

# Неортогональность собственных состояний поляризации в анизотропных резонаторах

Ю.А.Мамаев, П.А.Хандохин

*На основе матричного метода Джонса исследованы собственные поляризационные моды твердотельного лазера с анизотропным резонатором Фабри–Перо, содержащим амплитудный и фазовый анизотропные элементы. Показано, что при несовпадении ориентаций осей этих элементов собственные поляризации становятся эллиптическими и неортогональными. Определены зависимости эллиптичности и азимутов поляризационных мод, а также модуля и фазы параметра неортогональности от угла поворота поляризатора при разных соотношениях между амплитудной и фазовой анизотропиями и показано, что эффект максимален при угле поворота  $45^\circ$ . Обнаружено существование критического значения фазовой анизотропии, зависящей от амплитудной анизотропии, при котором параметр неортогональности (по модулю), а также эллиптичности поляризационных мод стремятся к единице.*

**Ключевые слова:** фазовая анизотропия, амплитудная анизотропия, поляризационная мода, параметр неортогональности, наведенная накачкой анизотропия усиления, резонатор Фабри–Перо, микрочип-лазеры, матричный метод Джонса.

## 1. Введение

В многомодовых лазерах генерируемые моды обычно предполагаются ортогональными, что чаще всего оказывается вполне оправданным. Но есть случаи, когда это свойство не выполняется. Неортогональность мод означает наличие линейной связи между ними, вследствие которой появляется избыточный шум, приводящий к значительному уширению линии излучения лазера [1, 2]. В лазерах с кольцевым резонатором линейная связь между встречными бегущими модами резонатора может стать причиной установления автомодуляционных колебаний [3–6]. В настоящей работе рассматриваются несколько модельных задач, позволяющих выявить некоторые общие свойства собственных поляризационных состояний в анизотропных резонаторах. Эти свойства являются достаточно важными, и их необходимо учитывать при описании динамики лазеров.

Одним из эффективных способов расчета динамики лазерного излучения является разложение электромагнитного поля в резонаторе по системе его собственных мод. Далее можно разложить по собственным функциям резонатора инверсию населенностей и написать уравнения для каждой моды в отдельности. При этом обычно выбирается базис из ортогональных мод, поляризации которых задаются изначально и не изменяются в пространстве [7]. Однако строгость такого подхода не всегда соблюдается: ортогональность собственных мод имеет место только в случае изотропного резонатора, но при наличии фазовой и амплитудной анизотропий резонатора ортогональности мод может и не быть, поэтому здесь важно учитывать взаимную ориентацию собственных осей анизотропных элементов.

Анизотропия резонатора не всегда обусловлена непосредственно внесением внутрь анизотропных элементов; иногда это вообще невозможно, например если резонатор очень короткий (чип-лазер) или зеркала напыляются прямо на грани кристалла. Возможны и другие причины возникновения анизотропии – анизотропия, создаваемая за счет накачки (например, линейно поляризованное излучение полупроводникового лазера приводит к анизотропии усиления [8, 9]); внешнее магнитное поле или остаточное двулучепреломление из-за внутренних напряжений в кристалле вносят фазовую анизотропию. Это означает, что как минимум слабая анизотропия есть всегда, и в некоторых условиях приходится ее учитывать.

В данном случае будет рассматриваться поведение именно собственных поляризационных системы, в связи с чем имеет смысл сразу указать на используемые допущения. Моды в резонаторе Фабри–Перо характеризуются продольной и поперечной структурой и поляризацией. При этом условия резонанса требуют образования стоячих волн по длине резонатора, что в итоге обеспечивает ортогональность различных продольных мод. Из поперечных мод обычно остается только главная, обладающая наименьшими потерями (для отсекаания остальных поперечных мод достаточно поставить диафрагму), поэтому в дальнейшем поперечную структуру пучка можно не рассматривать, считая моду резонатора стоячей плоской волной. Остается вопрос о взаимодействии поляризационных мод с одним и тем же продольным индексом. Этому вопросу и уделено внимание в дальнейшем. Расчет взаимодействия мод является весьма сложной задачей, требующей обычно численного решения. Однако, поскольку рассматриваются поляризационные моды, можно использовать некоторые приближения, позволяющие значительно упростить решение задачи.

