

# Разработка прецизионных лазерных гониометрических систем\*

М.Н.Бурнашев, П.А.Павлов, Ю.В.Филатов

*Рассматривается концепция построения прецизионных лазерных гониометрических систем, основанная на комплексировании кольцевого лазера и оптического датчика угла с голографическим принципом записи угловой шкалы. Концепция предполагает применение процедуры кросс-калибровки для определения систематических составляющих погрешностей датчиков угла, используемых в системе. Приведены результаты исследования системы, показавшие, что погрешность угловых измерений составляет  $\sim 0.01''$ . Кратко представлены результаты реализации предложенной концепции при создании эталонной системы единицы плоского угла при угловом перемещении твердого тела и измерительно-вычислительного комплекса для автоматизированного контроля высокоразрядных цифровых преобразователей угла.*

**Ключевые слова:** кольцевой лазер, угловые измерения, кросс-калибровка, преобразователь угла, оптический датчик угла.

## 1. Введение

Анализ развития прецизионных измерительных систем для угловых измерений свидетельствует о том, что важнейшей характеристикой этих систем, наряду с точностью измерений, становится их разрешающая способность [1]. Если на предыдущем этапе развития в большинстве систем для воспроизведения угла использовались поворотные столы с двумя автоколлиматорами и многогранной призмой или столик Мура с автоколлиматором и многогранной призмой, то в последнее время наблюдается переход к использованию столов с оптическими датчиками угла (ОДУ), характеризующимися обычно ценой деления (без интерполяции фазы выходного сигнала) порядка  $30''$ . Применение интерполяционной техники уменьшает цену деления до величин порядка нескольких сотых угловой секунды. В ряде случаев (например, в угловом компараторе, разработанном в РТВ (Физико-техническое ведомство Германии, г. Брауншвейг) [2]) используются ОДУ, специально разработанные для данных установок и имеющие цену деления порядка нескольких угловых секунд. Построение систем на базе ОДУ позволяет полностью автоматизировать процесс воспроизведения угла и добиваться при этом разрешающей способности установки на уровне сотых и тысячных долей угловой секунды за счет использования интерполяции выходного сигнала ОДУ.

Установки такого типа значительно лучше отвечают требованиям единства измерений, поскольку все более широкое применение в промышленности и оборонной технике находят высокоточные и высокочувствительные ОДУ. При этом важным обстоятельством является то, что

ряд преобразователей угла работает как в статическом режиме (для измерения постоянных значений угла), так и в динамическом (для измерения переменных во времени значений угла), а некоторые преобразователи предназначены для работы только в динамическом режиме. Это приводит к необходимости расширения функциональных возможностей измерительных установок – они должны обеспечивать измерение углов как в статическом, так и в динамическом режиме.

Применение динамического лазерного гониометрического метода [3, 4] позволяет проводить как калибровку рабочих средств измерений плоского угла, работающих в динамическом режиме, так и высокопроизводительную и экономически эффективную поверку некоторых средств измерения постоянного плоского угла.

Принцип действия лазерных гониометров основан на использовании вращающегося с квазипостоянной скоростью кольцевого лазера (КЛ) в качестве эталонного углового лимба с чрезвычайно высокими разрешением и равномерностью следования штрихов. Применение данного метода обеспечивает наиболее благоприятные условия для достижения предельных точностных характеристик. Измерительные технологии, используемые в современной лазерной динамической гониометрии, позволяют оценить ее потенциальную точность, определяемую квантовыми флуктуациями выходного сигнала КЛ\*, на уровне нескольких тысячных долей угловой секунды [4].

Результаты исследований показали, что основным источником случайной погрешности являются квантовые и широкополосные технические флуктуации выходного сигнала КЛ. Обычно максимальное значение дисперсии этих флуктуаций не превышает  $(0.0025'')^2$ , т. е. среднеквадратичное отклонение (СКО)  $\sigma < 0.05''$ . Следует отметить, что приведенное значение соответствует погрешности однократного измерения, т. е. измерения, выполненного в течение одного оборота платформы с КЛ, время которого обычно лежит в диапазоне 1–3 с. Дальнейшее уменьше-

\* Доложена на конф. «Оптика лазеров», Россия, С.-Петербург, июль 2012 г.

М.Н.Бурнашев, П.А.Павлов, Ю.В.Филатов. Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Россия, 197376 С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5; e-mail: yvfilatov@mail.eltech.ru

Поступила в редакцию 24 октября 2012 г., после доработки – 14 ноября 2012 г.

\* В настоящей работе речь идет об использовании КЛ для измерения углов, поэтому в дальнейшем будем рассматривать КЛ как измерительный преобразователь угловых перемещений.

ние случайной погрешности в лазерном гониометре возможно за счет накопления и статистической обработки больших массивов результатов измерений, что легко осуществляется в динамическом режиме. Из сказанного следует, что случайная погрешность измерений при достаточно больших массивах данных измерений составляет примерно несколько тысячных угловой секунды.

Систематическая погрешность измерения угла при использовании калибровки КЛ на угле  $2\pi$  обусловлена, прежде всего, периодическим изменением параметров КЛ под действием какого-либо фактора. Одним из наиболее существенных источников систематической погрешности КЛ является влияние на него внешнего постоянного магнитного поля (например, магнитного поля Земли). КЛ имеет некоторую ось чувствительности к магнитному полю, лежащую в плоскости его резонатора [5]. При вращении ось чувствительности меняет свою ориентацию относительно силовых линий магнитного поля, что приводит к систематической (при условии постоянства магнитного поля) погрешности на первой гармонике (при условии однородности магнитного поля) частоты вращения. Эта составляющая погрешности может быть учтена и скомпенсирована алгоритмически.

Другой источник систематической погрешности КЛ – нестабильность скорости его вращения. В этом случае равные угловые интервалы КЛ проходит за неравные интервалы времени. Поскольку КЛ является инерциальным датчиком, т.е. чувствительным к угловым перемещениям относительно инерциального пространства, то вращение Земли создает аддитивную добавку к частоте его выходного сигнала. Эта добавка, проинтегрированная за большие или меньшие временные интервалы, возникающие из-за нестабильности скорости вращения, создает систематические искажения угловой шкалы КЛ. Использование алгоритмов фазово-временного метода [6] позволяет практически устранить систематическую погрешность КЛ, вызванную влиянием нестабильностей скорости вращения и сдвига нуля выходной характеристики КЛ.

## 2. Концепция построения прецизионных лазерных гониометрических систем

Полученные результаты показывают, что динамический гониометр на основе КЛ является измерительной системой чрезвычайно высокой точности. Кольцевой лазер реализует угловую шкалу на базе гармонической структуры электромагнитного поля в замкнутом оптическом резонаторе. Благодаря этому КЛ как преобразователь угла характеризуется сверхвысоким разрешением и беспрецедентной равномерностью шкалы. В то же время масштабный коэффициент КЛ и соответственно цена деления его угловой шкалы подвержены некоторым изменениям во времени, что определяет необходимость текущей калибровки КЛ на угле  $2\pi$  или других известных заранее углах. Эти особенности КЛ определяют целесообразность его

комплексирования при построении прецизионных лазерных гониометрических систем с преобразователями угла на основе принципиально иных физических эффектов.

