

# Ионизация квантовой точки электрическими полями

П.А.Эминов, С.В.Гордеева

*Получены аналитические формулы для дифференциальной и полной вероятностей процесса ионизации двумерной квантовой точки постоянным электрическим полем. В адиабатическом приближении вычислена вероятность этого процесса в поле плоской электромагнитной волны и в суперпозиции постоянного и переменного электрических полей. Методом мнимого времени получено импульсное распределение вероятности ионизации связанной системы интенсивным полем, образованным суперпозицией параллельных постоянного и переменного электрических полей. С экспоненциальной точностью вычислена полная вероятность процесса в единицу времени. Исследована зависимость полученных результатов от характерных параметров задачи.*

**Ключевые слова:** ионизация, квантовая точка, метод мнимого времени, точка перевала.

## 1. Введение

Развитие нанотехнологий и создание мощных лазеров стимулируют теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия интенсивных электромагнитных полей с наноструктурами. Успехи в области создания структур с квантовыми точками и перспективы применения этих новых типов гетероструктур делают актуальным теоретическое изучение процесса ионизации квантовой точки интенсивными электромагнитными полями.

Целью настоящей статьи является исследование ионизации двумерной квантовой точки как постоянным электрическим полем, так и полем, представляющим собой суперпозицию параллельных постоянного и переменного электрических полей.

Основной теоретический описания процессов туннельной и многофотонной ионизации низкоразмерных структур стали результаты, полученные в работах [1–10].

Фотоионизация связанной системы в присутствии постоянного электрического поля рассматривалась ранее в работах [11–16]. Полуколичественно эта задача впервые обсуждалась в [13]. Количественное рассмотрение явления в случае отрыва электронов, связанных короткодействующими силами, было проведено в работе [12]. В приближении нулевого радиуса действия удерживающих сил получена формула для дифференциальной вероятности процесса в общем случае, когда напряженность постоянного поля направлена под произвольным углом к оси, вдоль которой происходят колебания электрического поля

линейно поляризованной волны. Детально рассмотрен случай, когда напряженность электрического поля линейно поляризованной волны ортогональна напряженности постоянного поля.

Непертурбативный калибровочно-инвариантный подход к описанию ионизации как одномерных, так и трехмерных систем с удерживающим потенциалом конечного радиуса действия был сформулирован также в работах [11, 16], где обсуждаются общие характеристики процесса ионизации систем с короткодействующими силами суперпозицией постоянного и переменного электрических полей.

В работе [14] исследовался распад связанного короткодействующими силами притяжения «мелкого» уровня в суперпозиции постоянного электрического поля и поля электромагнитной волны. Вероятность ионизации в этой работе определена по мнимой части квазиэнергии, и вычислена, как и в [12], в рамках модели потенциала нулевого радиуса действия для случая перпендикулярных полей, когда интерференционный вклад в вероятность ионизации исчезает. Анализ, проведенный в [14], также показал, что приложение даже относительно слабого постоянного поля приводит к значительному изменению вероятности ионизации энергетического уровня полем волны. В этой работе для интерпретации полученных результатов был предложен механизм туннелирования электрона из виртуального состояния: электрон поглощает  $k$  световых квантов и с энергией  $E_0 + k\omega < 0$  ( $\omega$  – частота волны) туннелирует в постоянном поле. Такой процесс реализуется только в присутствии двух полей – высокочастотного и статического – и не может происходить при выключении постоянного поля [14].

В наиболее интересном случае коллинеарных полей влияние переменного поля на квантовое туннелирование частицы через потенциальный барьер, межзонное туннелирование в полупроводнике и надбарьерное отражение рассмотрено в работе [15] методом комплексных траекторий [17]. С экспоненциальной точностью вычислена вероятность подбарьерного прохождения частицы через туннельный барьер (автоэлектронная эмиссия) в переменном

**П.А.Эминов.** Московский государственный университет электроники и математики, Россия, 109028 Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3/12; Московский государственный университет приборостроения и информатики, Россия, 107996 Москва, ул. Стромынка, 20; e-mail: peminov@mail.ru

**С.В.Гордеева.** Московский государственный университет приборостроения и информатики, Россия, 107996 Москва, ул. Стромынка, 20

Поступила в редакцию 29 марта 2012 г., после доработки – 22 мая 2012 г.

