

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 42.65.-k, 42.65.Wi, 42.65.Tg, 05.45.-a

# Чирпированные эллиптически поляризованные кноидальные волны и поляризационный «хаос» в изотропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности

В.А.Макаров, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов

Установлено, что в изотропной среде с локальной и нелокальной составляющими кубической нелинейности и частотной дисперсией второго порядка могут распространяться чирпированные эллиптически поляризованные кноидальные волны, а также возникать аperiodические режимы, внешне напоминающие поляризационный хаос. В частном случае формирования волноводов единого профиля для двух циркулярно поляризованных составляющих светового поля найдены соответствующие аналитические решения и показано, что частоты чирпированных компонент меняются согласованно с периодическим изменением их интенсивностей. При этом характер изменения состояния поляризации в процессе распространения световой волны зависит от величин нелинейных фазовых набегов циркулярно поляризованных компонент поля за период и чувствителен к изменению начальных условий.

**Ключевые слова:** кубическая нелинейность, пространственная дисперсия, нелинейное уравнение Шредингера, эллиптическая поляризация, кноидальные волны, чирп, поляризационный хаос.

## 1. Введение

Распространение эллиптически поляризованной электромагнитной волны в изотропной среде с кубической нелинейностью и частотной дисперсией второго порядка в отсутствие дифракции описывается системой из двух нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). Если поляризация среды имеет локальную и нелокальную (связанную с пространственной дисперсией [1–4]) составляющие, то эта система НУШ принимает следующий вид [5–9]:

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} - \frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial t^2} + i[\mp\rho_0 + (\sigma_1/2 \mp \rho_1) |A_{\pm}|^2 + (\sigma_1/2 + \sigma_2) |A_{\mp}|^2] A_{\pm} = 0, \quad (1)$$

где  $A_{\pm}(z, t)$  – медленно меняющиеся комплексные амплитуды циркулярно поляризованных компонент светового поля;  $t$  – время в собственной (бегущей) системе координат;  $k_2 = d^2k/d\omega^2$  – константа, характеризующая частотную дисперсию среды;  $\omega$  – частота распространяющейся волны;  $k$  – модуль ее волнового вектора, направленного вдоль оси  $z$ .

Входящие в (1) константы  $\sigma_1 = 4\pi\omega^2\chi_{xyxy}/(kc^2)$  и  $\sigma_2 = 2\pi\omega^2\chi_{xyxy}/(kc^2)$  связаны с компонентами симметричного по перестановке последних двух индексов тензора локальной кубической нелинейности  $\hat{\chi}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ . Констан-

ты  $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2\gamma_{0,1}/c^2$  пропорциональны псевдоскалярным константам линейной и нелинейной гирации  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ . Они, соответственно, задают отличные от нуля компоненты тензоров нелокальных линейной и нелинейной восприимчивостей  $\hat{\gamma}^{(1)}$  и  $\hat{\gamma}^{(3)}$ , с которыми связаны вклады  $\hat{\gamma}^{(1)}\nabla E$  и  $\hat{\gamma}^{(3)}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}$  в поляризацию среды [1–4].

При произвольных соотношениях между  $\sigma_{1,2}$  и  $\rho_{0,1}$  система (1) не интегрируется [10–14] и найти границы областей устойчивости нелинейных поляризационных мод (nonlinear eigenpolarizations согласно терминологии [14]) невозможно. Приходится ограничиваться поиском и детальным анализом семейств частных решений (1), вид которых в ряде случаев позволяет делать некоторые выводы о характере распространения излучения в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика. Известен ряд ее численных [5–7] и аналитических [8–13] частных решений, полученных при некоторых дополнительных требованиях. Так, в [8] в предположении линейной связи амплитуд двух циркулярно поляризованных компонент светового поля найдены решения системы (1) в форме солитонных пар. В [9] при условии формирования волноводов единого профиля для обеих компонент светового поля  $A_{\pm}(z, t)$  построено семейство решений (1), включающее девять типов эллиптически поляризованных кноидальных волн, амплитуды которых пропорциональны эллиптическим функциям Якоби [15], а фазы не зависят от времени и линейно меняются с ростом  $z$ .