В качестве такого преобразователя можно использовать ОДУ, имеющий существенно менее равномерную, но, тем не менее, более стабильную во времени шкалу. ОДУ находят широкое применение в точном машиностроении, измерительной технике, метрологии. Современные технологии позволяют изготавливать угловые шкалы с неравномерностью порядка долей угловой секунды. Применение интерполяторов сигнала, уменьшающих дискретность отсчетов, и использование методов компенсации систематической погрешности ОДУ позволяют создавать углоизмерительные системы на основе ОДУ с погрешностью порядка сотых долей угловой секунды. При этом используются специально разработанные угловые шкалы большого диаметра, имеющие, как следствие, большое число штрихов. Так, например, угловая шкала, применяемая в угловом компараторе в РТВ, имеет диаметр 40 см и количество штрихов 262 144 [2]. Среди ОДУ особое место занимают устройства с угловой шкалой, создаваемой на основе принципов голографии [7]. Такая шкала характеризуется высокой равномерностью, малыми размерами и высоким разрешением. Ее использование позволило создать ряд высокоточных углоизмерительных систем.

В табл. 1 для сравнения представлены основные характеристики КЛ и ОДУ. Различный характер случайной составляющей погрешности и спектрального состава систематических погрешностей, а также различные физические принципы формирования угловой шкалы открывают новые возможности для комплексирования КЛ и ОДУ и создания на их основе прецизионных углоизмерительных систем.

Наличие в измерительной системе двух преобразователей угла, кроме указанных выше достоинств, позволяет осуществлять процедуру кросс-калибровки, обеспечивающую определение систематических составляющих погрешностей обоих преобразователей. Процедура кросс-калибровки [8] заключается в проведении поэтапной калибровки одного преобразователя с помощью другого (обычно это преобразователь с более высокой разрешающей способностью). После каждого этапа калибровки производится разворот корпуса (статора) одного из преобразователей относительно другого на угол  $360^\circ/n$ , где  $n$  – число этапов кросс-калибровки. В результате получается массив  $n \times n$  данных, обработка которого позволяет получить систематические составляющие погрешностей обоих преобразователей. Число разворотов  $n$  (или минимальный угол разворота  $360^\circ/n$ ) является важным фактором при проведении процедуры кросс-калибровки. Максимальной гармоникой систематической погрешности, которую можно определить с помощью кросс-калибровки, является гармоника с номером  $n/2$ .

При большом  $n$  классический метод кросс-калибровки становится очень трудоемким. В настоящее время раз-

Табл. 1. Основные характеристики КЛ и ОДУ.

Прибор	Характеристика		
	Равномерность угловой шкалы	Случайная погрешность	Систематическая погрешность
КЛ	Сверхвысокая	Зависит от скорости вращения и измеряемого угла	В спектре преобладают низкочастотные составляющие (нет особых требований к установке на ось вращения)
ОДУ	Умеренно высокая	Не зависит от скорости вращения и измеряемого угла	Наличие в спектре высоких гармоник (высокие требования к установке на ось вращения)

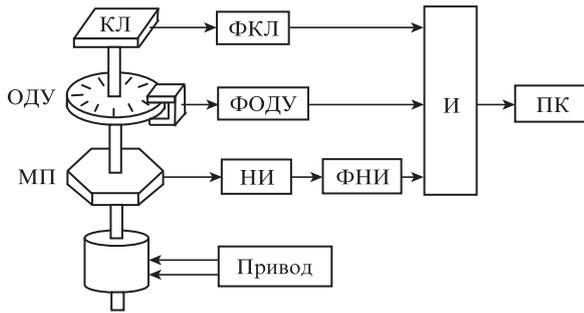


Рис.1. Функциональная схема прецизионной лазерной гониометрической системы.

работаны методы анализа систематической погрешности датчиков угла с использованием фурье-преобразования [9–12]. Все они предполагают применение двух и более однотипных датчиков, исключение составляет метод самокалибровки [13, 14], использованный при анализе погрешностей углового компаратора в РТВ. Однако метод самокалибровки требует установки многочисленных регистрирующих головок, распределенных по окружности с интервалом, кратным  $2\pi$ . При комплексировании КЛ с ОДУ в силу особенностей угловой шкалы КЛ появляется возможность применения модифицированного метода кросс-калибровки [15].

Исходя из приведенных соображений, была разработана концепция построения прецизионной лазерной гониометрической системы, предполагающая, что в системе используются следующие измерительные преобразователи угла:

1. Кольцевой He–Ne-лазер ГЛ-1 моноблочной конструкции с периметром 0,4 м, что соответствует масштабному коэффициенту  $\sim 10^6$  или разрешению 1,3"/имп.

2. ОДУ, в качестве которого используется голографический фотоэлектрический преобразователь угла ПКГ-105М; его шкала формируется голографическими методами и содержит 324 000 меток на один оборот (разрешение 4"/имп.).

3. Многогранная призма в сочетании с оптическим нуль-индикатором.

Блок-схема прецизионной лазерной гониометрической системы представлена на рис.1. На шпинделе азростатической опоры установлены КЛ, ротор ОДУ и многогранная призма МП. На неподвижном корпусе системы расположены статор ОДУ и нуль-индикатор НИ, оптически связанный с многогранной призмой. Привод осуществляет вращение шпинделя с квазипостоянной скоростью. Выходные сигналы КЛ, ОДУ и НИ пропускаются через соответствующие формирователи сигналов ФКЛ, ФОДУ, ФНИ и направляются в интерфейс И, осуществляющий предварительную обработку данных и передачу их в персональный компьютер ПК.

В данной схеме основными преобразователями угла являются КЛ и ОДУ. Многогранная призма и нуль-индикатор выполняют вторичную функцию и предназначены для передачи размера единицы угла образцовым средствам измерений.

### 3. Исследование систематических компонент погрешности

Угол, измеряемый с помощью КЛ, как известно [6], определяется выражением

$$\varphi_{ikj} = 2\pi \frac{N_{\varphi_{ikj}} \pm F' t_i}{N_{2\pi_{kj}} \pm F' T}, \quad (1)$$

где  $N_{\varphi}$  и  $N_{2\pi}$  – числа периодов (импульсов) выходного сигнала КЛ на интервале измерения угла  $\varphi$  и на угле  $2\pi$  соответственно;  $T$  – период вращения;  $F'$  – обобщенный сдвиг нуля КЛ;  $t_i$  – время измерения угла;  $i$  – номер измеряемого угла;  $k$  – номер углового положения КЛ относительно шпинделя;  $j$  – номер оборота.