поле. Показано, что вероятность квазиклассических процессов туннелирования под действием переменного во времени возмущения резко увеличивается, и проводится анализ того, как с увеличением напряженности волны происходит последовательная смена режимов туннелирования.

Существенную информацию о процессе туннельной ионизации дают энергетические и угловые распределения образующихся электронов [18–20], которые в [14, 15] не исследовались. Для описания работы фотодетекторов с квантовыми ямами, в которых фотоионизация происходит в присутствии постоянного электрического поля, знание спектрально-углового распределения фотоэлектронов может представлять практический интерес [21]. К сожалению, в [15] не приведены строгие условия применимости полученного результата, которые должны следовать из исходного квантового рассмотрения, и не выяснен вопрос о вычислении предэкспоненциального множителя в формуле для полной вероятности ионизации в единицу времени.

С учетом того, что в указанных выше работах [11–16] предсказывается существенное увеличение вероятности классически запрещенных процессов под действием электромагнитной волны, нам представляется актуальным дальнейшее исследование процесса ионизации связанных систем переменным электрическим полем с постоянной составляющей.

## 2. Вероятность ионизации двумерной квантовой точки постоянным электрическим полем

Удерживающий потенциал двумерной квантовой точки будем моделировать потенциальной ямой вида

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < a, \\ 0, & \rho > a, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a$  – радиус квантовой точки. Заметим, что в зависимости от вида латерального удерживающего потенциала характерный размер квантовой точки изменяется от десятков до нескольких сотен нанометров, а число электронов в квантовой точке может контролируемо изменяться от единиц до нескольких сотен [22].

Расчет вероятности ионизации основного состояния электрона в квантовой точке постоянным электрическим полем проведем на основе квантово-механического метода, изложенного в работах [3, 4].

Решение стационарного уравнения Шредингера для основного состояния электрона с энергией  $E_0 = -\kappa^2/2$  в двумерной потенциальной яме (1) имеет вид [23]

$$\psi_0(\rho, t) = \exp(i\kappa^2 t/2) B \begin{cases} \frac{K_0(\kappa a)}{J_0(\lambda a)} J_0(\lambda \rho), & \rho < a, \\ K_0(\kappa \rho), & \rho > a, \end{cases} \quad (2)$$

где  $J_0(x)$  и  $K_0(x)$  – функции Бесселя и Макдональда нулевого порядка;

$$\kappa = \sqrt{2|E_0|}; \quad \lambda = \sqrt{2(U_0 - |E_0|)}; \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\pi} a K_1(\kappa a)} \left( \frac{U_0 - |E_0|}{U_0} \right)^{1/2}.$$

Условия непрерывности волновой функции и ее производной в точке  $\rho = a$  приводят к уравнению

$$\frac{\lambda J'_0(\lambda a)}{J_0(\lambda a)} = \frac{\kappa K'_0(\kappa a)}{K_0(\kappa a)}, \quad (4)$$

из которого определяется энергия  $E_0$  ( $-U_0 < E_0 < 0$ ) основного состояния электрона в квантовой точке. Интегральное уравнение Шредингера для квазистационарного режима имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -i \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t'), \quad (5)$$

где  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  – функция Грина нестационарного уравнения Шредингера в постоянном электрическом поле  $\mathbf{E} = (F, 0, 0)$ . Если напряженность поля удовлетворяет условию

$$Fa \ll \kappa^2 < 2U_0, \quad (6)$$

то в области ямы электрическое поле является малым возмущением. Учитывая также, что вне ямы  $U(\mathbf{r}) = 0$ , функцию  $\psi(\mathbf{r}', t')$  в правой части уравнения (5) в первом приближении можно положить равной волновой функции (2) связанного состояния электрона в квантовой точке.