В этом случае, пренебрегая дифракцией и зависимостью параметров резонатора и светового пучка в нем от поперечных координат (т.е. рассматривая систему вблизи оси резонатора), а также частотной дисперсией, можно применить для расчета собственных поляризаций матрич-

Ю.А.Мамаев, П.А.Хандохин. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46;  
e-mail: myua@appl.sci-nnov.ru, khando@appl.sci-nnov.ru

ный метод Джонса. Этот метод позволяет найти поляризацию собственных мод в любой точке резонатора, вычислить их добротности и разность их частот. Полученные таким образом результаты позволяют ответить на ряд вопросов: об особенностях собственных поляризаций, о возможности биполяризационного или монополяризационного режима работы лазера и о взаимодействии его собственных мод.

Целью настоящей работы является выявление на примерах конкретных модельных задач общих особенностей поляризационных свойств анизотропных резонаторов.

## 2. Линейный резонатор с частичным поляризатором и фазовой пластинкой

Будем рассматривать анизотропный резонатор, в котором содержатся анизотропные элементы с амплитудной и фазовой анизотропиями. Остаточное двулучепреломление активного элемента смоделируем фазовой пластинкой с фазовой толщиной  $\theta$ , при этом оси  $x, y$  декартовой системы координат ориентируем вдоль осей фазовой пластинки так, как показано на рис.1. В резонаторе находится также частичный поляризатор, повернутый в общем случае на некоторый угол  $\varphi$  относительно оси  $x$ , который моделирует эффект наведенной анизотропии усиления линейно поляризованным излучением накачки [8–10]. Поворот плоскости поляризации излучения накачки на угол  $\varphi$  означает поворот поляризатора на этот же угол. Расчет анизотропного резонатора удобно проводить с помощью метода матриц Джонса [11].

Применение метода Джонса для расчета собственных состояний поляризации резонатора заключается в построении матрицы  $M$  при полном обходе контура резонатора и в нахождении собственных векторов  $u$  и собственных значений  $\lambda$  данной матрицы:

$$M = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1, \tag{1}$$

$$Mu = \lambda u.$$

Будем рассматривать собственный вектор в следующем виде:

$$u = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где  $\chi = E_y/E_x$  – комплексный поляризационный параметр, позволяющий определить эллиптичность  $\varepsilon$  (отношение малой оси эллипса поляризации к большой) и азимут  $\beta$  (угол наклона большой полуоси эллипса поляризации к оси  $x$ ) [12, 13]:

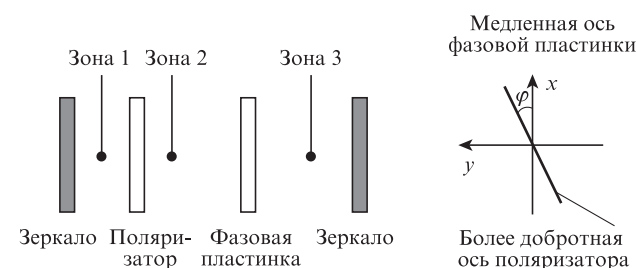


Рис.1. Схема резонатора Фабри–Перо с поляризатором и фазовой пластинкой внутри него, развернутыми на угол  $\varphi$ .

$$\varepsilon = \tan \left[ \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2 \operatorname{Im} \chi}{1 + |\chi|^2} \right) \right], \tag{3}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \operatorname{Re} \chi}{1 - |\chi|^2} \right) + \frac{n\pi}{2}.$$

Здесь  $n = 0$  для одной поляризационной моды и  $n = 1$  для другой.

Уравнение (1) имеет решение в виде двух собственных векторов  $u_{1,2}$  и соответственно двух собственных значений  $\lambda_{1,2}$ . Элементы матрицы  $M_{ij}$  позволяют определить эти собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \operatorname{Tr}(M)/2 \pm \sqrt{\operatorname{Tr}^2(M)/4 - \det(M)}, \tag{4}$$

где  $\operatorname{Tr}(M) = M_{11} + M_{22}$ ;  $\det(M) = M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21}$ ; комплексные поляризационные параметры

$$\chi_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - M_{11}}{M_{12}} = \frac{M_{21}}{\lambda_{1,2} - M_{22}}. \tag{5}$$

Введем также параметр  $g$ , характеризующий неортогональность собственных поляризационных мод:

$$g = \frac{(u_1 u_2^*)}{|u_1| |u_2|} = \frac{1 + \chi_1 \chi_2^*}{\sqrt{(1 + |\chi_1|^2)(1 + |\chi_2|^2)}} = |g| \exp(i \arg g); \tag{6}$$

при этом  $0 \leq |g| \leq 1$ , а условие  $g = 0$  означает отсутствие линейной связи между двумя поляризационными модами.