В настоящей работе мы найдем частные, соответствующие формированию волноводов единого профиля для двух циркулярно поляризованных компонент светового поля, решения (1), у которых, в отличие от решений, приведенных в [9], фазы компонент  $A_{\pm}(z, t)$  не только линейно зависят от  $z$ , но и нелинейно меняются при изменении  $t$ :

$$A_{\pm}(z, t) = R_{\pm}(t) \exp\{i[\phi_{\pm}(t) + \kappa_{\pm}z]\}. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa_{\pm}$  – нелинейные добавки к константам распространения (константы разделения переменных), а  $R_{\pm}(t)$  и  $\phi_{\pm}(t)$  –

**В.А.Макаров, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов.** Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru, v\_petnikova@yahoo.com

Поступила в редакцию 28 августа 2012 г., после доработки – 22 октября 2012 г.

вещественные функции. Будет показано, что в этом частном случае интенсивности циркулярно поляризованных компонент  $R_{\pm}^2$  и нелинейные добавки  $\omega_{\pm}(t) = d\phi_{\pm}/dt$  к частоте  $\omega$  (чирп) выражаются через эллиптические функции Якоби и согласованно осциллируют. При этом эволюция состояния поляризации таких волн также весьма необычна. В зависимости от начальных условий в нелинейной среде могут формироваться как решения со строго периодическими изменениями состояния поляризации – чирпированные эллиптически поляризованные кноидальные волны, так и решения, внешне больше похожие на поляризационный хаос. Заметим, что решения системы НУШ типа (2) в интегрируемом случае уже анализировались ранее в [16–19] при рассмотрении параметрических процессов на квадратичной нелинейности.

## 2. Интегралы задачи и частные аналитические решения

Подставив (2) в (1) и осуществив стандартную процедуру разделения переменных, при  $k_2 \neq 0$  получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 R_{\pm}}{dt^2} - R_{\pm} \left( \frac{d\phi_{\pm}}{dt} \right)^2 - \frac{2}{k_2} [\kappa_{\pm} \mp \rho_0 + (\sigma_1/2 \mp \rho_1) R_{\pm}^2 + (\sigma_1/2 + \sigma_2) R_{\mp}^2] R_{\pm} = 0, \quad (3a)$$

$$2 \frac{dR_{\pm}}{dt} \frac{d\phi_{\pm}}{dt} + R_{\pm} \frac{d^2 \phi_{\pm}}{dt^2} = 0. \quad (3б)$$

Заметим, что уравнения (3б) справедливы во всех тех случаях, когда нелинейные добавки к показателям преломления двух циркулярно поляризованных компонент поля в (1) не зависят от их фаз  $\phi_{\pm}$ , являясь произвольными функциями от интенсивностей  $|A_{\pm}|^2$ . Действительно, система (3) совпадает с уравнениями, описывающими механическое движение системы из двух материальных точек единичной массы, имеющих радиус-векторы  $\mathbf{R}_{\pm}(t) = \{R_{\pm}(t) \cos \phi_{\pm}(t), R_{\pm}(t) \sin \phi_{\pm}(t)\}$ , в поле центральных сил. С точки зрения этой аналогии соотношения (3б) отражают закон сохранения моментов импульсов этих точек и остаются справедливыми во всех тех случаях, когда потенциальная энергия системы является произвольной функцией  $R_{\pm}^2$ .