Описывая постоянное электрическое поле векторным потенциалом  $A(t)$ , зависящим только от времени, функцию Грина  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  представим в виде [4]

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\theta(t-t')}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \times \exp \left[ i\boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{r} - i\boldsymbol{\pi}(t')\mathbf{r}' - \frac{i}{2} \int_{t'}^t \boldsymbol{\pi}^2(\tau) d\tau \right], \quad (7)$$

где

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \mathbf{p} - A(t) = (p_x + Ft, p_y) \quad (8)$$

– обобщенный импульс;  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  – импульс электрона;  $\theta(t-t')$  – функция Хевисайда.

Таким образом, решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\theta(t-t')}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \times \exp \left[ i\boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{r} - \frac{i}{2} \int_{t'}^t \boldsymbol{\pi}^2(\tau) d\tau \right] G(\boldsymbol{\pi}(t)). \quad (9)$$

Здесь

$$G(\boldsymbol{\pi}(t)) = \int_{-\infty}^t dt' g(\boldsymbol{\pi}(t')) \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^{t'} [\boldsymbol{\pi}^2(\tau) + \kappa^2] d\tau \right\}, \quad (10)$$

а величина  $g(\boldsymbol{\pi}(t'))$  связана с фурье-образом координатной части решения (2):

$$g(\boldsymbol{\pi}(t')) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\pi}^2(t') + \kappa^2] \psi_0(\boldsymbol{\pi}(t')), \quad (11)$$

$$\psi_0(\boldsymbol{\pi}(t')) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \exp[-i\mathbf{r}'\boldsymbol{\pi}(t')] \psi_0(\mathbf{r}'). \quad (12)$$

Характерной величиной с размерностью поля в рассматриваемой задаче является величина  $F_0 = \kappa^3$ . В дальнейшем, наряду с (6), будем считать выполненным условие

$$F \ll F_0. \quad (13)$$

В этом случае интеграл по переменной  $t'$  в формуле (10) вычисляется методом перевала (см. также [4, 21]). Точка перевала, определяемая из уравнения

$$\pi^2(t'_0) \equiv p_y^2 + (p_x^2 + Ft'_0) = -\kappa^2, \quad (14)$$

находится в комплексной плоскости переменной  $t'$ . Вычисление интеграла дает следующий результат:

$$G(t_0) \approx C \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa F}} \exp\left[-\frac{1}{3} \frac{F_0}{F} - \frac{1}{2} \frac{F_0}{F} \left(\frac{p_y}{\kappa}\right)^2 - \frac{i}{2} \frac{F_0}{F} \frac{p_x}{\kappa}\right], \quad (15)$$

где

$$C = (-\kappa a B) [I_1(\kappa a) K_0(\kappa a) + I_0(\kappa a) K_1(\kappa a)]. \quad (16)$$

Основной вклад в интеграл по переменной  $t'$  дает область вокруг точки перевала шириной

$$|t - t'_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\kappa F}}, \quad (17)$$

которая должна быть мала по сравнению с верхним пределом интегрирования, т.е. предполагается, что

$$t \gg \frac{1}{\sqrt{\kappa F}}. \quad (18)$$

Вкладом слагаемого, пропорционального  $(t - t'_0)^3$ , можно пренебречь, как это и было сделано при получении формулы (15), если выполняется условие

$$\sqrt{\frac{F}{F_0}} \ll 1. \quad (19)$$

Вероятность ионизации в единицу времени определяется потоком электронов через удаленную от центра квантовой точки прямую, перпендикулярную оси  $x$ :

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{i}{2} \left[ \psi(r, t) \frac{\partial \psi^+(r, t)}{\partial x} - \psi^+(r, t) \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial x} \right]. \quad (20)$$

Сначала вычислим интеграл по переменной  $p_x$ . Учитывая, что

$$t'_0 = -\frac{1}{F} (p_x - i\sqrt{\kappa^2 + p_y^2}), \quad (21)$$

$$0 < \text{Re } t'_0 < t, \quad (22)$$

интегрирование по переменной  $p_x$  в формуле (9) проводится по интервалу

$$-Ft < p_x < 0. \quad (23)$$

Для вычисления интеграла

$$I \equiv \int_{-Ft}^0 dp_x \exp\left[ix(p_x + Ft) - \frac{i}{2} \frac{F_0}{F} \frac{p_x}{\kappa} - \frac{i}{6F} (p_x + Ft)^3\right] \quad (24)$$

