PACS 42.62.Eh; 42.60.Da

Лазерный гироскоп с четырехзеркальным квадратным резонатором: количественная оценка зависимости параметров зоны синхронизации частот встречных волн от усиления активной среды

Е.А.Бондаренко

*Для лазерного гироскопа с четырехзеркальным квадратным резонатором (с периметром 20 см) на основе разработанной нами ранее (см. Бондаренко Е.А. Квантовая электроника, **41**, 824 (2011)) модели выполнены расчеты зависимости параметров зоны синхронизации частот встречных волн от усиления активной среды. Полученные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными данными для гироскопов с трехзеркальными резонаторами.*

Ключевые слова: *лазерный гироскоп, кольцевой газовый лазер, синхронизация частот встречных волн.*

1. Введение

Среди основных типов лазерных гироскопов (ЛГ), широко применяемых на практике, можно выделить прибор на базе кольцевого газового He–Ne-лазера (отношение концентраций изотопов ^{20}Ne : ^{22}Ne = 1:1) с плоским N-зеркальным ($N = 3,4$) резонатором, обеспечивающим генерацию линейно поляризованного в сагиттальной плоскости излучения. Накачка лазера, работающего, как правило, на длине волны $\lambda = 0.6328$ мкм, осуществляется разрядом постоянного тока по симметричной схеме один катод–два анода [1–3].

Согласно соотношениям (5.55)–(5.57) из работы [3], а также выражениям (6.45)–(6.47) из работы [4], при сбалансированности токов в плечах разряда, точной настройке резонатора на центр линии излучения и одинаковых потерях систему уравнений, описывающих динамику безразмерных интенсивностей I_j ($j = 1,2$) и разности фаз ψ встречных волн (ВВ) такого ЛГ, можно представить в виде

$$\dot{I}_1 = (\alpha - \beta I_1 - \theta I_2) I_1 - 2r_2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\psi + \varepsilon_2),$$

$$\dot{I}_2 = (\alpha - \beta I_2 - \theta I_1) I_2 - 2r_1\sqrt{I_1 I_2}\cos(\psi - \varepsilon_1), \qquad (1)$$

$$\dot{\psi} = M\Omega + r_2\sqrt{I_2/I_1}\sin(\psi + \varepsilon_2) + r_1\sqrt{I_1/I_2}\sin(\psi - \varepsilon_1).$$

При выводе этих уравнений учтено, что волна с индексом $j = 1$ распространяется в направлении вращения ЛГ. В системе (1) α, β, θ – коэффициенты Лэмба, характеризующие свойства активной среды; $M = (1 + K_{\rm a})M_{\rm g}$ – масштабный множитель ЛГ, определяемый в первую очередь своей геометрической составляющей $M_g = 8\pi S/(\lambda L)$, однако учитывающий также и свойства среды посредством малого параметра $K_{\rm a}$; L – периметр осевого контура; S – охватываемая им площадь; Ω – угловая скорость вращения прибора в инерциальном пространстве; r_j и ε_j – модули и аргументы комплексных интегральных коэффициентов $r_j\exp({\rm i}\varepsilon_j)$ линейной связи ВВ, характеризующих их взаимодействие через обратное рассеяние, поглощение и пропускание излучения на зеркалах. (Соотношения для расчета параметров α, β и θ можно найти, например, в работе [5], а параметра $K_{\rm a}$ – в [6]. В [3] приведена эмпирическая формула для расчета $K_{\rm a}$. Кроме того, набор выражений для оценки всех названных величин – α, β, θ, $K_{\rm a}$, r_j, ε_j – предложен в [7]. Эти выражения применимы для случая, когда ЛГ работает при суммарных давлениях смеси He–Ne от 1 до 5–6 Тор, а его резонатор имеет форму равностороннего треугольника или квадрата.)

В работе [8] на основе анализа системы (1) были получены формулы для расчета параметров зоны синхронизации частот генерируемых в ЛГ встречных электромагнитных волн. Такими параметрами являются координаты $\Omega_{(-)}$ и $\Omega_{(+)}$ соответственно левой и правой границ зоны синхронизации на оси угловой скорости Ω, координата ее центра $\Omega_{(0)} = (\Omega_{(+)} + \Omega_{(-)})/2$ и полуширина этой зоны $\Omega_{\rm s} = (\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)})/2$. Полученные в [8] соотношения дополняют результаты ранее выполненных теоретических работ [3, 9–16] и имеют вид

$$\Omega_{(\pm)} = \pm\frac{\sqrt{r_{\rm p}^2 + \mu^2 r_{\rm m}^2 \pm 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{\sqrt{1-\mu^2}\,M},$$

$$\Omega_{(0)} = \frac{\sqrt{r_{\rm p}^2 + \mu^2 r_{\rm m}^2 + 2\mu(r_2^2 - r_1^2)} - \sqrt{r_{\rm p}^2 + \mu^2 r_{\rm m}^2 - 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{2\sqrt{1-\mu^2}\,M}, \qquad (2)$$

$$\Omega_{\rm s} = \frac{\sqrt{r_{\rm p}^2 + \mu^2 r_{\rm m}^2 + 2\mu(r_2^2 - r_1^2)} + \sqrt{r_{\rm p}^2 + \mu^2 r_{\rm m}^2 - 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{2\sqrt{1-\mu^2}\,M}.$$

С учетом реализующегося на практике условия $|r_2 - r_1| \ll (r_1 + r_2)/2$ (см., напр., [3]) выражения (2) можно записать в виде