Уравнения (3б) легко интегрируются, что, как и в [16–19], определяет два интеграла решаемой задачи

$$R_{\pm}^2(t) [d\phi_{\pm}(t)/dt] \equiv R_{\pm}^2(t) \omega_{\pm}(t) = R_{\pm}^2(0) \omega_{\pm}(0) = R_{\pm 0}^2 \omega_{\pm 0}, \quad (4)$$

которые в рамках упомянутой аналогии являются моментами импульсов материальных точек. Из (4) следует, что если хотя бы для одного значения  $t_0$  выполняются соотношения  $R_{\pm}(t_0) = 0$  и  $(dR_{\pm}/dt)|_{t=t_0} \neq 0$ , то во все моменты времени  $t_1$ , когда  $R_{\pm}(t_1) \neq 0$ , производная  $(d\phi_{\pm}/dt)|_{t=t_1} \equiv 0$  и, следовательно,  $\phi_{\pm} = \text{const}$ . В этом случае фазы  $\phi_{\pm}$  могут меняться лишь скачком в точках, отвечающих нулям  $R_{\pm}$ . Следовательно, интересующие нас решения (3), у которых  $\omega_{\pm}(t) \neq 0$ , могут существовать только в тех случаях, когда  $|R_{\pm}(t)| > 0$  для всех значений  $t$ . При этом фазы  $\phi_{\pm}$  и

$\omega_{\pm}$  находятся с помощью интегралов (4) после решения уравнений (3а):

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_{\pm}(0) + R_{\pm 0}^2 (d\phi_{\pm}/dt)|_{t=0} \int_0^t R_{\pm}^{-2}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$\omega_{\pm}(t) = R_{\pm 0}^2 \omega_{\pm 0} R_{\pm}^{-2}(t).$$

Условие формирования волноводов единого профиля для двух циркулярно поляризованных компонент поля  $A_{\pm}(z, t)$  равносильно требованию линейной связи  $\delta_+ |A_+|^2 + \delta_- |A_-|^2 = \delta_0$  между их интенсивностями, в которой константы  $\delta_{0,\pm}$  подлежат дальнейшему определению (см. [9]). Благодаря этому амплитуды  $R_{\pm}(t)$  становятся зависимыми, и система (3а) превращается в пару формально независимых уравнений, которые с учетом (4) могут быть записаны в виде

$$\frac{d^2 R_{\pm}}{dt^2} - \frac{R_{\pm 0}^4 \omega_{\pm 0}^2}{R_{\pm}^3} - \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{k_2} \times \left[ \frac{2(\kappa_{\pm} \mp \rho_0)}{\sigma_1 + 2\sigma_2} + \frac{\delta_0}{\delta_{\mp}} + \left( \frac{\sigma_1 \mp 2\rho_1}{\sigma_1 + 2\sigma_2} - \frac{\delta_{\pm}}{\delta_{\mp}} \right) R_{\pm}^2 \right] R_{\pm} = 0. \quad (6)$$

Используя теперь общий вид решения уравнения (6), приведенный в [16–19], найдем  $\delta_0/\delta_+$ ,  $\delta_-/\delta_+$  и амплитуды

$$R_{\pm}(t) = R_{\pm 0} [1 + n_{\pm} \text{sn}^2(vt, \mu)]^{1/2}, \quad (7)$$

где

$$n_{\pm} = n_{\pm}(\mu, \nu) = \mu^2 \nu^2 k_2 (\sigma_2 \mp \rho_1) / [R_{\pm 0}^2 (\rho_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)].$$

При этом действительный масштабный коэффициент  $\nu$  и модуль  $\mu$  эллиптического синуса Якоби [15], которыми и задан единый профиль волноводов для двух циркулярно поляризованных компонент поля, определяются начальными условиями с помощью соотношений

$$\frac{d\phi_{\pm}}{dt} \Big|_{t=0} \equiv \omega_{\pm 0} = \pm \nu \left[ \frac{(\mu^2 + n_{\pm})(1 + n_{\pm})}{n_{\pm}} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Заметим, что значения  $\nu$  и  $\mu$  должны быть такими, чтобы определяемые ими  $R_{\pm}^2(t)$  и  $\omega_{\pm 0}^2$  оказались положительными. Это возможно, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$0 < n_{\pm}(\mu, \nu) < \infty, \quad -1 < n_{\pm}(\mu, \nu) < -\mu^2, \quad (9)$$

позволяющих получить искомые ограничения на допустимые значения  $\nu$  и  $\mu$ . Величины  $R_{\pm 0}$  всегда оказываются определенными с точностью до знака, что по аналогии с [16–19] приводит к существованию двух («положительной» и «отрицательной») ветвей искомых решений.