снова воспользуемся методом перевала. В итоге получаем

$$I \approx \exp\left[-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\kappa^2}{2}t + i\frac{2}{3}\sqrt{2F}\left(x - \frac{\kappa^2}{2F}\right)^{3/2}\right] \times \left\{ \frac{\pi}{[x - \kappa^2/(2F)]^{1/2}} \left(\frac{F}{2}\right)^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

причем условие применимости этой формулы имеет вид

$$\left[ F^{1/4} \left(x - \frac{\kappa^2}{2F}\right)^{3/4} \right]^{-1} \ll 1. \quad (26)$$

Таким образом, при выполнении условий (17), (19) и (26) из формулы (9) следует, что

$$\psi(r, t) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{F_0}{F} \left(\frac{p_y}{\kappa}\right)^2 + iy p_y - \frac{i}{2} p_y^2 t\right] \times C \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa F}} \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{F_0}{F}\right) \left\{ \frac{\pi}{[x - \kappa^2/(2F)]^{1/2}} \left(\frac{F}{2}\right)^{1/2} \right\}^{1/2} \times \exp\left[-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\kappa^2}{2}t + i\frac{2}{3}\sqrt{2F}\left(x - \frac{\kappa^2}{2F}\right)^{3/2}\right]. \quad (27)$$

С учетом (20) и (27) находим импульсное распределение вероятности процесса в единицу времени:

$$\frac{dw}{dp_y} = \frac{C^2}{4\pi\kappa} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{F_0}{F}\right) \exp\left[-\frac{F_0}{F} \left(\frac{p_y}{\kappa}\right)^2\right]. \quad (28)$$

Полная вероятность ионизации двумерной квантовой точки постоянным электрическим полем в единицу времени получается в результате интегрирования (28) по переменной  $p_y$ :

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \kappa^2 \left(\frac{U_0 - |E_0|}{U_0}\right) \left[ \frac{I_1(\kappa a) K_0(\kappa a) + I_0(\kappa a) K_1(\kappa a)}{K_1(\kappa a)} \right]^2 \times \left(\frac{F}{F_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2F_0}{3F}\right). \quad (29)$$

Характерной особенностью выражения (29) является то, что предэкспоненциальный множитель пропорционален  $\sqrt{F/F_0}$ . Для сравнения отметим, что в случае одномерной квантовой ямы этот множитель не зависит от напряженности электрического поля, а в формуле для вероятности вырывания электрона из основного состояния в трехмерной потенциальной яме он пропорционален напряженности поля [3, 4].

### 3. Ионизация квантовой точки суперпозицией постоянного и переменного электрических полей в адиабатическом приближении

Если рассматриваемый процесс формируется за такое время, что фаза волны не успевает существенно измениться, то вероятность этого процесса в периодическом поле связана с вероятностью в постоянном поле соотношением [4, 11, 12, 18]

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi w_{\text{stat}}(F), \quad (30)$$

где  $w_{\text{stat}}(F)$  – вероятность процесса в постоянном поле с напряженностью  $F$ . Используя этот результат, можно найти вероятность туннельной ионизации квантовой точки переменным электрическим полем с напряженностью  $F(t) = F \cos(\omega t)$  ( $\omega$  – частота волны), когда параметр Келдыша мал по сравнению с единицей, т. е. при условии

$$\gamma = \frac{\kappa\omega}{F} \ll 1. \quad (31)$$

Для этого в формуле (30) заменяем  $F$  на  $F \cos \varphi$  и, усредняя полученное выражение с учетом (29), получаем

$$w^{\text{adiab}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{1/2} w_{\text{stat}}(F) = \frac{C^2 \sqrt{3}}{4\pi} \frac{F}{F_0} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{F_0}{F}\right), \quad (32)$$

где параметр  $C$  определяется формулой (16) и зависит от свойств квантовой точки.

