PACS 42.50.Wk

Световое давление на твёрдое тело, погружённое в жидкую среду

В.П.Макаров, А.А.Рухадзе

Решена задача о силе, с которой электромагнитный импульс в неподвижной жидкой (или газообразной) среде действует на погружённое в неё (тоже неподвижное) твёрдое тело. Показано, что при определённых условиях (касающихся характеристик среды и формы импульса) формула для силы, действующей на единицу площади поверхности тела, получается из формулы Ландау–Лифшица для статических полей так же, как, согласно Питаевскому, получается при учёте дисперсии тензор напряжений поля из тензора напряжений статических полей. Формула для силы, действующей на стенку, от которой отражается падающая на неё квазимонохроматическая плоская волна с заданной интенсивностью, отличается от соответствующей формулы для случая, когда тело находится в вакууме, множителем $\pm n_1$, *где* n_1 *– показатель преломления, а верхний (нижний) знак соответствует положительной (отрицательной) групповой скорости волны в среде.*

Ключевые слова: *световое давление, дисперсия, отрицательная групповая скорость.*

1. Известно решение задачи о силе, действующей на стенку – плоскую поверхность твёрдого тела – при падении на неё плоской электромагнитной волны в вакууме (см. задачу 1 в [1, §47]). Введём следующие обозначения: $\boldsymbol{S}^{(0)}$– вектор плотности потока энергии падающей волны, $\boldsymbol{N}$ – единичный вектор вдоль нормали к поверхности стенки, направленной в глубь тела. Если координатные оси x, y, z выбрать так, чтобы $N_x = N_y = 0$, $N_z = 1$ и $S_x^{(0)} \geqslant 0$, $S_y^{(0)} = 0$, $S_z^{(0)} \geqslant 0$, то компоненты силы $\tilde{\boldsymbol{P}}$, действующей на единицу площади поверхности тела, будут определяться по формулам

$$\tilde{P}_x = \frac{S_z^{(0)}}{c}(1-R)\sin\theta_0,\ \tilde{P}_y = 0,\ \tilde{P}_z = \frac{S_z^{(0)}}{c}(1+R)\cos\theta_0, \quad (1)$$

где R – коэффициент отражения; θ_0 – угол падения; $\left(S_x^{(0)} = S^{(0)}\sin\theta_0,\ S_y^{(0)} = 0,\ S_z^{(0)} = S^{(0)}\cos\theta_0\right)$.

Нам не известны работы, в которых аналогичная задача решается для случая, когда волна распространяется в среде (жидкости или газе). Отметим только работы [2, 3]: в [2] рассматривается случай нормального падения волны на идеально отражающее тело, а в [3] – случай нормального падения волны на тело, полностью поглощающее излучение. Подробное обсуждение этих работ будет приведено ниже (в п.6).

2. Рассмотрим твёрдое тело, полностью погружённое в жидкую (или газообразную) среду и удерживаемое в ней неподвижно (при учете силы тяжести) сторонними (по отношению к жидкости) силами (например, с помощью нитей, на которых твёрдое тело подвешивается). Будем полагать, что имеющееся в среде электромагнитное поле можно считать квазимонохроматическим [4, §80]:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t)\exp(-\mathrm{i}\omega t),$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r},t)\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad (2)$$

где ω – частота поля; «амплитуды» электрического ($\boldsymbol{E}_0$) и магнитного ($\boldsymbol{H}_0$) полей – медленно (по сравнению с $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$) меняющиеся функции времени: если τ_0 – время, характеризующее скорость изменения $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$, то параметр

$$\frac{1}{\omega\tau_0} \ll 1. \quad (3)$$

Сила $\boldsymbol{P}$, действующая на единицу площади поверхности неподвижного твёрдого тела, определяется потоком импульса, или тензором напряжений [4, §16; 5]:

$$P_i = -\sigma_{ij}N_j, \quad (4)$$

Здесь и далее по дважды повторяющимся индексам $i, j, k = x, y, z$ подразумевается суммирование. Выражение для тензора напряжений в изотропной среде при учёте дисперсии было получено Л.П.Питаевским [4, §81; 6]:

$$\sigma_{ij} = -P_0\delta_{ij} + \frac{1}{4\pi}\left\{\varepsilon(\omega)\langle E_iE_j\rangle - \frac{1}{2}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\langle E^2\rangle\delta_{ij}\right\}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left\{\mu(\omega)\langle H_iH_j\rangle - \frac{1}{2}\left[\mu - \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]\langle H^2\rangle\delta_{ij}\right\}, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду поля; P_0 – давление, которое было бы в среде в отсутствие поля при данных значениях плотности ρ и температуры T; $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно.

