$$\begin{aligned} &Z_{smn} - Z_{mn} \rightarrow 2k_n(0,0) \left\{ \int_0^{x_0} \frac{Z'_{0x}(x,0)}{k_0(x,0)} dx + \right. \\ &\left. + \int_0^{y_0} \frac{Z'_{0y}(x_0,y)}{k_0(x_0,y)} dy \right\} \approx \delta Z(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $Z(x_0, y_0) = Z(x_0, y_0) - Z_0(x_0, y_0)$ . С учетом соотношений (13)–(15), (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} \delta Z(x_0, y_0) \approx & 2\gamma_{n/s}(\sigma_\xi/l_\xi)^2 \\ & \times \left\{ \int_0^{x_0} Z'_{0x}(x, 0) \exp[q_\xi(x, 0)l_\xi/\sigma_\xi]^2 dx \right. \\ & \left. + \int_0^{y_0} Z'_{0y}(x_0, y) \exp[q_\xi(x_0, y)l_\xi/\sigma_\xi]^2 dy \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где  $\gamma_{n/s} = k_n(0, 0)/k_0(0, 0) = \langle \bar{I}_n(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi / \langle \bar{I}_0(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi$ . Это значит, что коэффициент  $\gamma_{n/s}$  равен отношению средней интенсивности  $\langle \bar{I}_n(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi$  в приосевом участке в плоскости изображения исследуемого объекта в его отсутствие к средней интенсивности  $\langle \bar{I}_0(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi$  в присутствии объекта и в отсутствие шумов. В частном случае, когда интенсивность дробовых шумов в матричном фотоприемнике 5 на рис.1 превышает интенсивность других шумов, величину  $\langle \bar{I}_n(\delta_{xk} = 0, \delta_{yv} = 0) \rangle_\xi$  можно интерпретировать как их интенсивность. Определим точность реконструкции формы поверхности исследуемого объекта в точке  $(x_0, y_0)$  в присутствии шумов как относительную погрешность  $\eta_n(x_0, y_0) = \delta Z(x_0, y_0)/Z_0(x_0, y_0)$  оценки высоты  $Z(x_0, y_0)$ . В предположении, что эта поверхность достаточно хорошо аппроксимируется параболической поверхностью  $Z_0(x, y) \approx x^2/(2a) + y^2/(2b)$ , где  $a$  и  $b$  – радиусы ее кривизны, после интегрирования в (23) по  $x$  и  $y$  получаем

$$\eta_n(x_0, y_0) \approx \gamma_{n/s}(\sigma_\xi/l_\xi)^4 \frac{a(\exp X - 1) + b \exp X(\exp Y - 1)}{x_0^2/(2a) + y_0^2/(2b)},$$

где  $X = [x_0 l_\xi / (\sigma_\xi a)]^2$ ;  $Y = [y_0 l_\xi / (\sigma_\xi b)]^2$ .

В частности, для поверхности, аппроксимируемой параболическим вращением  $Z_0(x, y) \approx (x^2 + y^2)/(2a)$ , имеем

$$\eta_n(x_0, y_0) = \gamma_{n/s}(\sigma_\xi/l_\xi)^4 \frac{a^2 \{ \exp[\rho_0 l_\xi / (\sigma_\xi b)]^2 - 1 \}}{\rho_0^2},$$

где  $\rho_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ . На границе области (радиусом  $\rho_0 \approx \rho_b = a\sigma_\xi/l_\xi$ ) обратного рассеяния исследуемого объекта  $\eta_n = \eta_{n2} \approx \gamma_{n/s}(\sigma_\xi/l_\xi)^2(e - 1) \approx 2\eta_{n1}$ . Вблизи вершины этой поверхности ( $x_0 = y_0 = 0$ ), когда выполняется условие  $\rho_0 \ll \rho_b$ , величина  $\eta_n = \eta_{n1} \approx \gamma_{n/s}(\sigma_\xi/l_\xi)^2$ . Из полученных результатов видно, что точность реконструкции формы поверхности объекта растет с ростом  $\rho_0$ , коэффициента  $\gamma_{n/s}$  и крутизны  $\sigma_\xi/l_\xi$  наклонов неровностей его поверхности, т. к. при этом растет угол рассеяния зондирующего излучения каждым участком поверхности, что приводит к уменьшению полезного сигнала. В случае крутых склонов неровностей поверхности объекта, когда  $\sigma_\xi/l_\xi \approx 1$ ,

имеем  $\eta_{n1} \approx \gamma_{n/s}$  и  $\eta_{n2} \approx 2\gamma_{n/s}$ . Соотношение  $\eta_{n2} \approx 2\eta_{n1}$  означает, что при приближении  $\rho_0$  к границе области (радиусом  $\rho_b \approx a\sigma_\xi/l_\xi$ ) обратного рассеяния объекта точность реконструкции его поверхности уменьшается примерно в два раза по сравнению с таковой вблизи вершины поверхности исследуемого неплоского объекта. Поскольку в случае крутых склонов неровностей  $\eta_{n2} \approx 2\gamma_{n/s}$ , то для того чтобы точность реконструкции формы поверхности объекта во всем интервале радиусов (от  $\rho_0$  до  $\rho_b$ ) была бы, например, не ниже пяти процентов, необходимо выполнение условия  $\gamma_{n/s} \leq 0.025$ .

## 5. Выводы

Путем зондирования удаленного неплоского объекта излучением с длиной когерентности, меньшей размеров объекта, по контрасту спекл-структуры плоского изображения этого объекта можно реконструировать форму его поверхности, т. е. сформировать его трехмерное изображение. В отсутствие шумов с уменьшением углового разрешения оптической системы, формирующей изображение объекта, до определенной величины  $w_m$  точность реконструкции формы поверхности объекта возрастает, т. к. погрешность оценки этой формы уменьшается до минимальной величины  $\eta_m$ . Однако при достаточно высоком уровне шумов и при угловом разрешении  $w_m$  форма поверхности реконструируется неточно. В частности, в случае аддитивного шума точность реконструкции формы поверхности исследуемого удаленного объекта уменьшается с ростом крутизны  $\sigma_\xi/l_\xi$  наклонов неровностей его поверхности. Она уменьшается и с ростом коэффициента  $\gamma_{n/s}$ , который равен отношению усредненной по времени интенсивности, регистрируемой на приосевом участке в плоскости изображения исследуемого объекта в его отсутствие, к усредненной по времени интенсивности в изображении этого объекта на том же участке в отсутствие аддитивного шума. При этом по мере удаления от приосевого участка плоского изображения исследуемого объекта и приближения к его контуру точность реконструкции формы поверхности объекта по контрасту спекл-структуры этого изображения уменьшается примерно в два раза.

1. Хорн Х.М. *Зрение роботов* (М.: Мир, 1980).
2. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. *Новейшие методы обработки изображений* (М.: Физматлит, 2008).
3. Troitsky I. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **5203**, 1 (2003).
4. Мандросов В.И. *Квантовая электроника*, **39**, 1059 (2009).
5. Гудман Д. *Статистическая оптика* (М.: Мир, 1986).
6. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).
7. Бакут П.А., Мандросов В.И., Матвеев И.Н., Устинов Н.Д. *Теория когерентных изображений* (М.: Радио и связь, 1987).