Отметим, что в результате усреднения изменилась функциональная зависимость предэкспоненциального множителя от напряженности поля: в переменном поле вероятность ионизации всегда меньше, чем в постоянном поле с той же напряженностью  $F$ . Это объясняется тем, что в переменном поле только в течение незначительной части периода, когда напряженность поля близка к амплитудному значению, туннелирование из квантовой точки происходит наиболее эффективно.

Исходя из выражения (29), получаем в приближении малых частот ( $\gamma \ll 1$ ) вероятность ионизации квантовой точки полем, представляющим собой суперпозицию направленных вдоль оси  $x$  постоянного и переменного электрических полей

$$F(t) = F_1 + F_2 \cos(\omega t). \quad (33)$$

Если выполнены условия

$$F_1 > F_2, \quad \frac{F_0 F_2}{(F_1 + F_2)^2} \gg 1, \quad \frac{\kappa\omega}{F_1} \ll 1, \quad (34)$$

то из уравнений (29), (30) для вероятности процесса в адиабатическом приближении находим следующее выражение:

$$w = \frac{\kappa^2}{4} \sqrt{3} \left( \frac{U_0 - |E_0|}{U_0} \right) \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{F_0}{F_1 + F_2}\right) \times \left[ \frac{I_1(\kappa a) K_0(\kappa a) + I_0(\kappa a) K_1(\kappa a)}{K_1(\kappa a)} \right]^2 \frac{F_1 + F_2}{F_0} \left( \frac{F_1 + F_2}{F_2} \right)^{1/2}. \quad (35)$$

#### 4. Вероятность ионизации связанной системы под действием параллельных постоянного и переменного электрических полей

Для определения вероятности ионизации методом мнимого времени необходимо вычислить мнимую часть укороченного действия [4, 6, 19, 24, 25]. Вычислим этим методом вероятность ионизации связанной короткодействующими силами системы внешним электрическим полем, представляющим собой суперпозицию постоянного поля с напряженностью  $F_1$  и переменного поля с амплитудой  $F_2$  и частотой  $\omega$ . Векторный потенциал поля, зависящий только от времени, как и в работе [12], выберем в виде

$$A(t) = \left( -\frac{F_2 \sin(\omega t)}{\omega} - F_1 t, 0, 0 \right). \quad (36)$$

Для определенности рассмотрим сначала двумерный случай. Это может быть, например, двумерная квантовая точка. Начальный момент времени для подбарьерного движения  $t_0$  совпадает с точкой перевала и определяется из уравнения

$$\pi^2(t_0) \equiv [p - A(t_0)]^2 = \left( p_x + \frac{F_2 \sin(\omega t_0)}{\omega} + F_1 t_0 \right)^2 + p_y^2 = -\kappa^2. \quad (37)$$

Экстремальная подбарьерная классическая траектория, минимизирующая мнимую часть укороченного действия  $\tilde{S}$ , соответствует ситуации, когда частица выходит из-под барьера в момент времени  $t = 0$  с нулевой скоростью, т. е.  $\dot{x}(0) = 0$ . Траектория  $x = x(t)$  и укороченное действие  $\tilde{S}$  являются функциями  $p_x$  и  $p_y$ . Случай  $p_x = p_y = 0$  соответствует траектории, которая минимизирует значение  $\text{Im} \tilde{S}$ , и ей отвечает максимальная скорость ионизации. Полагая также в момент времени  $t_0$  координату электрона равной нулю, получаем, что эффективная ширина барьера  $\ell = x(0)$ . Таким образом, экстремальная классическая траектория находится из уравнений

$$\ddot{x} = F_0 + F \cos(\omega t), \quad x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (38)$$

а момент времени  $t_0$  – из уравнения

$$\left( \frac{F_2 \sin(\omega t_0)}{\omega} + F_1 t_0 \right)^2 = -\kappa^2. \quad (39)$$