Нас будет интересовать состояние поляризационных мод в активной среде, поэтому будем рассматривать поляризационные параметры в зоне 2 (см. рис.1) анизотропного резонатора. Матрица  $M$  в зоне 2 может быть представлена в следующем виде:

$$M = r_1 r_2 F^2 R(\varphi) P^2 R(-\varphi). \tag{7}$$

Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - b \end{pmatrix}$$

– матрица частичного поляризатора (величина  $b < 1$  определяет амплитудную анизотропию);

$$F = \begin{pmatrix} \exp(i\theta/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta/2) \end{pmatrix}$$

– матрица фазовой пластинки;

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

– матрица поворота на угол  $\varphi$ ;  $r_{1,2}$  – коэффициенты отражения зеркал.

После перемножения матриц в (7) и введения обозначения  $\tilde{b} = b(1 - b/2)$  окончательно имеем:

$$M/r_1r_2 = \begin{pmatrix} \exp(i\theta)(1 - 2\tilde{b} \sin^2\varphi) & \exp(i\theta)\tilde{b} \sin 2\varphi \\ \exp(-i\theta)\tilde{b} \sin 2\varphi & \exp(-i\theta)(1 - 2\tilde{b} \cos^2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Собственные значения  $\lambda$  из (4) определяют потери  $p = 1 - |\lambda|^2$  в резонаторе и поправки к частотам поляризационных мод

$$f = \Delta\nu/\nu_0 = \arg\lambda/(2\pi),$$

где  $\nu_0 = c/(2L_{\text{opt}})$  – межмодовый интервал;  $c$  – скорость света;  $L_{\text{opt}}$  – оптическая длина резонатора.

Получить в общем случае выражения для поляризационных параметров  $\varepsilon$ ,  $\beta$  и параметра неортогональности  $g$  сложно. Наглядные выражения для этих параметров удастся получить в двух предельных случаях: когда фазовая анизотропия мала по сравнению с амплитудной и наоборот.

Рассмотрим сначала случай малой фазовой анизотропии. При условии

$$\theta \ll \tilde{b} \quad (9)$$

подкоренное выражение в (4) можно разложить в ряд по малому параметру и, учитывая члены первого порядка малости, после несложных преобразований получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx -\sin(2\theta) \sin(2\varphi)/(4\tilde{b}), \\ \varepsilon_2 &\approx -(1 - 2\tilde{b}) \sin(2\theta) \sin(2\varphi)/(4\tilde{b}), \\ \beta_1 &\approx \varphi, \\ \beta_2 &\approx \pi/2 + \varphi, \\ g &\approx i(1 - \tilde{b}) \sin(2\theta) \sin(2\varphi)/(2\tilde{b}). \end{aligned} \quad (10)$$