За результат измерения  $i$ -го угла в рассматриваемой схеме принимается среднее значение результатов измерений за 16 оборотов вала, когда КЛ находится в одном из фиксированных относительно вала положений ( $k = \text{const}$ ), за вычетом систематической погрешности КЛ  $s_i^{\text{RL}}$ :

$$\varphi_i = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{16} \varphi_{ij} - s_i^{\text{RL}}. \quad (2)$$

Приведенная на рис.1 измерительная схема была экспериментально исследована на макете прецизионной лазерной гониометрической системы.

На рис.2 показаны результаты калибровки ОДУ (первой части процедуры кросс-калибровки), выполненной с помощью КЛ. При проведении калибровки выходной сигнал ОДУ (324 000 меток на оборот) пропускался через счетчиковый делитель частоты с коэффициентом деления 900. Результатом такого деления являлось уменьшение числа выходных импульсов ОДУ до 360 за один оборот, т.е. номинальный угол между импульсами после делителя составлял  $1^\circ$ . Данные получены при различных положениях КЛ относительно ротора измерительной установки, т.е. проводились действия, необходимые для реализации кросс-калибровки. Углы последовательных разворотов КЛ относительно ротора составляли  $60^\circ$  (шесть различных положений КЛ).

На рис.2 приведены результаты для трех (из шести) углов разворота КЛ:  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $240^\circ$ . Как было отмечено выше, соответствующая обработка данных позволяет определить систематические погрешности КЛ и ОДУ. Систематическая погрешность ОДУ  $\delta_i^{\text{OE}}$  находится простым усреднением полученных шести зависимостей  $\delta_i^{\text{OE}}(\varphi)$  и вычитанием номинальных значений углов  $\varphi_i^{\text{nom}}$ :

$$\delta_i^{\text{OE}} = \frac{1}{16 \times 6} \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^{16} \varphi_{ikj} - \varphi_i^{\text{nom}}. \quad (3)$$

Результат такого усреднения приведен на рис.3. Видно, что систематическая погрешность ОДУ сосредоточена

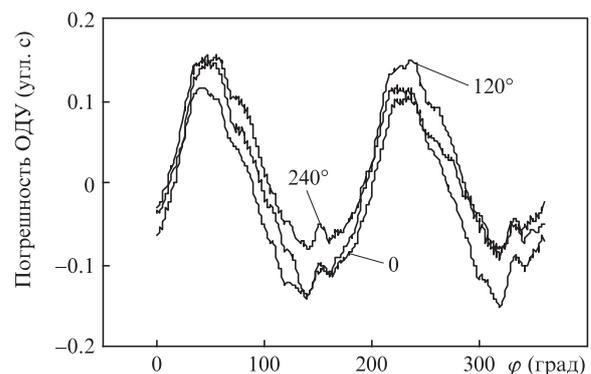


Рис.2. Результаты калибровки ОДУ при различных угловых положениях КЛ относительно ротора системы.

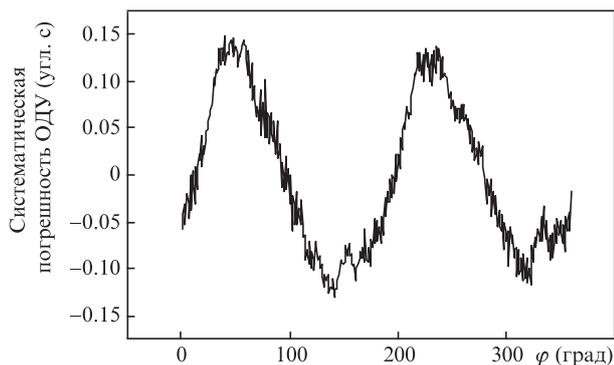


Рис.3. Систематическая погрешность ОДУ.

на на второй гармонике частоты вращения и амплитуда этой гармоники составляет  $\sim 0.12''$ .

Систематическая погрешность КЛ определялась путем вычитания усредненной систематической погрешности ОДУ из систематических погрешностей ОДУ для каждого положения КЛ. Каждая из шести полученных после такого вычитания кривых представляет собой систематическую погрешность КЛ и будет иметь свою фазу, обусловленную положением КЛ относительно ротора измерительной установки при проведении данного измерения. Усреднение по всем шести кривым проводилось после соответствующего сдвига каждой кривой по фазе. Эта процедура описывается выражением

$$\delta_i^{RL} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \Delta\varphi_{i+(k-1)60,k}, \quad (4)$$

где

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{16} \Delta\varphi_{ikj} - \delta_i^{OE}.$$

Результат такой обработки данных представлен на рис.4. Видно, что систематическая погрешность КЛ с амплитудой  $\sim 0.016''$  сосредоточена на первой гармонике частоты вращения.

Зависимость амплитуды первой гармоники систематической погрешности КЛ от скорости его вращения приведена на рис.5. Видно, что она линейно растет с увеличением времени оборота. Коэффициент пропорциональности равен  $0.0064 \pm 0.0003''/с$ . Наблюдаемая зависимость определяется влиянием внешнего магнитного поля на КЛ типа ГЛ-1 [5]. В стационарных условиях, в которых должна находится прецизионная лазерная гониометрическая система, возможна компенсация систематической погрешности КЛ.

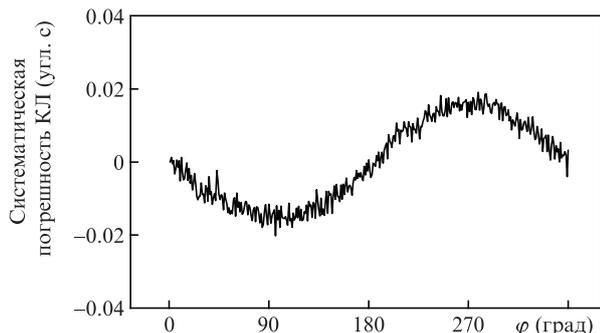


Рис.4. Систематическая погрешность КЛ.

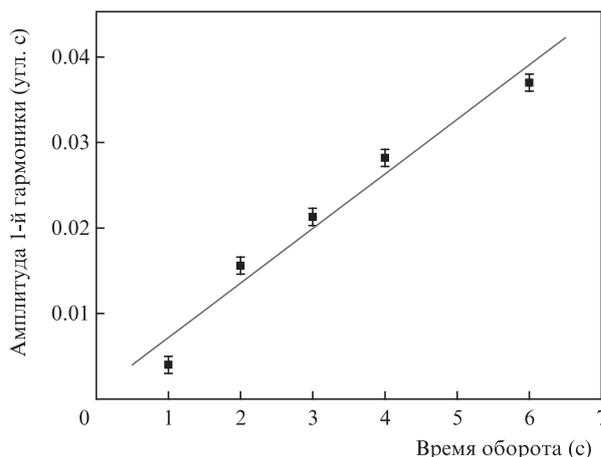


Рис.5. Зависимость амплитуды первой гармоники систематической погрешности КЛ от скорости его вращения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при достаточно хорошем экранировании от внешнего магнитного поля неисключенная систематическая погрешность измерения угла не превышает  $0.01''$ .