Пользуясь (5), (7) и (8), фазы компонент  $A_{\pm}(z, t)$  можно выразить через эллиптический интеграл третьего рода [15]

$$\phi_{\pm}(t) - \phi_{\pm}(0) = \frac{\omega_{\pm 0}}{\nu} \int_0^{\nu t} \frac{d\tau}{1 + n_{\pm} \text{sn}^2(\tau, \mu)} = \frac{\omega_{\pm 0}}{\nu} \Pi(\nu t, n_{\pm}, \mu), \quad (10)$$

имеющий порядок  $n_{\pm}$ , а нелинейные добавки к частотам – через эллиптические функции Якоби:

$$\omega_{\pm}(t) = \frac{\omega_{\pm 0}}{1 + n_{\pm} \operatorname{sn}^2(vt, \mu)}. \tag{11}$$

Условие  $\omega_{\pm}(t) \neq 0$ , отвечающее ненулевому чирпу кноидальной волны, снимает имевшее место в [9] вырождение решений по  $v$  и  $\mu$ . Входящие в (2) добавки к константам распространения  $\kappa_{\pm}$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} = & \pm \rho_0 - R_{\mp 0}^2(\sigma_1/2 + \sigma_2) \\ & - \frac{2k_2 v^2(1 + \mu^2) + 3R_{\pm 0}^2(\sigma_1 \mp 2\rho_1)}{4} \\ & - \frac{(\sigma_2 \pm \rho_1)(\sigma_1 + 2\sigma_2)R_{\pm 0}^2}{4(\sigma_2 \mp \rho_1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ниже решения  $R_{\pm}(t)$ , отношения которых  $R_+(t)/R_-(t)$  не зависят от времени, по аналогии с [9] будем называть вырожденными и помечать верхним индексом  $d$  в круглых скобках. Из приведенных выше формул следует, что амплитуды  $R_{\pm 0}^{(d)}$ , фазы  $\phi_{\pm}^{(d)}(t)$  и добавки к частоте  $\omega_{\pm}^{(d)}(t)$  таких решений связаны соотношениями

$$[R_{+0}^{(d)}/R_{-0}^{(d)}]^2 = (\sigma_2 - \rho_1)/(\sigma_2 + \rho_1), \tag{13}$$

$$\phi_+^{(d)}(t) - \phi_+^{(d)}(0) = \phi_-^{(d)}(t) - \phi_-^{(d)}(0), \quad \omega_+^{(d)}(t) = \omega_-^{(d)}(t).$$

Легко убедиться, что эллиптически поляризованные кноидальные волны, о которых шла речь в работе [9], представляют собой частные случаи выписанных нами выше решений при  $\omega_{\pm}(t) \equiv 0$ , соответствующих следующим из неравенств (9) границам областей допустимых значений  $n_{\pm}$ . Не меняющие знак решения  $R_{\pm}(t) = v[-k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)/(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)]^{1/2} \operatorname{dn}(vt, \mu)$  формируются из положительной ветви формулы (7) при  $n_{\pm} = -\mu^2$ . Знакопеременные решения  $R_{\pm}(t) = v\mu[k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)/(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)]^{1/2} \times \operatorname{sn}(vt, \mu)$  и  $R_{\pm}(t) = v\mu[-k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)/(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)]^{1/2} \operatorname{cn}(vt, \mu)$  получаются из (7) при  $n_{\pm} \rightarrow \infty$  и  $n_{\pm} = -1$  соответственно. Причем в двух последних случаях необходимо шить (см. [18]) положительную и отрицательную ветви (7) в те моменты времени, когда  $R_{\pm}(t) = 0$  и происходят скачки фаз. Отметим также возможность существования «гибридных» решений, в которых одна из циркулярно поляризованных компонент поля чирпирована, а вторая – нет.