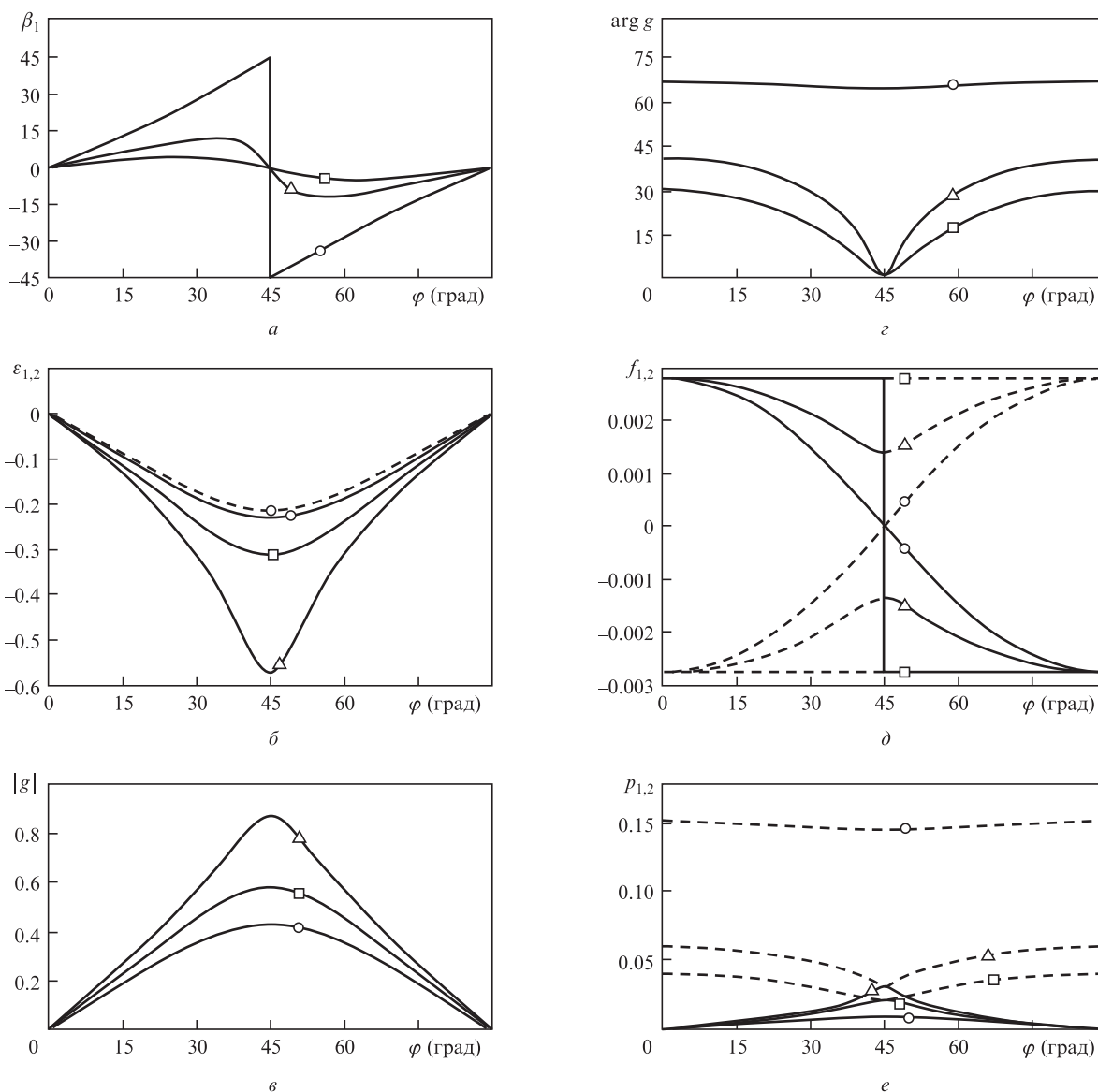


Рис.2. Зависимости азимута  $\beta_1$ , эллиптичностей  $\varepsilon_{1,2}$ , модуля и фазы параметра неортогональности  $g$ , поправок к частотам  $f_{1,2}$  и потерь  $p_{1,2}$  двух поляризационных мод от угла поворота  $\varphi$  поляризатора при амплитудной анизотропии  $b = 0.01$  ( $\square$ ),  $0.015$  ( $\Delta$ ) и  $0.04$  ( $\circ$ ) для случая фазовой анизотропии при  $\theta = 1^\circ$  ( $0.0175$  рад). Здесь и далее зависимости, относящиеся к параметрам с индексом «1», обозначены сплошными кривыми, с индексом «2» – штриховыми.

Из выражений (10) видно, что эллиптичности  $\epsilon_{1,2}$  двух поляризационных мод различны по модулю и имеют одинаковый знак. Максимального значения эти параметры достигают при  $\varphi = \pi/4$  и  $3\pi/4$ , так же как и модуль параметра неортогональности  $g$ . Эллиптичности  $\epsilon_{1,2}$  и модуль  $g$  растут с уменьшением  $b$  (при выполнении условия (9)).

Азимуты эллипсов поляризации отслеживают поворот амплитудно-анизотропного элемента, при этом с учетом членов первого порядка малости по  $\theta/b$  разность азимутов составляет  $\pi/2$ .