В.П.Макаров, А.А.Рухадзе. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: vpmac@ran.gpi.ru. rukh@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 10 октября 2011 г., после доработки – 2 июля 2012 г.

Замечательная особенность тензора Питаевского (5) состоит в том, что, в отличие от выражения для энергии поля [4,§80], он (в нулевом приближении по параметру (3)) не содержит производных $\partial\varepsilon/\partial\omega$, $\partial\mu/\partial\omega$ и формально получается из соответствующего тензора для статистического поля заменой

$$\varepsilon \to \varepsilon(\omega),\ E_iE_j \to \langle E_iE_j\rangle,\ \mu \to \mu(\omega),\ H_iH_j \to \langle H_iH_j\rangle. \quad (6)$$

В [4,§16,35] получены формулы для полной силы и полного момента силы, с которыми статистическое поле в неподвижной жидкости (с постоянными температурой и плотностью) действует на твёрдое тело. В эти формулы в качестве силы, действующей на единицу площади, входит (см. формулу (4))

$$\tilde{P}_i = -\tilde{\sigma}_{ij}N_j,\ \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\Big[\varepsilon\Big(E_iE_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij}\Big) + \mu\Big(H_iH_j - \frac{1}{2}H^2\delta_{ij}\Big)\Big]. \quad (7)$$

Можно предположить (на это нам указано Л.П.Питаевским), что и в случае квазимонохроматического электромагнитного поля (2) сила $\tilde{\boldsymbol{P}}$ определяется выражением (7), в котором нужно только провести замену (6). Покажем, что при некоторых условиях это предположение оказывается оправданным.

3. Как и в [4, §16], мы полагаем, что жидкость покоится и в присутствии электромагнитного поля, т.е. полная сила, действующая на единицу объема жидкости, $\boldsymbol{f} = 0$. Силу $\boldsymbol{f}$ представим в виде суммы [4, §75, 81]:

$$\boldsymbol{f} = -\nabla P_0 + \rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{A}} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{d}}, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения;

$$f^{\mathrm{H}} = -\frac{1}{8\pi}(\langle E^2\rangle\nabla\varepsilon + \langle H^2\rangle\nabla\mu) + \frac{1}{8\pi}\nabla\rho\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_T\langle E^2\rangle + \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_T\langle H^2\rangle\Big] \quad (9)$$

– сила Гельмгольца;

$$f^{\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\rangle \quad (10)$$

– сила Абрагама; $\boldsymbol{f}^{\mathrm{d}}$ – сила, связанная с учетом дисперсии, которая для немагнитной среды ($\mu = 1$) исследовалась в работах [4, §81; 7 – 9]. Для произвольной среды (где не только $\partial\varepsilon/\partial\omega \neq 0$, но и $\partial\mu/\partial\omega \neq 0$) можно лишь полагать, что сила $\boldsymbol{f}^{\mathrm{d}}$ (как и сила Абрагама $\boldsymbol{f}^{\mathrm{A}}$) по порядку величины равна $|\boldsymbol{E}_0|^2/(c\tau_0)$. Ограничимся далее такими полями (2), для которых $c\tau_0 \gg L_0$, где L_0 – расстояние, характеризующее функции $|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, t)|$ и $|\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}, t)|$. Для таких полей силой Абрагама $\boldsymbol{f}^{\mathrm{A}}$ и силой $\boldsymbol{f}^{\mathrm{d}}$ можно пренебречь по сравнению с силой Гельмгольца $\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}$.