### 3. Чирпированные эллиптически поляризованные кноидальные волны и поляризационный «хаос»

Основываясь на характере изменения амплитуд двух циркулярно поляризованных компонент поля во времени и их асимптотиках (предельный переход к решениям работы [9]), а также на связности границ областей их существования, все решения (7)–(10) можно разделить на три группы.

К первой группе относятся те из них, у которых амплитуды обеих компонент поля в точке  $t = 0$  начинают расти. Решения такого типа существуют в тех случаях, когда знаки величин  $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$  и  $(\sigma_2 \mp \rho_1)$  одина-

ковы и, следовательно,  $n_{\pm} > 0$ . При  $\omega_{\pm}(t) \equiv 0$  они переходят в решения типа ss по классификации, приведенной в [9]. Ко второй группе относятся те решения, у которых амплитуды обеих компонент поля в точке  $t = 0$  начинают уменьшаться. Они существуют в тех случаях, когда знаки величин  $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$  и  $(\sigma_2 \mp \rho_1)$  противоположны и, следовательно,  $n_{\pm} < 0$ . При  $\omega_{\pm}(t) \equiv 0$  решения этой группы переходят в решения типов sc, cd и dd (классификация [9]). В тех случаях, когда  $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$  и  $(\sigma_2 - \rho_1)$  положительны, а параметр  $(\sigma_2 + \rho_1)$  отрицателен, либо наоборот, амплитуда одной из компонент поля в точке  $t = 0$  начинает расти, а второй – уменьшаться, формируется третья группа решений. При  $\omega_{\pm}(t) \equiv 0$  они переходят в решения типов sc и sd (классификация [9]). Отметим, что решения всех трех перечисленных выше групп имеют солитонные асимптотики, соответствующие предельному переходу эллиптических функций Якоби в гиперболические функции при  $\mu \rightarrow 1$ . При этом вырождение возможно только для решений первой и второй групп.

В оптическом диапазоне характерный масштаб проявления нелокальности отклика на внешнее световое поле в гиротропных средах существенно меньше длины волны, поэтому  $|\rho_1| \ll |\sigma_{1,2}|$ . Вследствие этого решения третьей группы в таких средах вряд ли могут быть реализованы. На рис.1 иллюстрируется типичный характер зависимостей нормированных модулей  $r_{\pm} = |R_{\pm}|v^{-1}|\sigma_1/k_2|^{1/2}$ , фаз  $\phi_{\pm}$  и нелинейных добавок  $\omega_{\pm}(t) = d\phi_{\pm}/dt$  к частоте  $\omega$  от безразмерного времени  $vt$ , соответствующих решениям первой из трех перечисленных выше групп.

Эволюцию состояния поляризации чирпированных кноидальных волн, соответствующих найденным решениям, удобно описать с помощью параметров Стокса [20], связанных с комплексными амплитудами  $A_{\pm}$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} S_0(t) &= (|A_+|^2 + |A_-|^2)/2, \quad S_1(t) = \operatorname{Re}\{A_+A_-^*\}, \\ S_2(t) &= \operatorname{Im}\{A_+A_-^*\}, \quad S_3(t) = (|A_-|^2 - |A_+|^2)/2. \end{aligned} \tag{14}$$

При этом параметры  $s_{x,y,z} = S_{1,2,3}/S_0$  являются декартовыми координатами конца единичного вектора  $s$ , движущегося по мере изменения  $t$  по поверхности так называемой сферы Пуанкаре [20].