Е.А.Бондаренко. Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина, 03056 Киев, просп. Победы, 37, корп. 28; e-mail: ea_bndrk@ukr.net

Поступила в редакцию 11 декабря 2011 г., после доработки – 29 февраля 2012 г.

$$\Omega_{(\pm)} \approx \Omega_{(0)} \pm \Omega_{\mathrm{s}},$$

$$\Omega_{(0)} = \frac{\mu(r_2^2 - r_1^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(r_{\mathrm{p}}^2 + \mu^2 r_{\mathrm{m}}^2)}\,M}, \qquad (3)$$

$$\Omega_{\mathrm{s}} = \frac{\sqrt{r_{\mathrm{p}}^2 + \mu^2 r_{\mathrm{m}}^2}}{\sqrt{1-\mu^2}\,M},$$

где

$$r_{\mathrm{p}} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varepsilon_{12}};$$

$$r_{\mathrm{m}} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\varepsilon_{12}}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\mu = \frac{2r_1 r_2 \sin\varepsilon_{12}}{\alpha_{\mathrm{m}} r_{\mathrm{p}}} \quad (|\mu| < 1); \qquad (4)$$

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \alpha_{\mathrm{p}}\frac{1-h}{1+h}; \quad \alpha_{\mathrm{p}} = \alpha = \frac{c}{L}(g - \Gamma); \quad h = \frac{\theta}{\beta}.$$

Здесь r_{p} и r_{m} – комбинации параметров линейной связи ВВ; α_{p} и α_{m} – обратные времена релаксации соответственно суммы и разности интенсивностей ВВ; g – линейное ненасыщенное усиление активной среды; Γ – резонаторные потери за один проход; h – параметр, зависящий от суммарного давления смеси He – Ne [17]; μ – величина, характеризующая влияние усиления активной среды на параметры зоны синхронизации. Отметим, что выражения (2) и (3) справедливы при выполнении условия слабой связи ВВ, которое предполагает, что во всем диапазоне используемых в ЛГ рабочих токов разряда отношения $r_{\mathrm{p}}/\alpha_{\mathrm{p}}$ и $r_{\mathrm{m}}/\alpha_{\mathrm{m}}$ остаются намного меньшими единицы. В современных приборах, работающих при достаточно больших превышениях накачки над порогом [3], указанное условие, как правило, выполняется.

На основе анализа выражений (2)–(4) в работе [8] были сделаны следующие выводы:

1) в общем случае асимметричной ($r_1 \neq r_2$) линейной связи ВВ левая и правая границы зоны синхронизации частот этих волн расположены относительно начала координат на неодинаковых расстояниях ($\Omega_{(+)} \neq -\Omega_{(-)}$), вследствие чего центр зоны оказывается смещенным вдоль оси угловой скорости Ω на конечную величину $\Omega_{(0)} \neq 0$;

2) при увеличении усиления g активной среды смещение $\Omega_{(0)}$ центра зоны синхронизации и ее полуширина Ω_{s} уменьшаются, асимптотически приближаясь к установившимся конечным величинам

$$\Omega_{(0)}^{\mathrm{asymp}} = 0, \quad \Omega_{\mathrm{s}}^{\mathrm{asymp}} = \frac{r_{\mathrm{p}}}{M} = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varepsilon_{12}}}{M}. \qquad (5)$$

Ограничения на объем статьи [8] не позволили привести в ней результаты количественной оценки зависимости величин $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_{s} от усиления g активной среды для какого-либо конкретного ЛГ. Поэтому цель настоящей работы состоит в том, чтобы выполнить такую оценку для широко используемого на практике ЛГ с четырехзеркальным квадратным резонатором и сравнить (качественно) полученные результаты с известными из работ [18–21] экспериментальными данными, характерными для гироскопов с трехзеркальными резонаторами.

2. Описание ЛГ и вывод соотношений для расчета его параметров

Следуя работе [3], в качестве примера выберем ЛГ с четырехзеркальным квадратным резонатором, имеющим номинальную длину плеча l = 50 мм и периметр $L = 4l$ = 200 мм. Согласно [3] такой прибор характеризуется полушириной зоны синхронизации $\Omega_{\mathrm{s}} \approx 0.05$ °/c. Дуговая цена его импульса q_θ (разрешающая способность ЛГ по углу) составляет 2.61″, а геометрический масштабный множитель M_{g} = 496459. Гироскоп работает при суммарном давлении He – Ne-смеси 6.5 Тор.

На основе выражений (3), (4) выполним для данного ЛГ количественную оценку величин $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_{s} при условии, что параметр относительного возбуждения $N_{\mathrm{rel}} = g/\Gamma$ изменяется от 2 до 8 [3], что соответствует изменению линейного усиления g активной среды от 2Γ до 8Γ. Чтобы не приводить (вместе с комментариями) громоздких формул для расчета малого параметра K_{a}, а также выражений для оценки величин β и θ, положим $M = M_{\mathrm{g}}$ и, кроме того, зададим h = 0.652.