Как и в [4, §16], полагаем далее, что жидкость однородна по составу и находится в тепловом равновесии ($\nabla T = 0$). Поэтому

$$\nabla\varepsilon = \Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_T\nabla\rho,\ \nabla\mu = \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_T\nabla\rho. \quad (11)$$

С учётом (11) выражение (8) для силы упрощается и уравнение $\boldsymbol{f} = 0$ приводится к виду

$$\nabla P_0 = \rho\nabla\Big\{\boldsymbol{gr} + \frac{1}{8\pi}\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_T\langle E^2\rangle + \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_T\langle H^2\rangle\Big]\Big\}. \quad (12)$$

Уравнение (12) легко решается [4, §16], если плотность жидкости считать постоянной ($\nabla\rho = 0$):

$$P_0(\boldsymbol{r}, t) = p(\boldsymbol{r}) + \frac{\rho}{8\pi}\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_T\langle E^2\rangle + \Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_T\langle H^2\rangle\Big], \quad (13)$$

где

$$p(\boldsymbol{r}) = p_0 + \rho\boldsymbol{gr} \quad (14)$$

– давление в отсутствие поля; постоянная $p_0 = p(0)$.

Уравнение (12) решается и в другом предельном случае – достаточно разреженного газа. Для такой среды [4, §15]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi n\alpha(\omega),\ \mu(\omega) = 1 + 4\pi n\beta(\omega), \quad (15)$$

где n – число молекул в единице объема; $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ – электрическая и магнитная поляризуемости молекулы. Уравнение (12) с учётом выражений (15) и уравнения состояния (уравнения Клапейрона) $P_0 = nT$ (постоянная Больцмана положена равной единице) приводится к следующему виду:

$$T\nabla n = nm\boldsymbol{g} + \frac{1}{2}n\nabla[\alpha(\omega)\langle E^2\rangle + \beta(\omega)\langle H^2\rangle], \quad (16)$$

где m – масса молекулы. Плотность молекул n зависит от поля. Оставаясь в рамках линейной электродинамики ($\boldsymbol{D} \propto \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} \propto \boldsymbol{H}$), мы должны в (15) и, следовательно, во втором слагаемом в правой части (16) заменить n на плотность молекул в отсутствие поля $n_0(\boldsymbol{r})$ [4, §15]. После этого решение уравнения (16) будет иметь вид

$$n(\boldsymbol{r}, t) = n_0(\boldsymbol{r})\Big[1 + \frac{\alpha(\omega)\langle E^2\rangle + \beta(\omega)\langle H^2\rangle}{2T}\Big], \quad (17)$$

$$n_0(\boldsymbol{r}) = n_0(0)\exp\Big(\frac{m\boldsymbol{gr}}{T}\Big). \quad (18)$$

Для давления $P_0 = nT$ получаем то же выражение (13), только теперь давление $p(\boldsymbol{r})$ определяется не формулой (14), а формулой

$$p(\boldsymbol{r}) = n_0(\boldsymbol{r})T = p_0\exp\Big(\frac{m\boldsymbol{gr}}{T}\Big),\ p_0 = n_0(0)T. \quad (19)$$

Подстановка P_0 (13) в тензор (5) приводит его к виду

$$\sigma_{ij} = -p(\boldsymbol{r})\delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij},$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\Big\{\varepsilon(\omega)\Big[\langle E_iE_j\rangle - \frac{1}{2}\langle E^2\rangle\delta_{ij}\Big] + \mu(\omega)\Big[\langle H_iH_j\rangle - \frac{1}{2}\langle H^2\rangle\delta_{ij}\Big]\Big\}, \quad (20)$$

где тензор $\tilde{\sigma}_{ij}$ действительно получается из тензора (7) заменой (6). Первое слагаемое в выражении для σ_{ij} в (20) даёт в силу (4) вклад $p(\boldsymbol{r})\boldsymbol{N}$, который после интегрирования по всей поверхности твёрдого тела приводит к силе, равной, как и должно быть, архимедовой силе $-M\boldsymbol{g}$, где M – масса жидкости (газа) в объёме твёрдого тела.

4. Рассмотрим квазимонохроматическую плоскую волну в неподвижной жидкости. Повторим вычисления, которые приведены в [4, §83, 86], не налагая, однако, никаких ограничений на $\mu(\omega)$. Для квазимонохроматической плоской волны функции $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ в (2) можно представить в виде [4, §103]

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{00}(\boldsymbol{r},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr}),$$
$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_{00}(\boldsymbol{r},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr}), \quad (21)$$