Параметры Стокса однозначно связаны с поляризационными характеристиками, которые использовались ранее в работах [5–9]. При этом  $S_0$  определяет мгновенную интенсивность светового поля,

$$\begin{aligned} S_0 &= (R_{+0}^2 + R_{-0}^2)/2 \\ &+ [v^2\mu^2k_2\sigma_2/(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)]\operatorname{sn}^2(vt, \mu), \end{aligned} \tag{15}$$

компонента  $s_z$  описывает степень эллиптичности эллипса поляризации  $M$ ,

$$\begin{aligned} s_z = -M &= \frac{|A_-|^2 - |A_+|^2}{|A_+|^2 + |A_-|^2} \\ &= -\frac{(R_{+0}^2 - R_{-0}^2)(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) - 2v^2\mu^2k_2\rho_1\operatorname{sn}^2(vt, \mu)}{(R_{+0}^2 + R_{-0}^2)(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2v^2\mu^2k_2\sigma_2\operatorname{sn}^2(vt, \mu)}, \end{aligned} \tag{16}$$

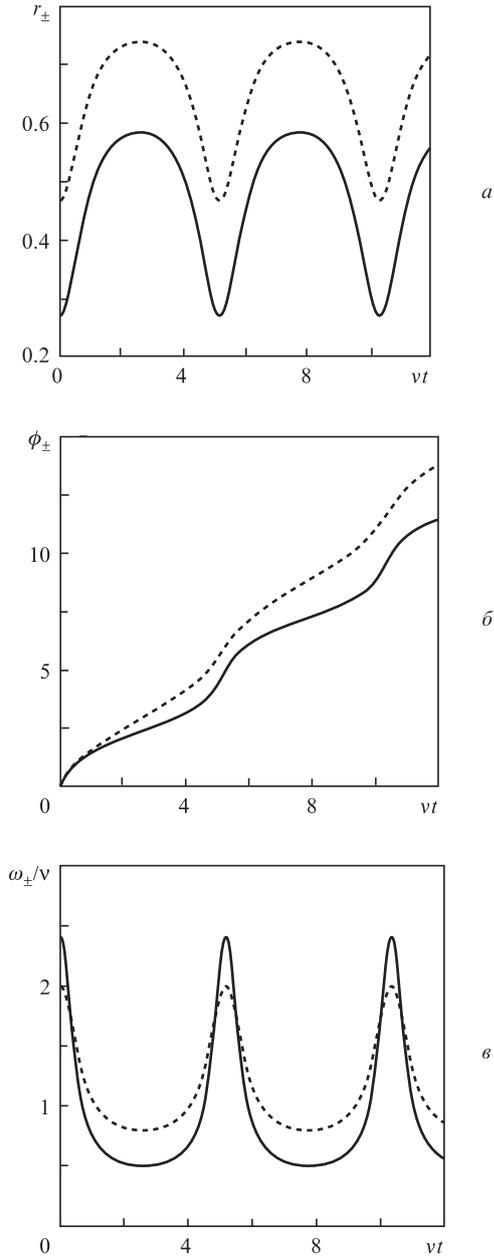


Рис.1. Зависимости  $r_{\pm}$  (а),  $\phi_{\pm}$  (б) и  $\omega_{\pm}/\nu$  (в) от безразмерного времени  $vt$  при  $z = 0$ ,  $r_+(0) = 0.27$ ,  $r_-(0) = 0.47$ ,  $\rho_1/\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2/\sigma_1 = 2$  и  $\mu = 0.95$ .

а долгота

$$\Phi = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = 2\rho_0 z + \frac{(3\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)z}{4} \times \left[ \frac{R_{+0}^2}{\sigma_2 - \rho_1} - \frac{R_{-0}^2}{\sigma_2 + \rho_1} \right] + \Delta\Phi(t) \quad (17)$$

равна удвоенному углу поворота главной оси эллипса поляризации ( $\text{Arg}\{A_+ A_-^*\}/2$ ). В (17)  $\Delta\Phi(t) = (\omega_{+0}/\nu) \times \Pi(vt, n_+, \mu) - (\omega_{-0}/\nu) \Pi(vt, n_-, \mu)$ .