2.1. Соотношение для расчета параметра Γ

Для того чтобы воспользоваться выражениями (3) и (4), необходимо сначала рассчитать применительно к данному ЛГ суммарные потери Γ. Будем считать, что резонатор прибора образован двумя плоскими сигнальными зеркалами ($З_1$, $З_2$) и двумя установленными на пьезокорректорах сферическими зеркалами ($З_3$, $З_4$) с радиусом кривизны R = 1000 мм (зеркала нумеруются по часовой стрелке). Для плоских зеркал $З_1$ и $З_2$ заданы следующие энергетические параметры: интегральный коэффициент светорассеяния $K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{f}}$ в полный телесный угол 4π ср, потери на поглощение $\Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{f}}$ и полезные потери на пропускание $\Gamma_{\mathrm{transm}}^{\mathrm{f}}$. Для сферических зеркал $З_3$ и $З_4$ заданы интегральный коэффициент светорассеяния $K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{s}}$ и потери на поглощение $\Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{s}}$. Пусть $K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{f}} = 5\times10^{-6}$, $\Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{f}} = 55\times10^{-6}$, $\Gamma_{\mathrm{transm}}^{\mathrm{f}} = 60\times10^{-6}$, $K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{s}} = 10\times10^{-6}$, $\Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{s}} = 50\times10^{-6}$. Тогда, пренебрегая малыми дифракционными потерями, обусловленными наличием в резонаторе ЛГ апертурной диафрагмы, искомую формулу для расчета Γ запишем в виде

$$\Gamma = 2(K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{f}} + \Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{f}} + \Gamma_{\mathrm{transm}}^{\mathrm{f}}) + 2(K_{\mathrm{scat}}^{\mathrm{s}} + \Gamma_{\mathrm{absorp}}^{\mathrm{s}}). \qquad (6)$$

При заданных параметрах зеркал из (6) находим $\Gamma = 360\times10^{-6}$.

2.2. Соотношения для расчета параметров r_1, r_2 и ε_{12}

Теперь необходимо получить выражения для расчета величин r_1, r_2 и ε_{12}. Эти выражения должны обеспечивать возможность моделирования ситуации, в которой в рассматриваемом ЛГ имеет место асимметрия ($r_1 \neq r_2$) линейной связи ВВ. Асимметрию связи волн в данном приборе можно реализовать, например, посредством одинаковых встречнонаправленных управляемых перемещений сферических зеркал, когда зеркало $З_4$ выдвигается из резонатора на расстояние w (направление такого перемещения условимся считать положительным), а зеркало $З_3$ – наоборот – вдвигается в резонатор на точно такое же расстояние. Отметим, что периметр L осевого контура [22, 23] резонатора ЛГ остается при этом неизменным и равным своему исходному значению $4l$, однако геометрическая форма этого контура претерпевает изменения: из квадратной она превращается в почти ромбовидную, вытянутую вдоль диагонали, соединяющей зеркала З$_2$ и З$_4$. (Напомним, что осевой контур резонатора ЛГ – это продольная ось симметрии гауссова пучка рабочей моды TEM$_{00}$ прибора, определяющая в любом произвольном его поперечном сечении центр светового пятна этого пучка.)

Применительно к данному резонатору ЛГ для расчета комплексных интегральных коэффициентов $r_j\exp(\mathrm{i}\varepsilon_j)$ линейной связи ВВ имеем выражение

$$\frac{L}{c}r_j\exp(\mathrm{i}\varepsilon_j)=a_{\mathrm f}\Big\{\exp\Big[\mathrm i\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm f}\pm\varphi_1\Big)\Big]+\exp\Big[\mathrm i\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm f}\pm\varphi_2\Big)\Big]\Big\}$$
$$+a_{\mathrm s}\Big\{\exp\Big[\mathrm i\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm s}\pm\varphi_3\Big)\Big]+\exp\Big[\mathrm i\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm s}\pm\varphi_4\Big)\Big]\Big\}$$
$$+b_{\mathrm f}[\exp(\pm\mathrm i\varphi_1)+\exp(\pm\mathrm i\varphi_2)]$$
$$+b_{\mathrm s}[\exp(\pm\mathrm i\varphi_3)+\exp(\pm\mathrm i\varphi_4)],\qquad(7)$$

которое описывает результат суммирования по всем четырем зеркалам комплексных локальных коэффициентов связи этих волн. (Здесь и далее верхние арифметические знаки в формулах соответствуют $j=1$, а нижние – $j=2$.)

Выражение (7) отличается от известных из работ [1–4, 10, 12, 14, 16, 21, 24–38] аналогичных по структуре соотношений тем, что помимо интегрального коэффициента светорассеяния каждого из зеркал учитывает также его потери на поглощение и пропускание. Второй особенностью этого выражения является то, что оно предсказывает существенно иную, чем это следует, например, из [16, 25, 29], зависимость величин r_1, r_2 (и, соответственно, $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, $\Omega_{\mathrm s}$) от радиуса кривизны сферических зеркал (что качественно находится в согласии с известными из работы [39] экспериментальными данными, полученными для трехзеркального ЛГ).

Рассмотрим выражение (7) более подробно. В его правой части фигурируют две группы параметров. Параметры первой группы – $a_{\mathrm f}, \chi_{\mathrm f}, b_{\mathrm f}$ и $a_{\mathrm s}, \chi_{\mathrm s}, b_{\mathrm s}$ характеризуют индивидуальные свойства соответственно плоских и сферических зеркал. Параметры же второй группы – фазовые углы φ_n ($n=1,2,3,4$) – описывают влияние одинаковых встречнонаправленных управляемых перемещений сферических зеркал.