Для наглядного описания подбарьерного движения удобно перейти к вещественному времени  $\tau = -it$ . Тогда уравнение экстремальной траектории и уравнение для определения момента времени  $\tau_0$  принимают следующий вид:

$$x(\tau) = -\frac{1}{2} F_1 (\tau^2 - \tau_0^2) - \frac{F_2}{\omega^2} [\cosh(\omega \tau) - \cosh(\omega \tau_0)], \quad (40)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = F_1 \tau + \frac{F_2}{\omega} \sinh(\omega \tau), \quad (41)$$

$$F_1 \tau_0 + \frac{F_2}{\omega} \sinh(\omega \tau_0) = \kappa, \quad (42)$$

а зависимость эффективной ширины барьера от характерных параметров задачи задается уравнением

$$\ell = \frac{1}{2} F_1 \tau_0^2 + \frac{F_2}{\omega^2} [\cosh(\omega \tau_0) - 1]. \quad (43)$$

С точностью до предэкспоненциального множителя  $P$  вероятность ионизации в единицу времени в рамках метода мнимого времени определяется формулой [4, 6, 19, 24, 25]

$$W = P \exp[-2 \text{Im} \tilde{S}(t_0, 0)], \quad (44)$$

где укороченное действие

$$\tilde{S}(t_0, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \left\{ \kappa^2 + p_y^2 + \left[ p_x + F_1 t + \frac{F_2}{\omega} \sin(\omega t) \right]^2 \right\} dt. \quad (45)$$

Отметим, что формулы (44) и (45) в литературе называются также формулами Ландау–Дыхне [20, 26].

Вычислив мнимую часть укороченного действия для экстремальной траектории (40)–(42), получим следующее выражение для скорости ионизации:

$$W_0 = P_0 \exp[-g(F_2, F_1, \kappa, \tau_0, \omega)], \quad (46)$$

где

$$g = \kappa^2 \tau_0 - \frac{F_1^2 \tau_0^3}{3} + \left(\frac{F_2}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\omega \tau_0}{2} - \frac{\sinh(2\omega \tau_0)}{4} \right] + \frac{2F_1 F_2}{\omega^2} [\sinh(\omega \tau_0) - \omega \tau_0 \cosh(\omega \tau_0)]. \quad (47)$$

Для нахождения спектра импульсов электронов необходимо учесть вклад классических траекторий, близких к экстремальной траектории, и вычислить мнимую часть укороченного действия с точностью до квадратичных членов по отклонению таких траекторий от экстремальной. Из уравнения (37) при  $p^2 \ll \kappa^2$  находим

$$\varphi_0 \equiv \omega t_0 = i\omega \tau_0 = i \left[ u_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p_x}{\kappa} \right)^2 \frac{\sinh u_0}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)^3} + \frac{\gamma \left( \frac{p_y}{\kappa} \right)^2}{2} \frac{1}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)} + i\gamma \frac{p_x}{\kappa} \frac{1}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)} \right], \quad (48)$$

где  $u_0$  – решение уравнения

$$\sinh u_0 + \frac{F_1}{F_2} u_0 = \gamma. \quad (49)$$

Учитывая (48), разлагаем (45) по степеням  $p/\kappa$  до второго порядка включительно и выделяем мнимую часть укороченного действия. В результате находим импульсное распределение вероятности ионизации двумерной квантовой точки полем (36):

$$dW = P \exp[-g(F_2, F_1, \kappa, \tau_0, \omega) - \omega^{-1}(\alpha p_x^2 + u_0 p_y^2)] \frac{dp_x dp_y}{(2\pi)^2}, \quad (50)$$

где

$$\alpha = u_0 - \frac{2\gamma}{\cosh u_0 + F_1/F_2} + \frac{\gamma \cosh u_0}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)^2} + \frac{\gamma u_0}{2(\cosh u_0 + F_1/F_2)^3} \frac{F_1}{F_2} + \frac{\gamma}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)^2} \frac{F_1}{F_2} + \frac{u_0 \sinh u_0 (1 - \gamma - \sinh u_0)}{(\cosh u_0 + F_1/F_2)^3} \frac{F_1}{F_2}. \quad (51)$$

В предельном случае  $p_y = 0$  формулы (50), (51) описывают в квазиклассическом приближении импульсное распределение вероятности ионизации одномерной квантовой ямы. Отметим, что с экспоненциальной точностью полная вероятность ионизации квантовой ямы в единицу времени также определяется формулами (46), (47). Этот результат в предельном случае (34) согласуется с соответствующим результатом работы [21], где он получен в адiabатическом приближении.