В случае малой амплитудной анизотропии разложение подкоренного выражения в (4) в ряд возможно, если выполняются условия

$$\tilde{b} \ll 1, \quad \tilde{b} \ll \tan\theta. \tag{11}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для эллиптичностей  $\epsilon_{1,2}$ , азимутов  $\beta_{1,2}$  и параметра неортогональности  $g$ :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \approx -\tan\left[0.5 \arcsin\left(\frac{2Ab \sin(2\theta) \tan\varphi}{4 + A^2 b^2 \sin^2\theta \tan^2\varphi}\right)\right], \tag{12}$$

$$\beta_1 \approx -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4Ab \sin^2\theta \tan\varphi}{4 - A^2 b^2 \sin^2\theta \tan^2\varphi}\right),$$

$$\beta_2 \approx \pi/2 + \beta_1,$$

$$g \approx -\frac{4Ab \sin\theta \tan\varphi}{4 - A^2 b^2 \sin^2\theta \tan^2\varphi},$$

где  $A = 1 + 2 \cot^2\theta \cos^2\varphi$ . Из выражений (12) следует, что эллиптичности двух поляризационных мод равны по величине и имеют одинаковый знак. Азимуты эллипсов поляризации соответственно близки к 0 и  $\pi/2$  вследствие малости амплитудной анизотропии  $b$ , при этом разность азимутов в общем случае отлична от  $\pi/2$  на малую величину  $2\beta_1$ .