где амплитуды $\boldsymbol{E}_{00}$ и $\boldsymbol{H}_{00}$ – медленно (по сравнению с $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})$) меняющиеся функции координат:

$$\frac{1}{kL_0} \propto \frac{\lambda}{L_0} \ll 1 \quad (22)$$

($\lambda = 2\pi/k$ – длина волны). Силами $\boldsymbol{f}^{\mathrm{A}}$ и $\boldsymbol{f}^{\mathrm{d}}$ в (8) можно пренебречь, если только отношение малых параметров (3) и (22)

$$\frac{(\omega\tau_0)^{-1}}{(kL_0)^{-1}} \propto \frac{L_0}{c\tau_0} \ll 1, \text{ или } \tau_0 \gg L_0/c.$$

В нулевом приближении по малым параметрам (3) и (22) амплитуды $\boldsymbol{E}_{00}$ и $\boldsymbol{H}_{00}$, частота ω и волновой вектор $\boldsymbol{k}$ связаны соотношениями [4, §83]

$$\boldsymbol{H}_{00} = \frac{c}{\omega\mu(\omega)}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_{00},\ \boldsymbol{E}_{00} = -\frac{c}{\omega\varepsilon(\omega)}\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_{00}, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega). \quad (24)$$

При вещественных $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ вектор $\boldsymbol{k}$ может быть вещественным (тогда поле $E, H \sim \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})$ не затухает), только если на данной частоте ω величины $\varepsilon(\omega) > 0$ и $\mu(\omega) > 0$ или $\varepsilon(\omega) < 0$ и $\mu(\omega) < 0$ [10, 11]. Если затуханием можно пренебречь, то удобно ввести единичный вектор

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{k}/k,\ k = n(\omega)\omega/c,\ n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

($\omega > 0$) [4, §83] и записать соотношения (23) в виде

$$\boldsymbol{H}_{00} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{E}_{00},\ \boldsymbol{E}_{00} = \pm\sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon(\omega)}}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H}_{00}; \quad (25)$$

здесь и далее верхний (нижний) знак соответствует $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega) > 0$ $(\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0)$.

Для плотности энергии получаем выражение [4, §83]

$$W = \frac{1}{16\pi\mu\omega}\frac{\partial(\omega^2\varepsilon\mu)}{\partial\omega}|\boldsymbol{E}_{00}|^2 = \frac{1}{16\pi\varepsilon\omega}\frac{\partial(\omega^2\varepsilon\mu)}{\partial\omega}|\boldsymbol{H}_{00}|^2, \quad (26)$$

а для вектора плотности потока энергии – соотношение [10, 11]

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\rangle = \pm\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\boldsymbol{E}_{00}|^2\boldsymbol{l} = \pm\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|\boldsymbol{H}_{00}|^2\boldsymbol{l}. \quad (27)$$

Выражение для групповой скорости получается из (24):

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{gr}} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = \frac{c}{\partial(n\omega)/\partial\omega}\boldsymbol{l} = \frac{2\omega\varepsilon\mu}{\partial(\omega^2\varepsilon\mu)/\partial\omega}\boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}}, \quad (28)$$

где фазовая скорость волны

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}} = \boldsymbol{l}\frac{\omega}{k} = \boldsymbol{l}\frac{c}{n}. \quad (29)$$

Из (26) – (28) следует, что, как и должно быть [4, §80],

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = W\boldsymbol{V}_{\mathrm{gr}}. \quad (30)$$

Тензор $\tilde{\sigma}_{ij}$ в (20) для одной квазимонохроматической плоской волны (2), (21) приводится к виду

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{8\pi}\mathrm{Re}\Big[\varepsilon(\omega)\Big(E^*_{00i}E_{00j} - \frac{1}{2}|E_{00}|^2\delta_{ij}\Big)$$
$$+\mu(\omega)\Big(H^*_{00i}H_{00j} - \frac{1}{2}|H_{00}|^2\delta_{ij}\Big)\Big]. \quad (31)$$

Амплитуду $\boldsymbol{H}_{00}$ в (31) выразим через $\boldsymbol{E}_{00}$ согласно (25) и используем известную формулу [1, §86], связывающую произведение двух единичных антисимметричных тензоров 3-го ранга e_{ijk} с единичным симметричным тензором 2-го ранга δ_{ij}. В результате простых вычислений получим

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -\frac{1}{8\pi}\varepsilon(\omega)|E_{00}|^2 l_i l_j. \quad (32)$$

С учетом (27) можно представить тензор (32) в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ji} = \sigma^{\mathrm{PR}}_{ij},$$

где

$$\sigma^{\mathrm{PR}}_{ij} = -\frac{1}{\omega}k_i\langle S_j\rangle \quad (33)$$

– тензор напряжений, введённый Полевым и Рытовым в работе [12] (см. также [13]).