#### 4. Исследование случайной погрешности измерения угла

##### 4.1. Статистическое распределение результатов измерений

Рассмотрим вопрос о нахождении случайной компоненты погрешности. Случайная погрешность определяется значением выборочного СКО

$$\sigma_{ik} = \left[ \frac{1}{15 \times 16} \sum_{j=1}^{16} (\varphi_{ijk} - \varphi_{ik})^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

и квантилем распределения выборочного среднего результатов измерений.

Для оценки доверительных интервалов, в которых лежат результаты измерения угла, необходимо знать функцию распределения их случайных погрешностей, а также доверительные интервалы, в которых находятся систематические погрешности. Решение этой задачи можно получить путем статистического и корреляционного анализа условий проведения измерений.

Для выполнения статистического анализа запишем формулу для измеряемого угла  $\varphi$  в следующем виде:

$$\varphi = 2\pi \frac{N_\varphi}{N_{2\pi}}.$$

Отсчет счетчиком числа периодов  $N$  выходного сигнала КЛ начинается в момент начала измерения  $t = 0$ , в момент  $t = t_\varphi$  получаем значение  $N_\varphi$ , а в момент завершения полного оборота ротора  $t = T$  – значение  $N_{2\pi}$ . Фиксирование этих моментов времени привязано к фронтам выходного сигнала ОДУ.

Информация об угловом положении ротора ОДУ и основания КЛ содержится в текущих значениях фаз выходных сигналов датчиков угла, входящих в состав измерительной системы. Поэтому основными источниками случайных погрешностей являются случайные процессы, описывающие фазовые шумы выходных сигналов КЛ и

ОДУ, которые имеют различные статистические характеристики.

Флуктуации фазы выходного сигнала КЛ вызваны, в первую очередь, случайными флуктуациями частоты сигнала (которые можно представить в виде стационарного широкополосного случайного процесса), обусловленными спонтанным излучением активной среды. Поскольку за время оборота платформы происходит достаточно большое число актов спонтанного излучения, каждый из которых в одинаковой степени влияет на число периодов выходного сигнала КЛ, то в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей [16] закон распределения числа периодов этого сигнала можно считать нормальным. В качестве модели случайного процесса, описывающего случайные отклонения числа периодов выходного сигнала КЛ, обычно выбирают процесс Винера. Числа периодов выходного сигнала  $N_\varphi$  и  $N_{2\pi}$  на интервалах  $[0, t_\varphi]$  и  $[t_\varphi, T]$  являются некоррелированными. Случайная погрешность формирования границ измеряемого угла вызвана дробовыми шумами фотоприемника и тепловыми шумами тракта формирования выходного сигнала ОДУ. В качестве модели этой погрешности можно использовать белый гауссов шум.

Исходя из этого двумерное распределение  $f_2(N_\varphi, N_{2\pi})$  чисел периодов  $N_\varphi$  и  $N_{2\pi}$  можно считать нормальным и представить его в виде

$$f_2(N_\varphi, N_{2\pi}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{1-r^2}\right. \\ \left. \times \left[ \frac{(N_\varphi - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(N_\varphi - a_1)(N_{2\pi} - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(N_{2\pi} - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – математические ожидания  $N_\varphi$  и  $N_{2\pi}$  соответственно;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – их СКО;  $r$  – коэффициент корреляции  $N_\varphi$  и  $N_{2\pi}$ .

Рассмотрим функцию распределения единичного результата измерения угла  $f(\varphi)$ . Анализ формулы (1) показывает, что  $f(\varphi)$  выражается через двумерную функцию распределения  $f_2(N_\varphi, N_{2\pi})$  следующим образом:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(su, u) |u| du = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2 s + \sigma_2^2 s^2} \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} |a_2^2\sigma_1^2 - 2ra_2a_1\sigma_1\sigma_2 + a_1^2\sigma_2^2|\right] \\ \times [1 + \sqrt{2\pi} z \exp(z^2/2) \Phi_0(z)], \quad (6)$$

где  $s = \varphi/2\pi = N_\varphi/N_{2\pi}$  (результат измерения в полных оборотах вала);

$$z = \frac{a_2\sigma_1^2 - ra_1\sigma_1\sigma_2 + a_1\sigma_2^2 s - ra_2\sigma_1\sigma_2 s}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-r^2)(\sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2 s + \sigma_2^2 s^2)}};$$

$\Phi_0(x)$  – функция Лапласа. Для случая равномерного вращения вала в приближении белого гауссова шума для флуктуаций частоты выходного сигнала КЛ параметры распределения вычисляются по формулам [4]

$$a_1 = N_\varphi, \quad a_2 = N_{2\pi}, \quad \sigma_1^2 = K^2(R_{\text{др}}^2 T \langle s \rangle + 2D_{\text{ОЕ}}),$$

$$\sigma_2^2 = K^2(R_{\text{др}}^2 T + 2D_{\text{ОЕ}}),$$

$$r = \left[ \frac{(R_{\text{др}}^2 T \langle s \rangle + D_{\text{ОЕ}})^2}{(R_{\text{др}}^2 T \langle s \rangle + 2D_{\text{ОЕ}})(R_{\text{др}}^2 T + 2D_{\text{ОЕ}})} \right]^{1/2},$$

где  $R_{\text{др}}$  – коэффициент случайного дрейфа КЛ;  $K = N_{2\pi}/2\pi$  – масштабный коэффициент КЛ;  $D_{\text{ОЕ}}$  – дисперсия случайной погрешности ОДУ для одной границы углового интервала.

На практике всегда реализуется предельный случай малых флуктуаций:  $\sigma_1, \sigma_2 \ll N_\varphi, N_{2\pi}$ . В этом случае из исходного уравнения (1) получаем соотношение

$$s = s_0 + \delta s = \frac{\langle N_\varphi \rangle + \delta N_\varphi}{\langle N_{2\pi} \rangle + \delta N_{2\pi}} \approx \frac{\langle N_\varphi \rangle}{\langle N_{2\pi} \rangle} \left( 1 + \frac{\delta N_\varphi}{\langle N_\varphi \rangle} - \frac{\delta N_{2\pi}}{\langle N_{2\pi} \rangle} \right).$$

Случайная величина  $\delta s$  представлена в виде алгебраической суммы двух случайных величин  $\delta N_\varphi/\langle N_\varphi \rangle$  и  $\delta N_{2\pi}/\langle N_{2\pi} \rangle$ , распределенных по нормальному закону. Отсюда следует, что величина  $s$  также распределена по нормальному закону:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_s}} \exp\left[-\frac{(s - \langle s \rangle)^2}{2D_s}\right].$$

Для единичного результата измерения угла получаем

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\varphi}} \exp\left[-\frac{(\varphi - \langle \varphi \rangle)^2}{2D_\varphi}\right], \quad (7)$$

где дисперсия измеренного угла

$$D_\varphi(\langle \varphi \rangle) = \begin{cases} D_{\text{ОЕ}}(0) + D_{\text{ОЕ}}(\langle \varphi \rangle) \\ + [R_{\text{др}}^2 T - 2D_{\text{ОЕ}}(0)] \left( \frac{\langle \varphi \rangle}{2\pi} \right) \left( 1 - \frac{\langle \varphi \rangle}{2\pi} \right), & \langle \varphi \rangle \neq 0, 2\pi, \\ 0, & \langle \varphi \rangle = 0, 2\pi. \end{cases} \quad (8)$$

По итогам анализа можно сделать вывод о том, что для получения оценок средних значений результатов измерений, а также для построения соответствующих доверительных интервалов, необходимо использовать распределение Стьюдента и распределение  $\chi^2$ .