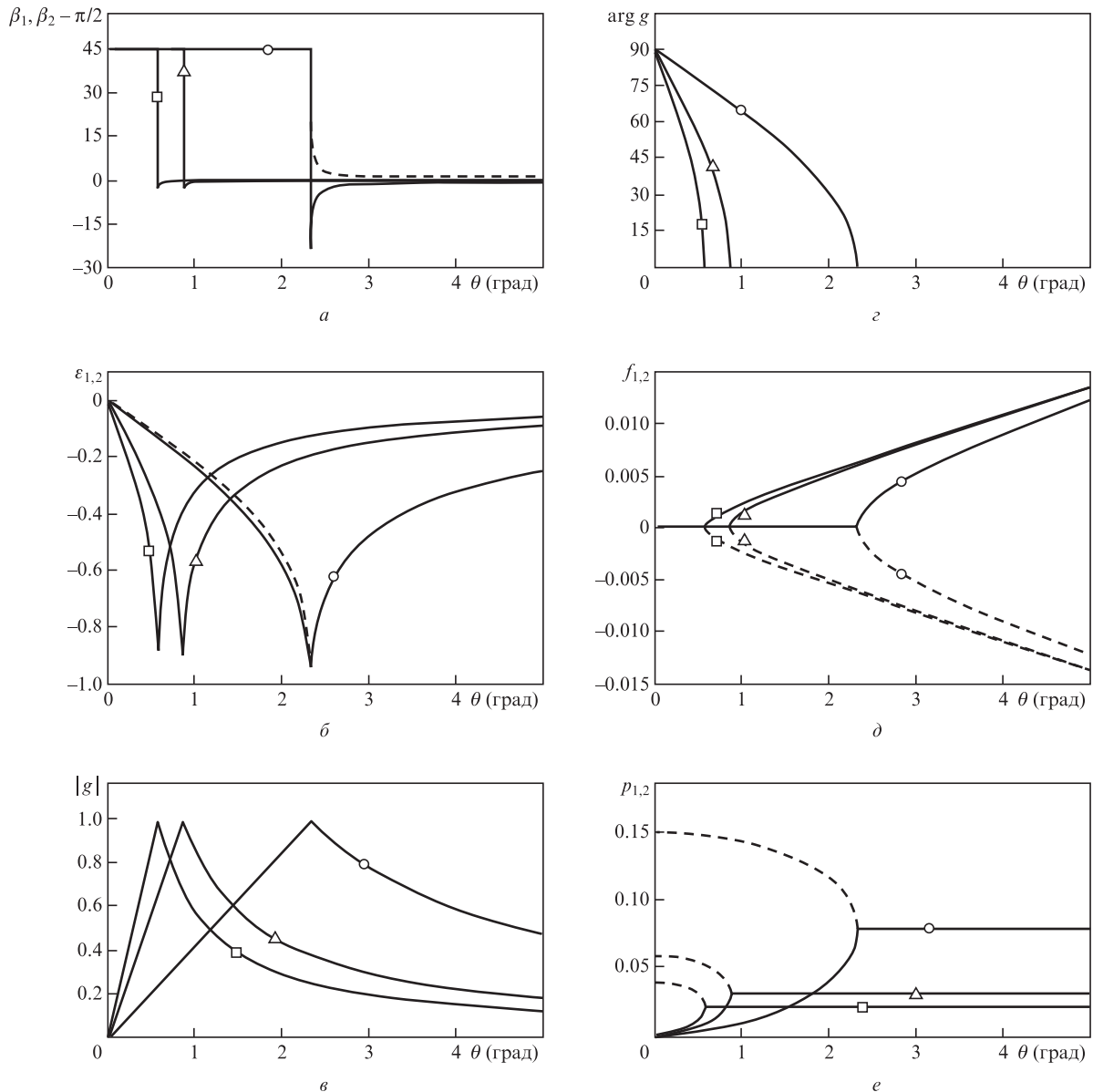


Рис.3. Зависимости азимутов  $\beta_1$  и  $\beta_2 - \pi/2$ , эллиптичностей  $\epsilon_{1,2}$ , модуля и фазы параметра неортогональности  $g$ , поправок к частотам  $f_{1,2}$  и потерь  $\rho_{1,2}$  двух поляризационных мод от фазовой анизотропии  $\theta$  при амплитудной анизотропии  $b = 0.01$  ( $\square$ ),  $0.015$  ( $\Delta$ ) и  $0.04$  ( $\circ$ ) и угле поворота поляризатора  $\varphi = 45^\circ$ .

### 3. Результаты численного моделирования

Нами проводился также численный расчет поляризационных параметров и параметра неортогональности мод резонатора Фабри–Перо (рис.1) с учетом точных выражений (4)–(8). На рис.2 приведены зависимости характеристик поляризационных мод резонатора от угла поворота  $\varphi$  поляризатора для разных значений амплитудной анизотропии  $b$  при фазовой толщине  $\theta = 1^\circ$  (0.0175 рад). При малой амплитудной анизотропии  $b$  ( $b = 0.01 < \theta$ , рис.2,a) ориентации поляризационных мод практически не зависят от ориентации поляризатора (сильная фазовая анизотропия), в то время как при  $b = 0.04 > \theta$  азимуты поляризационных мод фактически отслеживают ориентацию поляризатора  $\varphi$ . В этом случае можно говорить о сильной амплитудной анизотропии.

Изменения азимутов собственных поляризаций с поворотом собственной оси поляризатора сопровождаются изменениями эллиптичностей  $\epsilon_{1,2}$  (рис.2,б), а также моду-

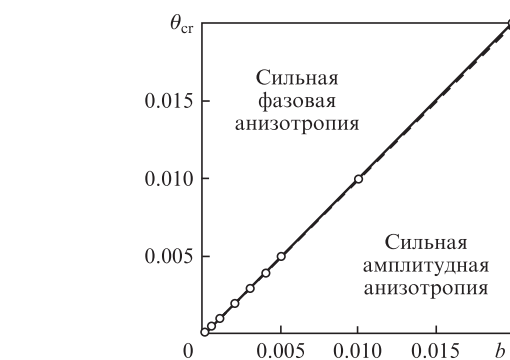


Рис.4. Зависимость критического значения  $\theta_{cr}$  фазовой анизотропии от амплитудной анизотропии  $b$  при угле поворота поляризатора  $\varphi = 45^\circ$ .

ля и фазы параметра неортогональности (рис.2,в,г). Видно, что максимального значения  $\epsilon_{1,2}$  достигают при  $\varphi = 45^\circ$ , при этом эллиптичности имеют одинаковый знак и не-