Для расчета параметров первой группы в правой части (7) воспользуемся феноменологическими формулами, которые были предложены в работе [7]:

$$a_{\mathrm f}=\frac12\theta_{\mathrm f}\sqrt{K^{\mathrm f}_{\mathrm{scat}}},\quad \chi_{\mathrm f}=\arcsin\sqrt{K^{\mathrm f}_{\mathrm{scat}}},$$
$$b_{\mathrm f}=\frac12\theta_{\mathrm f}(\Gamma^{\mathrm f}_{\mathrm{absorp}}+\Gamma^{\mathrm f}_{\mathrm{transm}}),$$
$$a_{\mathrm s}=\frac12\theta_{\mathrm s}\sqrt{K^{\mathrm s}_{\mathrm{scat}}},\quad \chi_{\mathrm s}=\arcsin\sqrt{K^{\mathrm s}_{\mathrm{scat}}},\qquad(8)$$
$$b_{\mathrm s}=\frac12\theta_{\mathrm s}\Gamma^{\mathrm s}_{\mathrm{absorp}},\quad \theta_{\mathrm f}=w_{\mathrm f}/L,\quad w_{\mathrm f}=\sqrt{w_{\mathrm f}^{(x)}w_{\mathrm f}^{(y)}},$$
$$\theta_{\mathrm s}=w_{\mathrm s}/L,\quad w_{\mathrm s}=\sqrt{w_{\mathrm s}^{(x)}w_{\mathrm s}^{(y)}},$$
$$w_{\mathrm f}^{(z)}=\Big(\frac{2\lambda l}{\pi}\Big)^{1/2}\Big[\frac{(4-7\zeta+2\zeta^2)^2}{4-(2-8\zeta+3\zeta^2)^2}\Big]^{1/4},$$
$$w_{\mathrm s}^{(z)}=\Big(\frac{2\lambda l}{\pi}\Big)^{1/2}\Big[\frac{(4-3\zeta)^2}{4-(2-8\zeta+3\zeta^2)^2}\Big]^{1/4}.$$

При использовании двух последних выражений для оценки величин $w_{\mathrm f}^{(z)}$, $w_{\mathrm s}^{(z)}$ необходимо следовать такому правилу: если верхний индекс $z=x$, тогда $\zeta=\xi=pl$, где $p=2(\sqrt2/R)$; если же верхний индекс $z=y$, тогда $\zeta=\eta=ql$, где $q=\sqrt2/R$. Здесь p и q – оптические силы сферических зеркал соответственно в осевой и сагиттальной плоскостях, а ξ и η – малые безразмерные параметры, введенные для сокращения записи.

В формулах (8) $a_{\mathrm f}$ и $a_{\mathrm s}$ – модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи ВВ через обратное рассеяние излучения соответственно на плоских и сферических зеркалах; $\chi_{\mathrm f}$ и $\chi_{\mathrm s}$ – «углы потерь» на рассеяние на этих зеркалах; $b_{\mathrm f}$ – модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи ВВ через поглощение и пропускание излучения на плоских зеркалах; $b_{\mathrm s}$ – модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи волн через поглощение на сферических зеркалах; $w_{\mathrm f}$ и $w_{\mathrm s}$ – эффективные полуширины гауссова пучка рабочей моды ЛГ в его сечениях, где расположены соответственно плоские и сферические зеркала; $w_{\mathrm f}^{(x)}$, $w_{\mathrm s}^{(x)}$ и $w_{\mathrm f}^{(y)}$, $w_{\mathrm s}^{(y)}$ – полуширины гауссова пучка в осевой плоскости xz и сагиттальной плоскости yz в указанных сечениях; $\theta_{\mathrm f}$ и $\theta_{\mathrm s}$ – половины углов, под которыми видны световые пятна диаметром $2w_{\mathrm f}$ и $2w_{\mathrm s}$ гауссова пучка на поверхностях соответственно плоских и сферических зеркал при условии, что они наблюдаются из центров этих же зеркал с расстояния, равного L, в ситуации, когда осевой контур резонатора ЛГ развернут в прямую линию. При заданных параметрах зеркал из (8) вытекают следующие численные оценки: $p=0.0028$ мм$^{-1}$, $q=0.0014$ мм$^{-1}$, $\xi=0.14$, $\eta=0.07$, $a_{\mathrm f}=1.15\times10^{-6}$, $a_{\mathrm s}=1.72\times10^{-6}$, $\chi_{\mathrm f}=461''$, $\chi_{\mathrm s}=652''$, $b_{\mathrm f}=5.91\times10^{-8}$, $b_{\mathrm s}=2.72\times10^{-8}$, $w_{\mathrm f}=0.205$ мм, $w_{\mathrm s}=0.218$ мм, $w_{\mathrm f}^{(x)}=0.186$ мм, $w_{\mathrm s}^{(x)}=0.202$ мм, $w_{\mathrm f}^{(y)}=0.227$ мм, $w_{\mathrm s}^{(y)}=0.235$ мм, $\theta_{\mathrm f}=212''$, $\theta_{\mathrm s}=225''$.

Для расчета параметров второй группы в правой части (7) воспользуемся соотношением

$$\varphi_n=\frac{4\pi}{\lambda}S_n,\qquad(9)$$

где S_n ($n=1,2,3,4$) – измеренное вдоль осевого контура (по часовой стрелке) расстояние между плоскостью отсчета (расположенной в начале координат) и центром зеркала З$_n$. Начало координат выбирается на поверхности зеркала З$_1$ в точке, в которой находится центр светового пятна гауссова пучка (именно в этой точке осевой контур соприкасается с поверхностью зеркала З$_1$ и отражается от нее).