5. Чтобы получить формулы, аналогичные формулам (1) для случая вакуума, нужно рассмотреть квазимонохроматическую плоскую волну в неподвижной жидкости, падающую на неподвижную стенку. Под $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в (20) нужно понимать, разумеется, напряженности полного поля в жидкости вблизи стенки, т. е. напряженности падающей и отражённой волн. Выберем координатные оси так же, как в [4, §86] и в п.1. Будем считать, что затуханием волн на частоте ω в 1-й среде (жидкости или газе) можно пренебречь. Тогда выражения для единичных векторов $\boldsymbol{l}_0$ и $\boldsymbol{l}_1$ вдоль волновых векторов $\boldsymbol{k}_0$ и $\boldsymbol{k}_1$ падающей и отражённой волн и волнового вектора $\boldsymbol{k}_2$ (не обязательно вещественного) преломлённой волны во 2-й среде (твёрдом теле) представим в следующем виде:

$$l_{0x} = \pm\sin\theta_0,\ l_{0y} = 0,\ l_{0z} = \pm\cos\theta_0,$$
$$l_{1x} = \pm\sin\theta_0,\ l_{1y} = 0,\ l_{1z} = \mp\cos\theta_0, \quad (34)$$
$$k_{2x} = \pm\frac{\omega}{c}n_1\sin\theta_0,\ k_{2y} = 0,\ k^2_{2z} = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_2\mu_2 - n_1^2\sin^2\theta_0),$$

где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)\mu_1(\omega)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения. Тогда (см. формулы (23), (25) и (34))

$$E_{00i}^{(0)} = E_{00}^{(0)}\delta_{iy},\ E_{00i}^{(1)} = E_{00}^{(1)}\delta_{iy},\ E_{00i}^{(2)} = E_{00}^{(2)}\delta_{iy},$$

$$H_{00x}^{(0)} = -\cos\theta_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{00}^{(0)},\ H_{00y}^{(0)} = 0,\ H_{00z}^{(0)} = \sin\theta_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{00}^{(0)},$$

$$H_{00x}^{(1)} = \cos\theta_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{00}^{(1)},\ H_{00y}^{(1)} = 0,\ H_{00z}^{(1)} = \sin\theta_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{00}^{(1)}, \tag{35}$$

$$H_{00x}^{(2)} = -\frac{\kappa_2}{\mu_2}E_{00}^{(2)},\ H_{00y}^{(2)} = 0,\ H_{00z}^{(2)} = \pm\frac{n_1}{\mu_2}\sin\theta_0 E_{00}^{(2)},$$

где $\kappa_2 = ck_{2z}/\omega$, причем $\mathrm{Im}\,\kappa_2 > 0$ в соответствии с тем, что волна затухает в глубь твёрдого тела [4, §86]. Граничные условия (непрерывность функций E_y и H_x на границе раздела жидкость – твёрдое тело) имеют вид

$$E_{00}^{(0)} + E_{00}^{(1)} = E_{00}^{(2)},\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_0\left(E_{00}^{(0)} - E_{00}^{(1)}\right) = \frac{\kappa_2}{\mu_2}E_{00}^{(2)}. \tag{36}$$

Из них определяется коэффициент отражения $r_\perp = E_{00}^{(1)}/E_{00}^{(0)}$ по амплитуде:

$$r_\perp = \frac{\mu_2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_0 - \kappa_2}{\mu_2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_0 + \kappa_2}. \tag{37}$$

С использованием (27) легко показать, что коэффициент отражения по мощности

$$R_\perp = \frac{\left|\langle S_{1z}\rangle\right|}{\left|\langle S_{0z}\rangle\right|} = \left|r_\perp\right|^2. \tag{38}$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда падающая волна поляризована в плоскости падения [4, §86]. В этом случае (см. формулы (23), (25) и (34))

$$H_{00i}^{(0)} = H_{00}^{(0)}\delta_{iy},\ H_{00i}^{(1)} = H_{00}^{(1)}\delta_{iy},\ H_{00i}^{(2)} = H_{00}^{(2)}\delta_{iy},$$

$$E_{00x}^{(0)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_0 H_{00}^{(0)},\ E_{00y}^{(0)} = 0,\ E_{00z}^{(0)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\sin\theta_0 H_{00}^{(0)},$$

$$E_{00x}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_0 H_{00}^{(1)},\ E_{00y}^{(1)} = 0,\ E_{00z}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\sin\theta_0 H_{00}^{(1)}, \tag{39}$$

$$E_{00x}^{(2)} = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2}H_{00}^{(2)},\ E_{00y}^{(2)} = 0,\ E_{00z}^{(2)} = \mp\frac{n_1}{\varepsilon_2}\sin\theta_0 H_{00}^{(2)}.$$