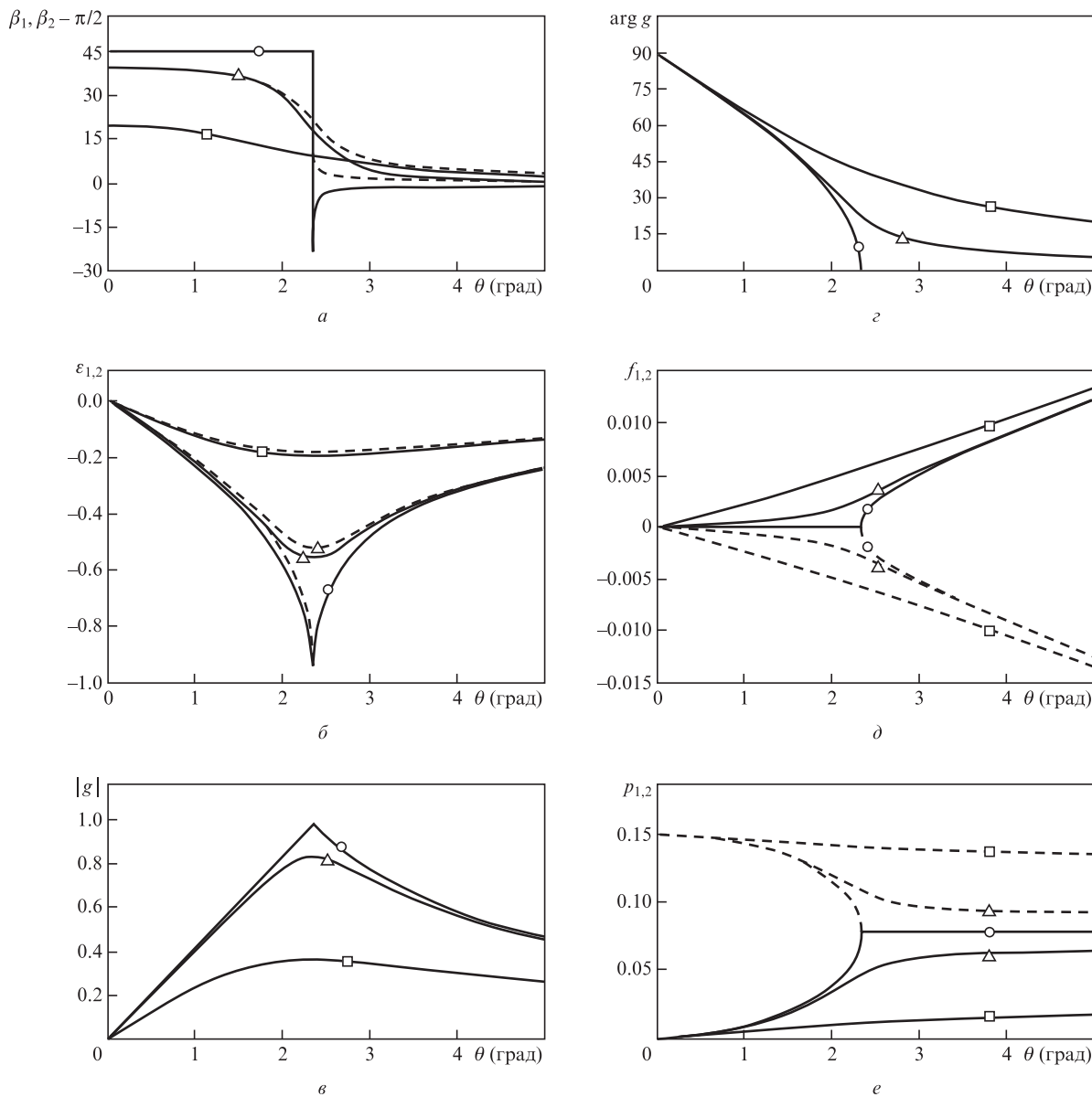


Рис.5. Зависимости азимутов  $\beta_1$  и  $\beta_2 - \pi/2$ , эллиптичностей  $\epsilon_{1,2}$ , модуля и фазы параметра неортогональности  $g$ , поправок к частотам  $f_{1,2}$  и потерь  $p_{1,2}$  двух поляризационных мод от фазовой анизотропии  $\theta$  при углах поворота поляризатора  $\varphi = 45^\circ$  (○),  $40^\circ$  (△) и  $20^\circ$  (□) и  $b = 0.04$ .

сколько различаются по величине (сплошная и штриховая кривые). Аналогичный вид имеют зависимости модуля параметра неортогональности  $|g|$ , приведенные на рис.2,в. На рис.2,г даны зависимости  $\text{arg}g$ : при малых  $\theta$  величина  $\text{arg}g$  изменяется слабо, имея минимум при  $\varphi = 45^\circ$ ; с ростом  $\theta$  эти изменения более заметны, и при  $\varphi = 45^\circ$   $\text{arg}g$  обращается в нуль. На рис.2,д представлены зависимости поправок к частотам двух поляризационных мод (нормированных на межмодовый интервал) от угла поворота  $\varphi$ : существенное изменение начального расщепления частот за счет фазовой анизотропии происходит при  $b \geq \theta$ , т.е. при сравнимой с фазовой амплитудной анизотропии.