Следует отметить, что распределения по неограниченному углу вращения, приведенные выше, представляют собой математическую абстракцию, поскольку в лазерном гониометре применение алгоритма самокалибровки ограничивает рабочий диапазон измерений значениями  $0-2\pi$ . Обычно в таком же диапазоне проводится калибровка цифровых преобразователей угла. В этих случаях используются так называемые намотанными распределениями [17].

В случае малых флуктуаций распределение сводится к намотанному нормальному распределению, которое можно вычислять с помощью  $\zeta$ -функций:

$$f(\varphi) = (2\pi)^{-1} \zeta_3(\varphi - \langle \varphi \rangle, \rho),$$

где  $\rho = \exp(-D_\varphi)$ , а значения  $\zeta_3$  табулированы в [18]. В предельном случае  $\sqrt{D_\varphi}/\varphi \ll 1$  по-прежнему можно пользоваться стандартным нормальным распределением.

Параметрическая зависимость плотности распределения вероятности от измеряемого угла представлена на рис.6. При приближении значения измеряемого угла к краям интервала самокалибровки  $(0, 2\pi)$  дисперсия соглас-

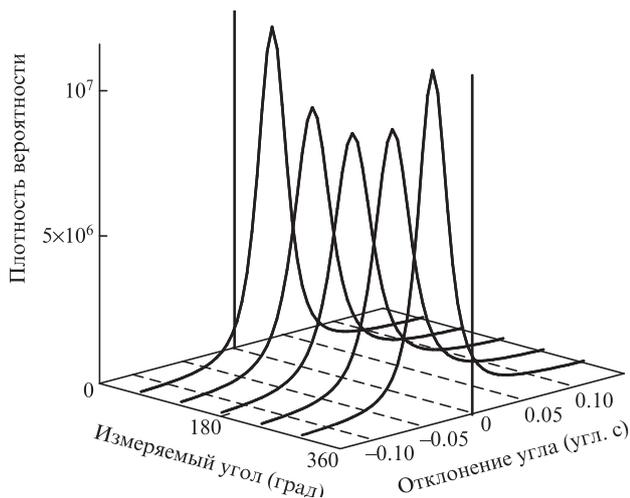


Рис.6. Параметрическая зависимость плотности распределения вероятности от измеряемого угла.

но (8) уменьшается, а максимальная плотность вероятности увеличивается. На границах интервала самокалибровки плотность распределения вероятности вырождается в  $\delta$ -функцию.

Выборочные распределения, полученные на измерительной установке в динамическом режиме, представлены на рис.7 (гистограмма и аппроксимация гауссовой кривой). На рис.8 показана гистограмма распределения масштабных коэффициентов КЛ, полученных с использованием интерференционного нуля-индикатора, которая характеризует КЛ как датчик угла с очень равномерной шкалой.

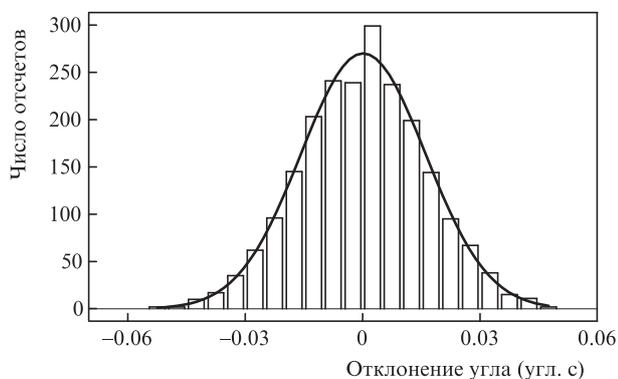


Рис.7. Гистограмма погрешностей угловых измерений и ее аппроксимация гауссовой кривой.

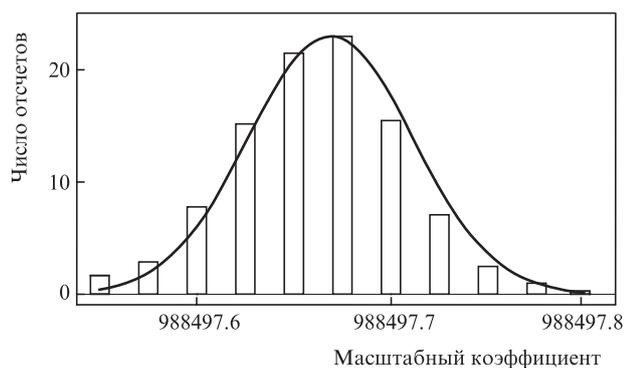


Рис.8. Гистограмма распределения масштабных коэффициентов КЛ и ее аппроксимация гауссовой кривой.

### 4.2. Методика раздельной оценки случайных погрешностей КЛ и ОДУ

При проведении измерения данными, служащими для получения оценки его результата, являются целочисленные значения, считываемые со счетчиков числа полных периодов выходного сигнала КЛ. Величина и статистические свойства случайной погрешности измерений некоторого угла  $\varphi$  определяются временем измерения  $t_\varphi$ , статистическими характеристиками частоты и фазы выходного сигнала КЛ и статистическими характеристиками сигнала датчика угла.

Для разделения компонент случайной погрешности КЛ и ОДУ используется параметрическая зависимость (8). Характерный вид этой зависимости представлен на рис.9.

Запишем выражение (8) в виде разложения по двум функциям –  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$ :

$$D_\varphi(s) = \beta_1 F_1(s) + \beta_2 F_2(s), \tag{9}$$

где  $F_1(s) = s(1-s)$  и  $F_2(s) = s^2 - s + 1$  – два независимых, но не ортогональных полинома одной степени, которые будут представлять собой две независимые переменные в процедуре линейной регрессии;  $\beta_1 = R_{dr}^2 T$  и  $\beta_2 = 2D_{OE}$  (здесь зависимость  $D_{OE}$  от времени мы не рассматриваем) – коэффициенты линейной регрессии;  $s = \varphi/2\pi$ .