Для оценки величин S_n ($n=1,2,3,4$) воспользуемся формулой

$$S_n=-t_n\sin\theta_n+\sum_{m=1}^{n}L_{m-1}^{(m)},\qquad(10)$$

где $L_0^{(1)}=0$, а $L_{m-1}^{(m)}$ – длина плеча резонатора ЛГ между зеркалами З$_{m-1}$ и З$_m$ (представляет собой измеренное вдоль осевого контура расстояние между центрами световых пятен гауссова пучка на поверхностях этих зеркал); t_n – смещение центра светового пятна гауссова пучка на поверхности зеркала $З_n$ относительно его центра (отсчитывается в осевой плоскости вправо); θ_n – половина угла между плечами резонатора ЛГ при зеркале $З_n$ (в данном случае $\theta_n = \pi/4$). Из (10) следует, что

$$S_1 = -(\sqrt{2}/2)t_1, \quad S_2 = -(\sqrt{2}/2)t_2 + L_1^{(2)},$$
$$S_3 = -(\sqrt{2}/2)t_3 + L_1^{(2)} + L_2^{(3)}, \qquad (11)$$
$$S_4 = -(\sqrt{2}/2)t_4 + L_1^{(2)} + L_2^{(3)} + L_3^{(4)}.$$

Методики расчета величин $L_{m-1}^{(m)}$ и t_n для плоских N-угольных разъюстированных (т.е. со смещенными зеркалами) резонаторов ЛГ произвольной (плоской) формы, содержащих в общем случае плоскопараллельные пластины в плечах, предложены соответственно в работах [40] и [41]. На основе этих методик применительно к данному резонатору ЛГ для рассматриваемой ситуации, когда его сферические зеркала совершают одинаковые встречнонаправленные управляемые перемещения на расстояния w, для указанных величин можно получить выражения

$$L_1^{(2)} = L_3^{(4)} = l, \quad L_2^{(3)} = l + \sqrt{2}\frac{\xi}{8-3\xi}w,$$
$$t_1 = t_2 = -\frac{4-\xi}{8-3\xi}w, \quad t_3 = t_4 = \frac{4}{8-3\xi}w, \qquad (12)$$

с учетом которых из (11) имеем

$$S_1 = (\sqrt{2}/2)\frac{4-\xi}{8-3\xi}w, \quad S_2 = l + (\sqrt{2}/2)\frac{4-\xi}{8-3\xi}w,$$
$$S_3 = 2l - (\sqrt{2}/2)\frac{4-2\xi}{8-3\xi}w, \quad S_4 = 3l - (\sqrt{2}/2)\frac{4-2\xi}{8-3\xi}w. \qquad (13)$$

С целью максимального упрощения итоговых расчетных формул будем считать, что на длине l каждого плеча резонатора ЛГ укладывается целое число длин волн λ. Тогда в выражениях (13) величины l можно опустить и на основании (9) записать для φ_n соотношения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{\mathrm{f}}, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_{\mathrm{s}}, \qquad (14)$$

где

$$\varphi_{\mathrm{f}} = 2\pi\frac{4-\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}w}{\lambda}, \quad \varphi_{\mathrm{s}} = -2\pi\frac{4-2\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}w}{\lambda} \qquad (15)$$

– фазовые углы, зависящие как от встречнонаправленных перемещений w сферических зеркал, так и от параметра ξ, пропорционального их оптической силе p в осевой плоскости.

С учетом (7), (8), (14), (15) выражения для величин r_j, ε_j ($j = 1, 2$) примут вид

$$r_j = 2\frac{c}{L}\sqrt{A_j^2 + B_j^2}, \quad \varepsilon_j = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{A_j}{B_j}, \qquad (16)$$

$$A_j = a_{\mathrm{f}}\sin(\chi_{\mathrm{f}} \mp \varphi_{\mathrm{f}}) + a_{\mathrm{s}}\sin(\chi_{\mathrm{s}} \mp \varphi_{\mathrm{s}}) + b_{\mathrm{f}}\cos\varphi_{\mathrm{f}} + b_{\mathrm{s}}\cos\varphi_{\mathrm{s}},$$
$$B_j = a_{\mathrm{f}}\cos(\chi_{\mathrm{f}} \mp \varphi_{\mathrm{f}}) + a_{\mathrm{s}}\cos(\chi_{\mathrm{s}} \mp \varphi_{\mathrm{s}}) \pm b_{\mathrm{f}}\sin\varphi_{\mathrm{f}} \pm b_{\mathrm{s}}\sin\varphi_{\mathrm{s}}. \qquad (17)$$

Тогда в результате подстановки (17) в (16) получим следующие искомые развернутые соотношения для расчета параметров r_j и ε_{12}:

$$r_j = r_j(\varphi) = 2\frac{c}{L}\{a_{\mathrm{f}}^2 + a_{\mathrm{s}}^2 + b_{\mathrm{f}}^2 + b_{\mathrm{s}}^2 + 2[a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{f}}\sin\chi_{\mathrm{f}}$$
$$+ a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{s}}\sin\chi_{\mathrm{s}} + b_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{s}}\cos\varphi + a_{\mathrm{f}}a_{\mathrm{s}}\cos(\chi_{\mathrm{f}} - \chi_{\mathrm{s}} \mp \varphi)$$
$$+ a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{s}}\sin(\chi_{\mathrm{f}} \mp \varphi) + a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{f}}\sin(\chi_{\mathrm{s}} \pm \varphi)]\}^{1/2}, \qquad (18)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(\varphi) = \pi - \arctan\frac{N(\varphi)}{D(\varphi)}, \qquad (19)$$

$$N(\varphi) = a_{\mathrm{f}}^2\sin 2\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}^2\sin 2\chi_{\mathrm{s}} + 2(a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{f}}\cos\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{s}}\cos\chi_{\mathrm{s}})$$
$$+ 2[a_{\mathrm{f}}a_{\mathrm{s}}\sin(\chi_{\mathrm{f}} + \chi_{\mathrm{s}}) + a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{s}}\cos\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{f}}\cos\chi_{\mathrm{s}}]\cos\varphi,$$