Граничные условия (непрерывность функций H_y и E_x) имеют вид

$$H_{00}^{(0)} + H_{00}^{(1)} = H_{00}^{(2)},\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_0\left(H_{00}^{(0)} - H_{00}^{(1)}\right) = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2}H_{00}^{(2)}. \tag{40}$$

Из них получаем коэффициент отражения $r_\parallel = H_{00}^{(1)}/H_{00}^{(0)}$ по амплитуде:

$$r_\parallel = \frac{\varepsilon_2\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}\cos\theta_0 - \kappa_2}{\varepsilon_2\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \kappa_2}; \tag{41}$$

коэффициент отражения по мощности

$$R_\parallel = \frac{\left|\langle S_{1z}\rangle\right|^2}{\left|\langle S_{0z}\rangle\right|^2} = \left|r_\parallel\right|^2. \tag{42}$$

Искомая сила $\tilde{P}_i$ получается из первой формулы в (7) при $N_i = \delta_{iz}$ и формулы (20):

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_1(\omega)\left[\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{E}^{(01)}\right|^2\delta_{iz} - \mathrm{Re}\left(E_i^{(01)*}E_z^{(01)}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{8\pi}\mu_1(\omega)\left[\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{H}^{(01)}\right|^2\delta_{iz} - \mathrm{Re}\left(H_i^{(01)*}H_z^{(01)}\right)\right], \tag{43}$$

где $\boldsymbol{E}^{(01)} = \boldsymbol{E}_{00}^{(0)} + \boldsymbol{E}_{00}^{(1)}$ и $\boldsymbol{H}^{(01)} = \boldsymbol{H}_{00}^{(0)} + \boldsymbol{H}_{00}^{(1)}$. Простые вычисления, при которых используются формулы (35), (37) (38) и (39), (41), (42), приводят к следующим результатам:

$$\tilde{P}_{\perp x} = \frac{\varepsilon_1}{8\pi}\left|E_{00}^{(0)}\right|^2(1 - R_\perp)\sin\theta_0\cos\theta_0,\ \tilde{P}_{\perp y} = 0,$$

$$\tilde{P}_{\perp z} = \frac{\varepsilon_1}{8\pi}\left|E_{00}^{(0)}\right|^2(1 + R_\perp)\cos^2\theta_0, \tag{44}$$

$$\tilde{P}_{\parallel x} = \frac{\mu_1}{8\pi}\left|H_{00}^{(0)}\right|^2(1 - R_\parallel)\sin\theta_0\cos\theta_0,\ \tilde{P}_{\parallel y} = 0,$$

$$\tilde{P}_{\parallel z} = \frac{\mu_1}{8\pi}\left|H_{00}^{(0)}\right|^2(1 + R_\parallel)\cos^2\theta_0. \tag{45}$$

С учетом формул (27), (29) и (30) выражения (44), (45) можно представить в одном виде для обеих поляризаций:

$$\tilde{P}_x = \pm n_1(\omega)\frac{\langle S_{0z}\rangle}{c}(1 - R)\sin\theta_0,\ \tilde{P}_y = 0,$$

$$\tilde{P}_z = \pm n_1(\omega)\frac{\langle S_{0z}\rangle}{c}(1 + R)\cos\theta_0, \tag{46}$$

где, как принято, верхний (нижний) знак соответствует случаю, когда групповая скорость волны в среде (жидкости или газе) положительна, т.е. параллельна фазовой скорости (отрицательна, т.е. антипараллельна фазовой скорости).

Выражения (46) отличаются от соответствующих выражений (1) для вакуума только множителем $\pm n_1(\omega)$. Заметим, что так же, как и в (1), в (46) отсутствуют слагаемые, соответствующие интерференции отражённой и падающей волн.