В результате вычислений зависимости дисперсии от угла вращения для значений  $s_i$  получаем выборку  $D_{\varphi i}$  ( $i = 1, \dots, m$ , где  $m$  – объем выборки). Согласно [19] полагаем  $D_{\varphi i} = D_\varphi(s_i) + v_i \equiv y_i$ , где случайная величина  $v_i$  центрирована и имеет нормальное распределение. Уравнения линейной регрессии случайных величин  $y_i$  (т.е.  $D_{\varphi i}$ ) по независимым переменным  $z_{1i} = F_1(s_i)$  и  $z_{2i} = F_2(s_i)$  в векторной форме представляются в следующем виде:

$$M y_i = \beta^T Z_i,$$

где

$$Z_i = \begin{pmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \end{pmatrix}$$

– вектор независимых переменных;

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

– вектор коэффициентов регрессии;  $M$  – оператор нахождения математического ожидания случайной величины;

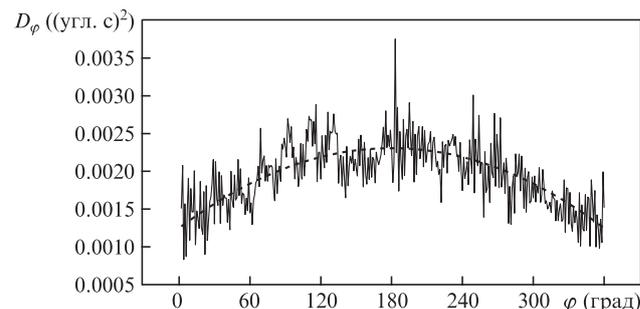


Рис.9. Зависимость дисперсии результата измерений от измеряемого угла. Штриховая кривая – аппроксимация по формуле (8).

индекс  $t$  означает операцию транспонирования матрицы или вектора.

В результате проведения регрессии получаем оценку

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

вектора  $\mathbf{b}$ , представляющую собой решение нормальных уравнений  $A\mathbf{b} = \mathbf{c}$ , где

$$A = \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_i^t$$

– невырожденная матрица системы нормальных уравнений, а

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{Z}_i.$$

Вектор  $\mathbf{b} = A^{-1}\mathbf{c}$  минимизирует сумму

$$\sum_{i=1}^m (y_i - \tilde{\mathbf{b}}^t \mathbf{Z}_i)^2$$

на множестве всех  $p$ -мерных векторов  $\tilde{\mathbf{b}}$  и является оценкой по методу наименьших квадратов. Для независимых и нормально распределенных величин  $y_1, \dots, y_m$  оценка  $\mathbf{b}$  распределена по многомерному нормальному закону  $F(\mathbf{b}, \sigma^2 A^{-1})$ , а оценка  $(m-p)\tilde{\sigma}^2/\sigma^2$  имеет распределение  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $m-p$ , где  $p=2$  – число коэффициентов регрессии. Несмещенная оценка  $\tilde{\sigma}$  СКО  $\sigma$  может быть найдена из соотношения

$$(m-2)\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{b}^t \mathbf{Z}_i)^2.$$

Исходя из указанных законов распределения можно получить доверительные интервалы для отдельных компонент вектора  $\mathbf{b}$ . Так, если нас интересует компонента  $\beta_l$  ( $l=1, 2$ ), то величина  $(b_l - \beta_l)(\tilde{\sigma}\sqrt{a^{ll}})^{-1}$  имеет  $t$ -распределение с  $m-p$  степенями свободы. Задавая значение доверительной вероятности  $P$ , получаем согласно [19, 20] следующее выражение для доверительного интервала для коэффициента регрессии  $\beta_l$ :

$$b_l - \tilde{\sigma}\sqrt{a^{ll}} t_{(1-P)/2} \leq \beta_l \leq b_l + \tilde{\sigma}\sqrt{a^{ll}} t_{(1-P)/2}, \quad (10)$$

где  $a^{ll} = (A^{-1})_{ll}$  – диагональные элементы нормированной корреляционной матрицы вектора оценки  $\mathbf{b}$ .

Получим доверительные границы для коэффициентов регрессии  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , а также для СКО случайной погрешности ОДУ  $\sigma_{\text{OE}} = \sqrt{\beta_2}$  и коэффициента случайного дрейфа КЛ  $R_{\text{dr}} = \sqrt{\beta_1/T}$ :

$$\left[ b_2 - \tilde{\sigma}\sqrt{a^{22}} t_{(1-P)/2} \right]^{1/2} \leq \sigma_{\text{OE}} \leq \left[ b_2 + \tilde{\sigma}\sqrt{a^{22}} t_{(1-P)/2} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \left[ b_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{a^{11}} t_{(1-P)/2} \right]^{1/2} \leq R_{\text{dr}} \leq \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ b_1 + \tilde{\sigma}\sqrt{a^{11}} t_{(1-P)/2} \right]^{1/2},$$

где

$$a^{ll} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^m F_{3-l}^2(s_i);$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^m F_1^2(s_i) \sum_{i=1}^m F_2^2(s_i) - \left[ \sum_{i=1}^m F_1(s_i) F_2(s_i) \right]^2.$$

Используя данные, представленные на рис.9, для  $P=0.95$  ( $t_{0.025} = 1.96$ ) получаем согласно (10), (11) численные оценки для СКО случайной погрешности ОДУ  $\sigma_{\text{OE}}$  и коэффициента случайного дрейфа КЛ  $R_{\text{dr}}$ :

$$0.034'' \leq \sigma_{\text{OE}} \leq 0.036'',$$

$$0.042''/\sqrt{c} \leq R_{\text{dr}} \leq 0.044''/\sqrt{c}.$$

Исходя из результатов проведенного анализа, можно выполнить оценки неучтенной систематической погрешности  $\theta$  и случайной погрешности измерения угла. В качестве оценки одной из компонент неучтенной систематической погрешности примем полуширину доверительного интервала для оценки систематической погрешности ОДУ, которая определяется максимальным значением дисперсии случайной погрешности измерений (8) при числе оборотов  $m_{\text{rev}} = 16$  и числе повторных измерений  $n_{\text{pos}} = 6$  в различных положениях КЛ:  $\theta_{\text{OE}} = \sqrt{D_\varphi(\pi)/(m_{\text{rev}} n_{\text{pos}})} t_{0.025} = 0.01''$ . Компоненту систематической погрешности, обусловленную влиянием магнитного поля Земли на КЛ, оценим как  $\theta_{\text{RL}} = 0.016'' \pm 0.001''$ .

В качестве оценки СКО случайной погрешности примем  $\sigma = \sqrt{D_\varphi(\pi)/m_{\text{rev}}} = 0.013'' \pm 0.001''$  при  $T = 2$  с, соответствующее максимальной случайной погрешности КЛ.