## 5. Обсуждение результатов и заключение

Результаты работы могут быть использованы для описания процесса ионизации реальных физических систем. К ним относятся не только системы, связанные короткодействующими силами (например, квантовая точка, квантовая яма, отрицательные ионы), но также и системы заряженных частиц, связанных далекодействующими кулоновскими силами (ионизация атомов).

В квазиклассическом приближении получено аналитическое выражение для вероятности ионизации квантовой точки в единицу времени: формула (29) описывает зависимость скорости ионизации квантовой точки от ее радиуса, глубины ямы и напряженности постоянного электрического поля.

Вычислена скорость ионизации квантовой точки в переменном электрическом поле с постоянной составляющей (формула (35)) в случае относительно низких частот, когда время движения электрона в классически запрещенной области мало по сравнению с периодом переменного поля. Этот предельный случай достигается в оптических и ИК лазерах.

Выведены формулы (50), (51), которые описывают импульсное распределение вероятности ионизации квантовой точки под действием параллельных постоянного и переменного электрических полей.

Из формул (50), (51) в качестве частных случаев вытекают как формула для дифференциальной вероятности отрыва электрона полем линейно поляризованной электромагнитной волны, так и формула для дифференциальной вероятности туннелирования в постоянном поле, полученная в разд.1. Например, при выключении постоянного электрического поля ( $F_1 \rightarrow 0$ ) из (50), (51) имеем

$$dw = P \exp \left\{ -2 \frac{|E_0|}{\omega} \left[ f(\gamma) + \left( \frac{p_x}{\kappa} \right)^2 \left( \operatorname{arsinh} \gamma - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) + \left( \frac{p_y}{\kappa} \right)^2 \operatorname{arsinh} \gamma \right] \right\} \frac{dp_x dp_y}{(2\pi)^2}, \quad (52)$$

где функция Келдыша [1]

$$f(\gamma) = \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \operatorname{arsinh} \gamma - \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma}, \quad (53)$$

а коэффициенты в показателе экспоненты имеют такой же вид, как и для парциальной вероятности процесса в поле линейно поляризованной волны (см. также [6, 10, 19]). На рис.1 показана зависимость импульсного распределения вероятности процесса от параметра Келдыша для различных отношений напряженности постоянного поля к амплитуде переменного поля.

Формулы (46), (47), с экспоненциальной точностью определяющие зависимость от характерных параметров задачи скорости ионизации в единицу времени как квантовой точки, так и квантовой ямы, впервые получены в настоящей работе методом мнимого времени. Эти формулы совпадают с выражениями (20), (21) в работе [15], где они найдены методом комплексных классических траекторий Ландау.

Зависимости величины  $\lambda = g(F_2, F_1, \kappa, \tau_0, \omega)/g(F_2, F_1 = 0, \kappa, \tau_0, \omega)$  от параметра Келдыша для различных отношений напряженности постоянного поля к амплитуде переменного поля представлены на рис.2. Видно, что этот параметр принимает значения, не превышающие единицы, что

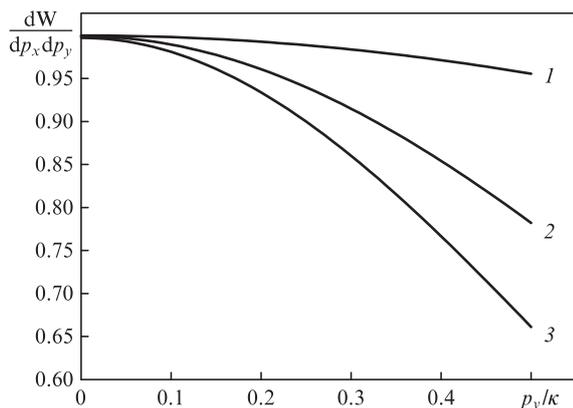


Рис.1. Импульсное распределение вероятности ионизации при параметре Келдыша  $\gamma = 1$  и  $p_x/k = 0.1$  для отношений напряженности постоянного электрического поля к амплитуде переменного поля  $F_1/F_2 = 0.1$  (1), 1 (2) и 10 (3).