Легко видеть, что, как и в [9], зависимость долготы от координаты  $z$  сводится к перенормировке постоянной  $\rho_0$

линейной гирации за счет нелинейности. При фиксированном  $z$  изменение  $\Phi$  во времени связано только с зависимостью  $\Delta\Phi(t)$ . При этом конец вектора  $s$  движется по поверхности шарового слоя, нижняя и верхняя границы которого определяются экстремумами  $s_z$ . Безразмерный период  $\nu T$  этого движения равен удвоенному полному эллиптическому интегралу первого рода  $K(\mu)$ . За время  $T$  угол  $\Phi$  увеличивается на  $\Delta\Phi(t = 2K/\nu)$ .

Если  $p\Delta\Phi(t = 2K/\nu) = 2q\pi$ , где  $p$  и  $q$  – целые числа, то ориентация конца вектора  $s$  в пространстве и, следовательно, состояние поляризации световой волны, будут меняться периодически. Во всех остальных случаях конец вектора  $s$  с течением времени обязательно пройдет через любую точку поверхности указанного слоя. При этом изменение состояния поляризации световой волны будет казаться хаотическим, а ситуация в целом будет похожа на эволюцию странного аттрактора, который со временем полностью заполняет некоторую область своего фазового пространства. Типичный характер эволюции состояния поляризации для решений первой группы на сфере Пуанкаре иллюстрирует рис.2. На нем изображены периодические, соответствующие чирпированной эллиптически поляризованной кноидальной волне (рис.2,а, в), и аperiodические, соответствующие поляризационному «хаосу» (рис.2,б, г), траектории движения конца нормированного вектора Стокса  $s$  по сфере Пуанкаре. Подчеркнем, что термин «хаос» используется нами лишь для краткости, т.к. корректное его применение предполагает детальное исследование корреляционных свойств полученных аperiodических решений. Появление «петель» на траекториях (рис.2в, г) связано с возможностью немонотонной зависимости  $\Delta\Phi(t)$  (формирование локальных экстремумов) при определенных значениях параметров задачи (рис.3).

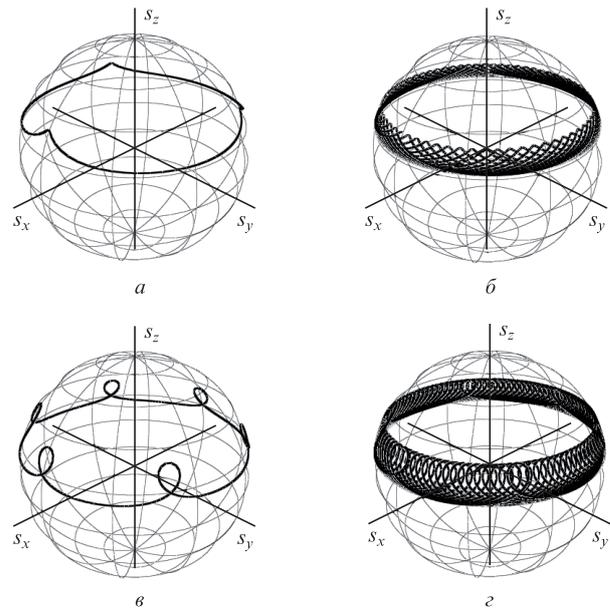


Рис.2. Периодическое движение конца вектора Стокса по поверхности сферы Пуанкаре при  $r_+(0) = 0.47$ ,  $r_-(0) = 0.82$  ( $p/q = 3$ ) (а),  $r_+(0) = 0.27$ ,  $r_-(0) = 0.47$  ( $p/q = 6$ ) (в) и переход к его аperiodическому движению при иррациональных значениях  $p/q$  (б и г); остальные параметры те же, что и на рис.1.