## 5. Реализация прецизионных лазерных гониометрических систем

Рассмотренная концепция построения прецизионных лазерных гониометрических систем была реализована для ряда установок, среди которых следует отметить эталонную систему единицы плоского угла при угловом перемещении твердого тела и измерительно-вычислительный комплекс для автоматизированного контроля высокоразрядных цифровых преобразователей угла.

### 5.1. Эталонная система единицы плоского угла при угловом перемещении твердого тела

Данная система вошла в Государственный первичный эталон ГЭТ 94-01, предназначенный для воспроизведения, хранения и передачи единицы линейного ускорения твердого тела и единицы плоского угла при угловом перемещении твердого тела. В его состав входит ряд эталонных установок, в том числе эталонная ротационная установка НЦ-3, реализующая метод поворота ротационной платформы в гравитационном поле Земли и гониометрический метод. Ротационная установка НЦ-3 воспроизводит единицу линейного ускорения в диапазоне частот 0.05–30 Гц и диапазоне амплитуд  $10^{-4}$ – $10$  м/с<sup>2</sup> и единицу плоского угла при угловом перемещении твердого тела в диапазоне 0.2''–360°.

На рис.10 приведена упрощенная принципиальная схема установки НЦ-3. Установка работает в двух режимах: в режиме воспроизведения переменных низкочастотных ускорений и в режиме воспроизведения переменных плоских углов.

Воспроизведение угла на базовой скорости (0.5 об./с) осуществляется вращающимся КЛ, фаза выходного сигнала которого пропорциональна углу поворота. Использование в составе установки голографического датчика угла позволяет осуществлять передачу угла в расширенном диапазоне скоростей вращения и определять погрешно-

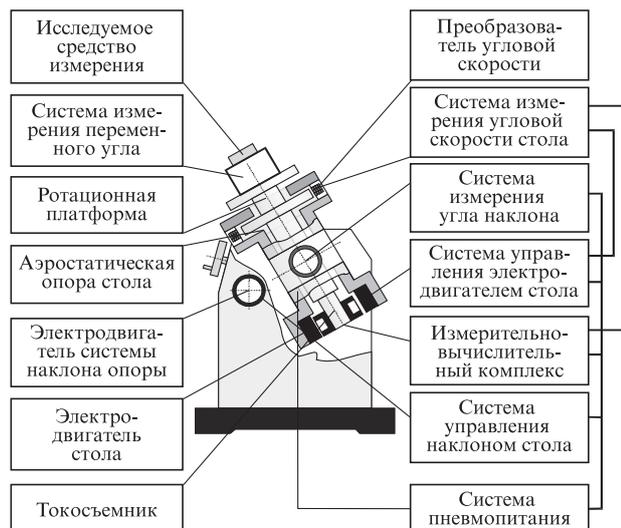


Рис.10. Блок-схема установки НЦ-3 с эталонной системой единицы плоского угла.

сти обоих датчиков. Многогранная призма и нуль-индикатор выполняют вторичную функцию и предназначены для передачи размера единицы угла эталонам следующих разрядов и рабочим средствам измерения, а также для сличения с Государственным первичным эталоном единицы плоского угла ГЭТ 22-80.

Результаты сличений эталона единицы плоского угла при угловом перемещении твердого тела ГЭТ 94-01 с эталоном единицы плоского угла ГЭТ 22-80 по 12-гранной призме приведены в табл.2. Видно, что различия в результатах, полученных с использованием двух эталонов угла, не превышают 0.03", исключение составляет центральный угол между 6-й и 7-й гранями.

Таким образом, сличения подтвердили достоверность результатов исследования эталонной установки НЦ-3, а также тот факт, что эта установка позволяет осуществлять передачу размера единицы угла с использованием КЛ или ОДУ. Следует отметить, что ОДУ имеет большую по сравнению с КЛ долговременную стабильность. Систематическая погрешность ОДУ существенно зависит от взаимного расположения считывающих головок и шкалы и подвержена влиянию термодинамических факторов

Табл.2. Результаты сличений эталонов ГЭТ 94-01 и ГЭТ 22-80.

Номер грани	Измеренное отклонение от номинального значения (") (ГЭТ 94-01)	СКО результатов измерений (")	Действительное отклонение от номинального значения (") (ГЭТ 22-80)
1-2	-1.63	0.01	-1.60
2-3	1.58	0.01	1.56
3-4	-0.89	0.03	-0.89
4-5	-0.56	0.01	-0.54
5-6	-0.13	0.02	-0.12
6-7	0.37	0.02	0.26
7-8	-1.34	0.03	-1.32
8-9	1.79	0.03	1.76
9-10	-0.03	0.01	0.04
10-11	0.46	0.02	0.49
11-12	0.29	0.02	0.31
12-1	0.08	0.01	0.05

и деформационных процессов. Для КЛ систематическая погрешность меньше, а ее источниками являются внешние магнитные поля. Поэтому для высокоточных измерений предпочтительнее использовать КЛ. В то же время для КЛ диапазон измеряемых угловых скоростей ограничен (обычно  $\pi/6 - 2\pi$  рад/с), тогда как для ОДУ он более широкий. Для КЛ нижняя граница диапазона определяется физическими процессами в лазере (захват частот встречных волн), в то время как для ОДУ диапазон определяется параметрами применяемых оптоэлектронных компонентов. Для обеспечения максимальной точности целесообразно проведение процедуры кросс-калибровки непосредственно перед измерениями.

### 5.2. Измерительно-вычислительный комплекс для автоматизированного контроля высокоразрядных цифровых преобразователей угла

Измерительно-вычислительный комплекс (ИВК) предназначен для автоматизированного контроля высокоразрядных цифровых преобразователей угла (ЦПУ). ИВК обеспечивает измерение основных характеристик ЦПУ в диапазонах углов 0–360°, угловых скоростей  $\pm(30 - 720)^\circ/\text{с}$  и угловых ускорений  $\pm(0 - 20)^\circ/\text{с}^2$  с погрешностью, не превышающей 0.05".

По своим метрологическим характеристикам ИВК может быть отнесен к эталонам 1-го разряда [21], что предъявляет высокие требования к условиям его эксплуатации, а также к выбору методов и средств испытаний комплекса с целью подтверждения его метрологических характеристик.

Для достижения указанных выше характеристик в ИВК используется принцип построения, принятый в эталоне единицы угла при угловом перемещении твердого тела, т. е. используется комплексирование КЛ и ОДУ. В отличие от ГЭТ 94-01 в ИВК образцовым датчиком угла, с помощью которого осуществляется измерение угловых параметров смены кода ЦПУ, является ОДУ. Кольцевой лазер служит для хранения единицы плоского угла и определения систематической погрешности ОДУ на базовой скорости.

На рис.11 представлена функциональная схема ИВК. Комплекс состоит из электромеханической системы, системы управления, оптико-электронной измерительной системы и системы отображения информации.