$$D(\varphi) = a_{\mathrm{f}}^2\cos 2\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}^2\cos 2\chi_{\mathrm{s}} - 2(a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{f}}\sin\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{s}}\sin\chi_{\mathrm{s}})$$
$$- b_{\mathrm{f}}^2 - b_{\mathrm{s}}^2 + 2[a_{\mathrm{f}}a_{\mathrm{s}}\cos(\chi_{\mathrm{f}} + \chi_{\mathrm{s}}) - a_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{s}}\sin\chi_{\mathrm{f}}$$
$$- a_{\mathrm{s}}b_{\mathrm{f}}\sin\chi_{\mathrm{s}} - b_{\mathrm{f}}b_{\mathrm{s}}]\cos\varphi,$$

где

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{f}} - \varphi_{\mathrm{s}} = 2\pi(\sqrt{2}w/\lambda) \qquad (20)$$

– фазовый угол, зависящий только от встречнонаправленных перемещений w сферических зеркал.

Из анализа выражений (18)–(20) следует, что величины r_1, r_2 и ε_{12} являются периодическими функциями w с периодом $w_{\mathrm{period}} = (\sqrt{2}/2)\lambda$. Последнее означает, что и параметры $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_{s} зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ будут также периодическими функциями w с указанным периодом. Кроме того, из анализа (18), (20) вытекает, что в данном приборе линейная связь ВВ будет симметричной ($r_1 = r_2$) лишь в двух частных случаях: $w = 0$, $\varphi = 0$ (максимальная степень связи) и $w = (\sqrt{2}/4)\lambda$, $\varphi = \pi$ (минимальная степень связи).

Полученные в этом разделе соотношения (6), (8), (18)–(20) для расчета параметров Γ, r_1, r_2, ε_{12} рассматриваемого ЛГ позволяют перейти теперь к количественной оценке зависимости величин $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_{s} от усиления g активной среды.

3. Количественная оценка зависимости параметров зоны синхронизации частот встречных волн ЛГ от усиления активной среды

3.1. Симметричная линейная связь ВВ

Рассмотрим сначала частный случай симметричной ($r_1 = r_2$) линейной связи ВВ, причем при условии, что она проявляет себя в максимальной степени. Такая ситуация будет иметь место при исходной геометрии резонатора ЛГ, когда $w = 0$ и $\varphi = 0$. В этом случае из (18), (19) вытекают расчетные соотношения [7]

$$r_1 = r_2 = r_j(0) = 2\frac{c}{L}\{a_{\mathrm{f}}^2 + a_{\mathrm{s}}^2 + 2[a_{\mathrm{f}}a_{\mathrm{s}}\cos(\chi_{\mathrm{f}} - \chi_{\mathrm{s}})$$
$$+ (a_{\mathrm{f}}\sin\chi_{\mathrm{f}} + a_{\mathrm{s}}\sin\chi_{\mathrm{s}})(b_{\mathrm{f}} + b_{\mathrm{s}})] + (b_{\mathrm{f}} + b_{\mathrm{s}})^2\}^{1/2}, \qquad (21)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(0) = \pi - \arctan\frac{N(0)}{D(0)}, \qquad (22)$$

$$N(0) = a_f^2 \sin 2\chi_f + a_s^2 \sin 2\chi_s + 2[a_f a_s \sin(\chi_f + \chi_s) + (a_f \cos\chi_f + a_s \cos\chi_s)(b_f + b_s)],$$

$$D(0) = a_f^2 \cos 2\chi_f + a_s^2 \cos 2\chi_s + 2[a_f a_s \cos(\chi_f + \chi_s) - (a_f \sin\chi_f + a_s \sin\chi_s)(b_f + b_s)] - (b_f + b_s)^2,$$

из которых при заданных выше параметрах зеркал получим следующие численные оценки: $r_1 = r_2 = 8616$ с$^{-1}$, $(L/c)r_1 = (L/c)r_2 = 5.74\times10^{-6}$, $\varepsilon_{12} = 176.24°$.

Зависимость величины Ω_s от параметра относительного возбуждения $N_{rel} = g/\Gamma$ (при $\Gamma = 360\times10^{-6}$), построенная на основе выражений (3), (4), (6), (8) с учетом найденных по формулам (21), (22) значений r_1, r_2 и ε_{12}, приведена на рис.1. Видно, что при увеличении усиления $g = \Gamma N_{rel}$ активной среды от минимального ($2\times360\times10^{-6}$) до максимального ($8\times360\times10^{-6}$) значения полуширина Ω_s зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ уменьшается (примерно по гиперболическому закону), асимптотически приближаясь к установившемуся конечному значению $\Omega_s^{asymp} = 0.065$ °/с (нижняя горизонтальная штриховая линия), которое было рассчитано по формуле (5). Такое поведение Ω_s качественно соответствует экспериментальным данным работ [18, 19] и, в особенности, [20] (см. рис.1 в [20]), которые были получены для ЛГ с трехзеркальными равносторонними резонаторами.