Чтобы определить влияние фазовой толщины  $\theta$  фазовой пластинки на поляризационные характеристики и параметр неортогональности, были проведены расчеты зависимостей  $\epsilon_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $|g|$  и  $\text{arg}g$  от  $\theta$  при угле поворота поляризатора  $\varphi = 45^\circ$  и разных значениях амплитудной анизотропии  $b$ . Результаты приведены на рис.3. Видно, что при определенном малом значении  $\theta = \theta_{\text{cr}}$ , зависящем от величины  $b$ , собственные поляризации могут приближаться к круговым, при этом параметр неортогональности по модулю близок к единице (рис.3,б, в). С ростом амплитудной анизотропии  $b$  величина  $\theta_{\text{cr}}$ , соответствующая максимуму  $\epsilon_{1,2}$ , смещается в сторону больших фазовых толщин.

При толщине фазовой пластинки  $\theta_{\text{cr}}$  наблюдается резкий скачок азимутов на угол  $\sim 45^\circ$  при  $\varphi = 45^\circ$  (рис.3,а). На рис.4 приведена зависимость  $\theta_{\text{cr}}$  от  $b$  (штриховая линия), которая с большой точностью аппроксимируется линейной зависимостью  $\theta_{\text{cr}} = b$  (сплошная линия). Эта прямая разделяет области сильной и слабой амплитудной анизотропии.

Результаты исследования зависимости поляризационных параметров и параметра неортогональности от фазовой толщины  $\theta$  при различных углах ориентации частичного поляризатора ( $45^\circ$ ,  $40^\circ$  и  $20^\circ$ ) в случае  $b = 0.04$  приведены на рис.5: для угла  $\varphi = 45^\circ$  имеем максимальные значения (по модулю) эллиптичностей двух поляризационных мод (поляризации близки к круговым) с параметром ортогональности, также близким к единице. Качественный характер зависимостей указанных величин от  $\theta$  остается прежним при уменьшении (или увеличении) угла  $\varphi$  относительно  $45^\circ$ , однако имеет место заметное уменьшение этих величин, особенно в области  $\theta \approx \theta_{\text{cr}}$ .

Анализ характеристик поляризационных мод в зонах 1 и 3 (см. рис.1) показал, что все приведенные выше зависи-

мости остаются практически без изменения, лишь эллиптичности в этих зонах одинаковы для двух поляризационных мод и составляют полусумму от эллиптичностей в зоне 2.

#### 4. Заключение

Проведенные расчеты показывают, что в случае линейно поляризованного излучения накачки появляется амплитудная анизотропия, которая в совокупности с остаточной фазовой анизотропией активного элемента может оказывать существенное влияние на поляризации двух собственных мод резонатора и приводит к их неортогональности (и, соответственно, к связи и взаимодействию этих мод в активной среде). Ортогональность собственных поляризационных мод имеет место лишь при совпадении собственных осей поляризатора и фазоанизотропной среды. Отсутствие линейной амплитудной анизотропии может достигаться использованием циркулярно поляризованного или неполяризованного излучения накачки.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ №НШ-3800.2010.2.

1. Petermann K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-15**, 566 (1979).
2. Ханин Я.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **47**, 799 (2004).
3. Khandokhin P.A., Khanin Ya.I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 226 (1985).
4. Zolotoverkh I.I., Kravtsov N.V., Lariontsev E.G., Makarov A.A., Firsov V.V. *Opt. Comm.*, **113**, 249 (1994).
5. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **36**, 192 (2006).
6. Sorel M., Giuliani G., Scir'e A., Miglierina R., Donati S., Laybourn P.J.R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **39**, 1187 (2003).
7. Хандохин П.А. *Квантовая электроника*, **36**, 1161 (2006).
8. Bouwmans G., Segard B., Glorieux P., Milovsky N., Khandokhin P., Shirokov E. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **47**, 813 (2004).
9. Иевлев И.В., Хандохин П.А., Широков Е.Ю. *Квантовая электроника*, **36**, 228 (2006).
10. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Наумкин Н.И. *Квантовая электроника*, **34**, 839 (2004).
11. Молчанов В.Я., Скроцкий Г.В. *Квантовая электроника*, №4, 3 (1971).
12. Nilsson A.C., Gustafson E.K., Byer R.L. *IEEE J. Quantum Electronics*, **25**, 767 (1989).
13. Новиков М.А., Тертышник А.Д. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **19**, 364 (1976).