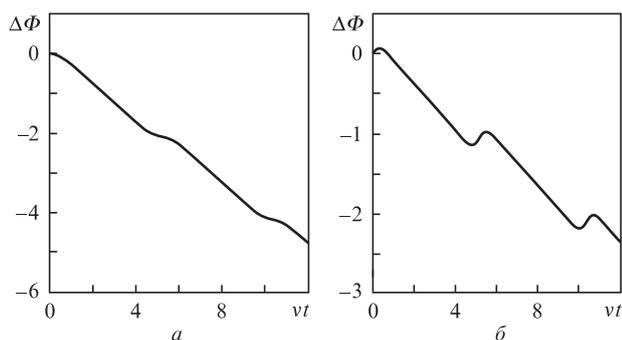


Рис.3. Зависимость  $\Delta\Phi(t)$  при  $r_+(0) = 0.47$ ,  $r_-(0) = 0.82$  (а) и  $r_+(0) = 0.27$ ,  $r_-(0) = 0.47$  (б); остальные параметры те же, что и на рис.1.

#### 4. Заключение

В настоящей работе показано, что в изотропной среде с локальной и нелокальной кубической нелинейностью и частотной дисперсией второго порядка могут как распространяться чирпированные эллиптически поляризованные кноидальные волны, так и возникать режимы, напоминающие поляризационный хаос. Соответствующие этим двум ситуациям аналитические решения системы из двух нелинейных уравнений Шредингера найдены и проанализированы в частном случае, когда в нелинейной среде формируются нелинейные волноводы единого профиля для двух циркулярно поляризованных компонент светового поля. Установлено, что при этом частоты обеих компонент меняются согласованно с периодическим изменением их модулей, а эволюция состояния поляризации таких чирпированных нелинейных волн при распространении может радикально меняться при изменении начальных условий.

Авторы благодарны И.А.Пережогину и К.В.Руденко за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №11-02-00653-а), гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№НШ-6897.2012.2) и гранта Минобрнауки РФ №8393 по поддержке научных исследований, проводимых коллективами научно-образовательных центров.

1. Ахманов С.А., Жариков В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **6**, 644 (1967).
2. Akhmanov S.A., Lyakhov G.A., Makarov V.A., Zharikov V.I. *Optica Acta*, **29**, 1359 (1982).
3. Желудев Н.И., Петренко А.Д. *Кристаллография*, **29**, 1045 (1984).
4. Golubkov A.A., Makarov V.A. *J. Modern Opt.*, **37**, 1531 (1990).
5. Голубков А.А., Макаров В.А., Пережогин И.А. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия.*, №1, 52 (2009).
6. Голубков А.А., Макаров В.А., Рахматуллина И.Г. *Квантовая электроника*, **19**, 1195 (1992).
7. Makarov V.A., Perezhogin I.A., Potravkin N.N. *Laser Phys.*, **19**, 322 (2009).
8. Макаров В.А., Петров К.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1011 (1993).
9. Макаров В.А., Пережогин И.А., Петникова В.М. и др. *Квантовая электроника*, **42**, 117 (2012).
10. Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **456**, 2263 (2000).
11. Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed V.A. *Opt. Commun.*, **219** (1), 251 (2003).
12. Tsang S.C., Nakkeeran K., Malomed V.A., Chow K.W. *Opt. Commun.*, **249** (1–3) 117 (2005).
13. Chiu H.S., Chow K.W. *Intern. J. Comput. Mathem.*, **87** (5), 1083 (2010).
14. Kaplan A.E. *Opt. Lett.*, **8**, 560 (1983).
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
16. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046611 (2007).
17. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37** (6), 561 (2007).
18. Куратов А.С., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **38** (2), 148 (2008).
19. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **39**, 1137 (2009).
20. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973).