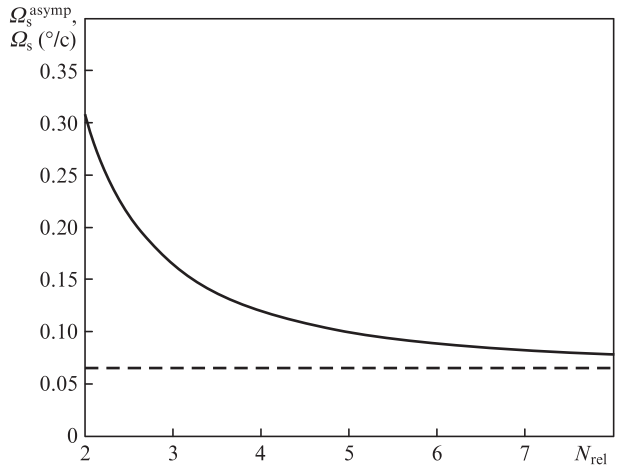

Рис.1. Зависимость величины Ω_s от N_{rel} при $w = 0$. Горизонтальная штриховая линия – асимптота Ω_s^{asymp}.

3.2. Асимметричная линейная связь ВВ

Теперь рассмотрим общий случай асимметричной ($r_1 \neq r_2$) линейной связи ВВ. Такая ситуация в данном ЛГ будет иметь место при $w \neq 0$ и $w \neq (\sqrt{2}/4)\lambda$. На рис.2 представлены зависимости, построенные на основе формул (3) с учетом соотношений (4)–(6), (8), (18)–(20). Эти рисунки иллюстрируют зависимость параметров $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_s, а также Ω_s^{asymp} (нижняя штриховая кривая) от величины w, изменяющейся в диапазоне $0-w_{period}$. Зависимости на рис.2,*а* соответствуют минимальному значению параметра относительного возбуждения $N_{rel} = 2$, когда усиление g активной среды составляет $2\times360\times10^{-6}$. Зависимости на рис.2,*б* соответствуют максимальному значению параметра $N_{rel} = 8$, когда усиление активной среды составляет $8\times360\times10^{-6}$.

Из анализа приведенных на рис.2 зависимостей вытекает следующее: 1) в общем случае асимметричной линейной связи ВВ рассматриваемого ЛГ левая и правая границы зоны синхронизации частот этих волн расположены относительно начала координат на разных расстояниях, вследствие чего центр зоны оказывается смещенным вдоль оси угловой скорости Ω; 2) координаты этих границ, так же как и координата центра зоны, являются периодическими функциями одинаковых встречнонаправленных управляемых перемещений сферических зеркал. Эти два обстоятельства качественно соответствуют экспериментальным данным работы [21] (см. рис.6 в [21]), которые были получены для ЛГ с трехзеркальным равносторонним резонатором. Кроме того, из анализа зависимостей также следует, что при увеличении усиления активной среды смещение центра зоны синхронизации и ее полуширина уменьшаются.

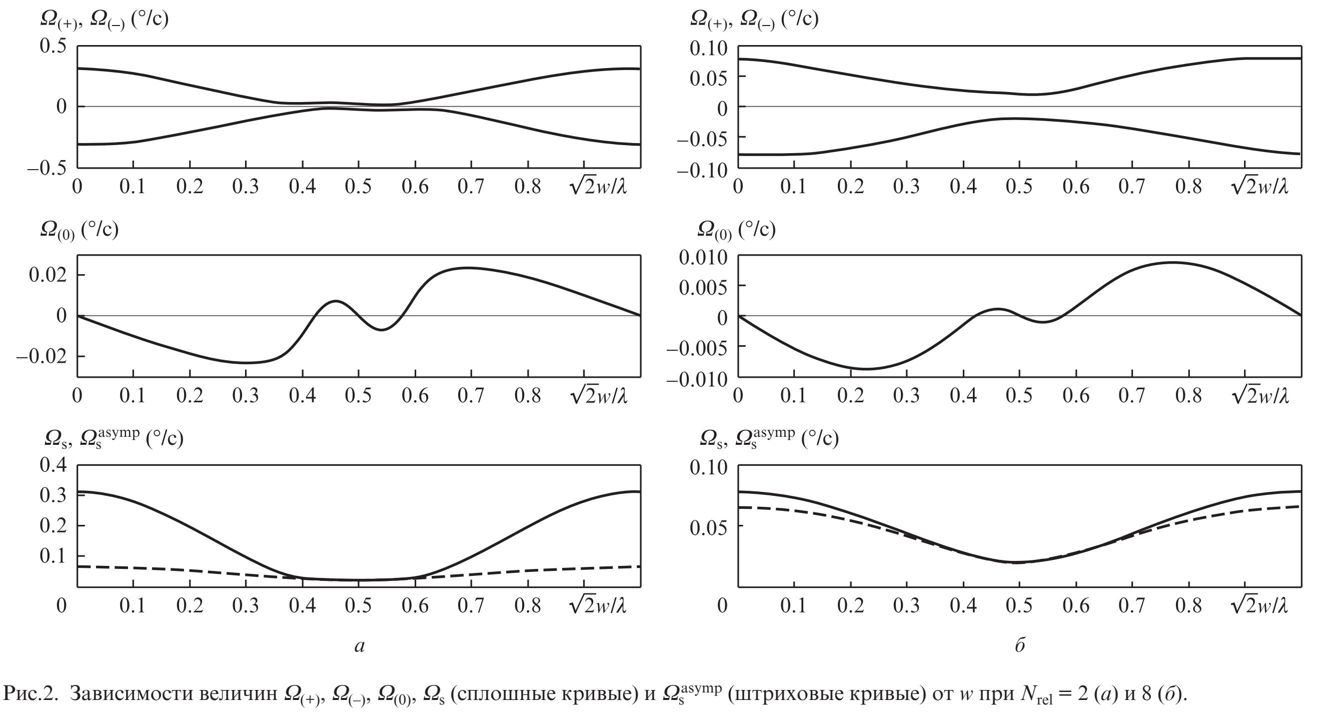

Рис.2. Зависимости величин $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_s (сплошные кривые) и Ω_s^{asymp} (штриховые кривые) от w при $N_{rel} = 2$ (*а*) и 8 (*б*).