Принцип работы ИВК заключается в сравнении значений угла поворота ротационной платформы, полученных с помощью ОДУ и исследуемого ЦПУ в одни и те же моменты времени. Сигналы с ЦПУ через интерфейсное устройство поступают в блок электроники ИВК. Одновременно в этот блок поступают сигналы ОДУ. По сигналам запроса, вырабатываемым исследуемым ЦПУ или нуль-индикатором, информация об угле поворота ОДУ и ЦПУ фиксируется платой обработки и передачи информации [22] и передается затем в компьютер для дальнейшей обработки и вывода результата измерения на монитор, принтер, жесткий диск.

Погрешность ИВК на базовой скорости определяется как разность результатов измерения характеристик ОДУ кольцевыми лазерами, входящими в состав ИВК и в состав эталонной установки НЦ-3 (входит в состав эталона ГЭТ 94-01). Следует отметить, что в настоящей работе впервые с помощью КЛ была проведена передача единицы плоского угла от эталона ГЭТ 94-01 средству измерения.

Результат определения погрешности ИВК на базовой скорости представлен на рис.12. Гармонический анализ

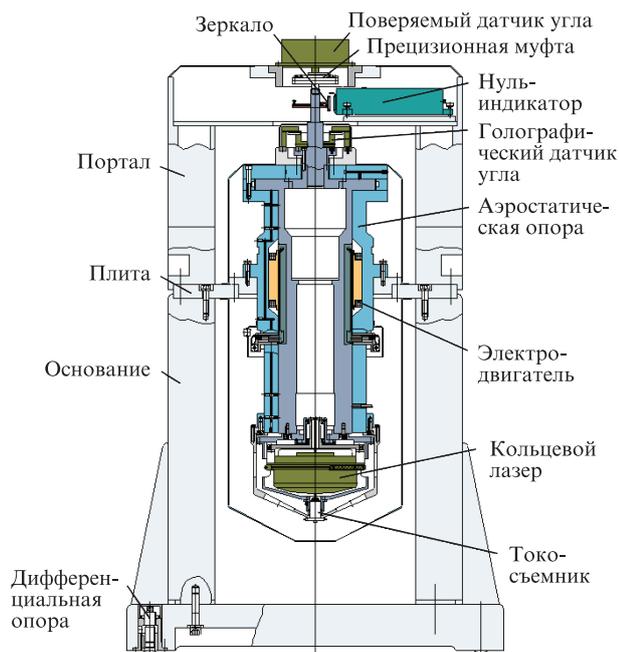


Рис.11. Функциональная схема ИВК для контроля высокоразрядных цифровых преобразователей угла.

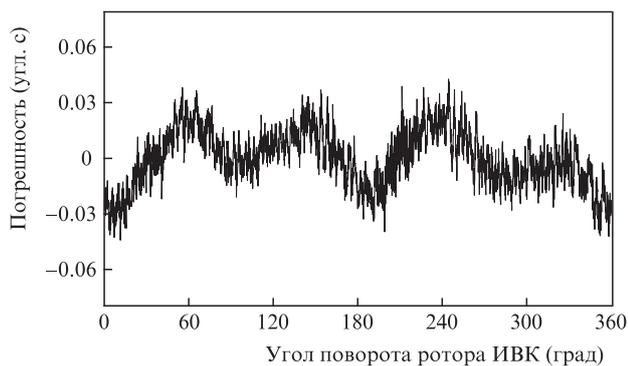


Рис.12. Погрешность ИВК на базовой скорости.

показал, что результирующая погрешность включает в себя 2-ю, 3-ю и 4-ю «оборотные» гармоники, которые характеризуют неисключенную систематическую погрешность. При этом неисключенная систематическая составляющая погрешности не превышает  $0.03''$ , а случайная составляющая имеет СКО, равное  $0.008''$ .

## 6. Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности применения систем, основанных на комплекс-

ровании КЛ и высокоточных датчиков угла, в особенности датчиков угла, в которых используется голографический метод записи угловой шкалы. Прецизионные лазерные гониометрические системы, основанные на рассмотренной в настоящей работе концепции, обеспечивают проведение угловых измерений с систематической составляющей погрешности менее  $0.01''$  и примерно такой же случайной составляющей. Разумеется, приведенные оценки не включают в себя аддитивные погрешности средств, предназначенных для передачи размера единицы угла, таких как оптический нуль-индикатор, муфта и др. Дальнейшее повышение точности угловых измерений предполагает, с одной стороны, увеличение разрешающей способности и долговременной стабильности характеристик КЛ и ОДУ, а с другой стороны, совершенствование вспомогательных средств передачи размера единицы угла.

1. Proc. 186th PTB-Seminar (Braunschweig, 2003)
2. Just A., Krause M., Probst R., Wittekopf R. *Metrologia*, **40**, 288 (2003).
3. Filatov Yu., Loukianov D.P., Probst R. *Metrologia*, **34**, 343 (1997).
4. Бурнашев М.Н., Лукьянов Д.П., Павлов П.А., Филатов Ю.В. *Квантовая электроника*, **30**, 141 (2000).
5. Кривцов Е.П., Филатов Ю.В. *Измерительная техника*, №12, 11 (1989).
6. Павлов П.А. *Измерительная техника*, №1, 17 (2008).
7. Gordeev S.V., Turukhano V.G. *Opt. Laser Technol.*, **28**, 255 (1996).
8. Sim P.J., in *Modern Techniques in Metrology*. Ed. by P.L.Hewitt (Singapore, World Scientific, 1984, pp102–121).
9. Смирнов В.А. и др. *Измерительная техника*, №4, 7 (1991).
10. Глаголев И.П. и др. *Измерительная техника*, №4, 8 (1991).
11. Masuda T., Kajitani V. *J. Robotics Mechatronics*, **5**, 448 (1993).
12. Watanabe T. et al. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4401**, 267 (2001).
13. Just A. et al. *Metrologia*, **40**, 288 (2003).
14. Probst R. *Meas. Sci. Technol.*, **18**, 1 (2007).
15. Бурнашев М.Н., Кривцов Е.П., Павлов П.А., Филатов Ю.В. *Материалы междунар. научно-техн. конф. «Наука, образование и общество в 21 веке»* (С.-Петербург, 2006, с.160).
16. Левин Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники* (М.: Радио и связь, 1989).
17. Мардиа К. *Статистический анализ угловых наблюдений* (М.: Наука, 1978).
18. Shuler M., Gebelin H. *Five Place Table of Elliptical Function Based on Jacobi's Parameter q* (Berlin: Springer, 1955).
19. Андерсон Т. *Статистический анализ временных рядов* (М.: Мир, 1976).
20. Химмельблау Д. *Анализ процессов статистическими методами* (М.: Мир, 1976).
21. ГОСТ 8.577-2002. *Государственная поверочная схема для средств измерений линейных ускорений и плоского угла при угловом перемещении твердого тела*.
22. Грушвицкий Р.И., Килочек Д.В., Павлов П.А. *Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ»*, №1, 64 (2008).