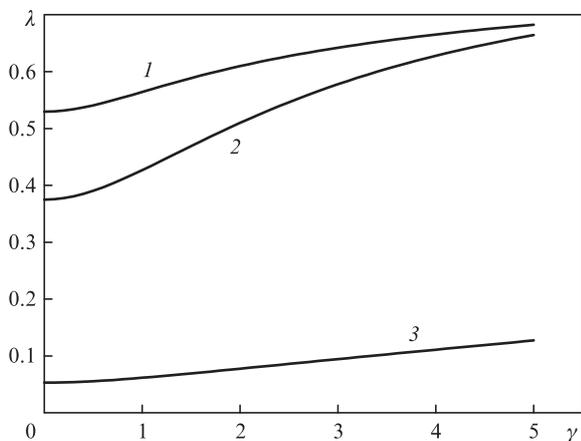


Рис.2. Зависимости величины  $\lambda$  от параметра Келдыша для отношений напряженности постоянного электрического поля к амплитуде переменного поля  $F_1/F_2 = 10$  (1), 1 (2) и 0.1 (3).

соответствует увеличению вероятности ионизации связанной системы переменным электрическим полем под действием постоянного электрического поля.

Таким образом, приложение даже относительно слабого постоянного поля существенно изменяет как полную вероятность процесса в единицу времени, так и импульсное распределение вероятности процесса.

1. Келдыш Л.В. *ЖЭТФ*, **47**, 1945 (1964).
2. Никишов А.И., Ритус В.И. *ЖЭТФ*, **50**, 255 (1966).
3. Ритус В.И., Никишов А.И. *Труды ФИАН*, **111** (1979).
4. Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. *ЖЭТФ*, **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
5. Никишов А.И., Ритус В.И. *ЖЭТФ*, **52**, 223 (1967).
6. Переломов А.М., Попов В.С. *ЖЭТФ*, **52**, 514 (1967).
7. Faisal F.H.M. *J. Phys B: At. Mol. Phys.*, **6**, L89 (1973).
8. Reiss H.R. *Phys. Rev. A*, **22**, 1786 (1980); *Progr. Quantum Electron.*, **16** (1), 1 (1992).
9. Аммосов М.В., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. *ЖЭТФ*, **91**, 2008 (1986).
10. Becker A., Faisal F.H.M. *J. Phys. B*, **38**, R1 (2005).
11. Дыхне А.М., Юдин Г.Л. *Внезапные возмущения и квантовая эволюция* (М.: Редакция журнала «Успехи физических наук», 1996, с. 394).
12. Никишов А.И. *ЖЭТФ*, **62**, 562 (1972).
13. Арутюнян И.Н., Аскаръян Г.А. *Письма в ЖЭТФ*, **12**, 378 (1970).
14. Манаков Н.Л., Файнштейн А.Г. *ЖЭТФ*, **79**, 751 (1980).
15. Ивлев Б.И., Мельников В.И. *ЖЭТФ*, **90**, 2208 (1986).
16. Kosarev I.N., Yudin G.L. *J. Phys. B*, **25**, 4169 (1992); **26**, 2115 (1993).
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1974, с. 225).
18. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением* (М.: Физматлит, 2001, с. 245).
19. Попов В.С. *УФН*, **174**, 921 (2004).
20. Krainov V.P., Sofronov A.V. *Phys. Rev. A*, **77**, 063418 (2008).
21. Демиковский В.Я., Вульгатер Г.А. *Физика квантовых низкоразмерных структур* (М.: Логос, 2000, с. 86).
22. Sikorsky Ch., Merkt U. *Phys. Rev. Lett.*, **62** (18), 2164 (1989).
23. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. *Задачи по квантовой механике* (М.: Наука, 1981, с. 37).
24. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.Н. *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (М.: Наука, 1971, с. 230).
25. Попруженко С.В., Мур В.Д., Попов В.С., Бауэр Д. *ЖЭТФ*, **135** (6), 1092 (2009).
26. Крайнов В.П. *ЖЭТФ*, **138** (8), 196 (2010).