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрен ЛГ с четырехзеркальным квадратным резонатором, имеющим периметр 20 см. Для этого прибора на основе выражений (3), (4), предложенных в работе [8], и вспомогательных расчетных соотношений (6), (8), (18)–(22), полученных в разд.2, выполнена количественная оценка зависимости параметров $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(0)}$, $\Omega_{\rm s}$ зоны синхронизации частот ВВ от усиления g активной среды. Эта оценка качественно согласуется с известными из работ [18–21] экспериментальными данными, полученными для гироскопов с трехзеркальными резонаторами.

1. Chow W.W., Gea-Banacloche J., Pedrotti L.M., Sanders V.E., Schleich W., Scully M.O. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 61 (1985).
2. Wilkinson J.R. *Prog. Quantum Electron.*, **11**, 1 (1987).
3. Aronowitz F., in *Optical Gyros and their Application* (Neuilly-sur-Seine, France, RTO AGARDograph 339, 1999).
4. Menegozzi L.N., Lamb W.E., Jr. *Phys. Rev.*, **8**, A2103 (1973).
5. Aronowitz F. *Appl. Opt.*, **11**, 2146 (1972).
6. Aronowitz F., Killpatrick J.E., Callaghan S.P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-10**, 201 (1974).
7. Бондаренко Е.А. *Труды VII Международной научно-технической конференции «Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно-космической техники»* (Киев, 2009, с. 115–124).
8. Бондаренко Е.А. *Квантовая электроника*, **41**, 824 (2011).
9. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. *Радиотехника и электроника*, **15**, 1214 (1970).
10. Андронова И.А., Берштейн И.Л. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14**, 698 (1971).
11. Ланда П.С. *Оптика и спектроскопия*, **32**, 383 (1972).
12. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974).
13. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (М.: Наука, 1980).
14. Rodloff R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-23**, 438 (1987).
15. Хромых А.М. *Электронная техника. Сер. Лазерная техника и оптоэлектроника*, вып. 2 (54), 44 (1990).
16. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **30**, 96 (2000).
17. Бирман А.Я., Петрухин Е.А., Савушкин А.Ф. *Квантовая электроника*, **6**, 2626 (1979).
18. Aronowitz F., Collins R.J. *J. Appl. Phys.*, **41**, 130 (1970).
19. Aronowitz F., Lim W.L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-13**, 338 (1977).
20. Chao S., Lim W.L., Hammond J.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **487**, 50 (1984).
21. Kataoka I., Kawahara Y. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **25**, 1365 (1986).
22. Ищенко Е.Ф. *ЖПС*, **11**, 456 (1969).
23. Ищенко Е.Ф. *Открытые оптические резонаторы* (М.: Сов. радио, 1980).
24. Aronowitz F. *J. Appl. Phys.*, **41**, 2453 (1970).
25. Ароновиц Ф. В кн.: *Применения лазеров* (М.: Мир, 1974, с. 182–269).
26. Андронова И.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **17**, 775 (1974).
27. Блажнов Б.А. *ЖПС*, **21**, 990 (1974).
28. Haus H.A., Statz H., Smith I.W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-21**, 78 (1985).
29. Statz H., Dorschner T.A., Holtz M., Smith I.W., in *Laser Handbook* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1985, pp 229–332).
30. Stedman G.E., Li Z., Rowe C.H., McGregor A.D., Bilger H.R. *Phys. Rev. A*, **51**, 4944 (1995).
31. Астахов К.В., Голяев Ю.Д., Махин П.В., Мельников А.В., Тихменев Н.В. *Гироскопия и навигация*, № 2 (9), 25 (1995).
32. Астахов К.В., Батоврин В.К., Голяев Ю.Д., Дроздов М.С., Мельников А.В. *Гироскопия и навигация*, № 4 (11), 24 (1995).
33. Астахов К.В., Батоврин В.К., Голяев Ю.Д., Дроздов М.С., Мельников А.В., Тихменев Н.В., Яснов С.А. *Труды IV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 1997, с. 146–152).
34. Schreiber U.K., Rowe C.H., Wright D.N., Cooper S.J., Stedman G.E. *Appl. Opt.*, **37**, 8371 (1998).
35. Volk C.H., Gillespie S.C., Mark J.G., Tazartes D.A., in *Optical Gyros and their Application* (Neuilly-sur-Seine, France, RTO AGARDograph 339, 1999).
36. Молчанов А.В., Морозов Д.А., Степанов А.Ю., Чиркин. М.В. *Труды XIV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 2007, с. 38–40).
37. Васин И.А., Молчанов А.В., Морозов Д.А., Чиркин. М.В. *Труды XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 2008, с. 68–70).
38. Молчанов А.В., Степанов А.Ю., Чиркин. М.В. *Авиакосмическое приборостроение*, № 3, 9 (2008).
39. Богданов В.В., Мынбаев Д.К. *Оптика и спектроскопия*, **31**, 101 (1971).
40. Бондаренко Е.А. *Квантовая электроника*, **19**, 171 (1992).
41. Bondarenko E.A., in *Mechanics of Gyroscopic Systems* (Kiev, 2010, Issue 22, pp 22–32).