Если твёрдое тело имеет форму пластины, толщина которой в направлении оси z настолько велика, что преломлённая в нём волна полностью затухает, то полная сила, с которой световой импульс действует на тело, получается интегрированием силы (46) по той грани пластины, на которую он падает.

Заметим, что силу (46) можно выразить через тензор напряжений (33), связанный с падающей волной:

$$\tilde{P}_i = -(1 - R)\sigma_{iz}^{\mathrm{PR}(0)}\ (i = x, y),\ \tilde{P}_z = -(1 + R)\sigma_{zz}^{\mathrm{PR}(0)}. \tag{47}$$

6. В п.1 уже упоминались работы [2, 3], касающиеся только силы $\tilde{P}_z$ при нормальном падении ($\theta_0 = 0$). В [2] рассматривается волна, падающая нормально на идеально отражающее тело. Автор исходит из следующих положений: 1) направление силы, с которой падающая и отражённая волны действуют на тело, совпадает с направлением импульса падающей волны; 2) импульс (точнее – плотность импульса) волны по направлению совпадает с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ или фазовой скоростью $\boldsymbol{V}_{\rm ph}$ волны*. Поэтому при положительной ($\boldsymbol{k}_0 \uparrow\uparrow \langle \boldsymbol{S}_0 \rangle$) групповой скорости волны в среде имеет место «световое давление», а при отрицательной ($\boldsymbol{k}_0 \uparrow\downarrow \langle \boldsymbol{S}_0 \rangle$) «световое давление» заменяется «световым притяжением». Исходные положения ошибочны: сила определяется не импульсом, а его изменением в единицу времени, или потоком импульса (или – отличающимся от него знаком тензором напряжений); плотность импульса поля по направлению совпадает с плотностью потока энергии (отличается от $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ множителем $1/c^2$, см. [4, §75]). Однако предсказываемый в [2] знак силы $\tilde{P}_z$ является правильным (см. формулы (46) при $\theta_0 = 0$ и $R = 1$).

В работе [3] рассматривается случай нормального падения волны на тело, полностью поглощающее излучение. В ней автор отказывается от обоих положений, которые он использовал в своей предыдущей работе [2]. Он соглашается с тем, что сила определяется не импульсом, а потоком импульса. Плотность потока импульса теперь уже одной (только падающей) волны автор [3] записывает без какого-либо обоснования в виде отношения плотности потока энергии к фазовой скорости волны, не замечая, по-видимому, что это отношение совпадает с компонентой $-\sigma_{zz}^{\rm PR(0)}$ тензора Полевого – Рытова (см. формулы (47) при $\theta_0 = 0$ и $R = 0$), который он обсуждает в конце своей статьи.

Выражаем благодарность Л.П.Питаевскому за советы и обсуждение результатов работы.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1973).
2. Веселаго В.Г. *УФН*, **92**, 517 (1967).
3. Веселаго В.Г. *УФН*, **179**, 689 (2009).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986, §15).
6. Питаевский Л.П. *ЖЭТФ*, **39**, 1450 (1960).
7. Вашими Х., Карпман В.И. *ЖЭТФ*, **71**, 1010 (1976).
8. Бараш Ю.С., Карпман В.И. *ЖЭТФ*, **85**, 1962 (1983).
9. Макаров В.П., Рухадзе А.А. *ЖЭТФ*, **138**, 1011 (2010).
10. Сивухин Д.В. *Оптика и спектроскопия*, **3**, 308 (1957).
11. Пафомов В.Б. *ЖЭТФ*, **34**, 183 (1957); **36**, 1853 (1959).
12. Полевой В.Г., Рытов С.М. *УФН*, **125**, 549 (1972).
13. Рытов С.М. *ЖЭТФ*, **17**, 930 (1947).

* Автор [2] ссылается на работу [12]. По поводу работ [12, 13] заметим только, что их авторы полагают, что в изотропной среде групповая скорость $\boldsymbol{V}_{\rm gr}$ волны всегда имеет то же направление, что и фазовая скорость $\boldsymbol{V}_{\rm ph}$ ($\boldsymbol{V}_{\rm gr} \uparrow\uparrow \boldsymbol{V}_{\rm ph}$), ссылаясь на первое издание книги [4] и не замечая, что соответствующее доказательство с самого начала проводится в [4, §84] для сред с $\mu = 1$.