

# Расчет спектра мод шепчущей галереи в цилиндрических резонаторах с возмущенными граничными условиями

А.А.Донцов, А.М.Монахов, Н.С.Аверкиев

*Проведен аналитический расчет спектра мод шепчущей галереи для резонаторов с малой деформацией границы. Рассмотрены цилиндрические резонаторы двух различных сечений: сегмент, близкий к кругу, и сегмент, близкий к полукругу. Расчет выполнен для резонаторов с металлической границей, однако полученный результат является хорошим приближением и для диэлектрических резонаторов. Проанализированы границы применимости найденных выражений для спектров. Показано, что спектры, рассчитанные при помощи полученных выражений, хорошо совпадают с полученными компьютерным расчетом. С помощью численного моделирования качественно исследовано изменение распределения поля при возмущении.*

**Ключевые слова:** моды шепчущей галереи, цилиндрический резонатор, теория возмущений.

## 1. Введение

Резонаторы на модах шепчущей галереи (WGM) активно исследуются два последних десятилетия [1–3]. Недавно сообщалось [4] о полудисковых WGM-лазерах, излучающих в среднем ИК диапазоне. WGM-резонаторы характеризуются гораздо более высокой добротностью по сравнению с резонаторами других типов. Известно [5] о создании диэлектрических образцов с добротностью более  $10^8$ . В случае полупроводниковых материалов удастся добиться добротности  $10^4$  [6]. Лазеры, изготовленные на базе WGM-резонаторов, отличаются особенностями в динамическом поведении, возникающими вследствие геометрии полей мод, и расположением частот в спектре [7]. Для полупроводниковых лазеров также известны нетривиальные оптико-механические эффекты [8].

При изготовлении дисковых и полудисковых резонаторов часто возникают отклонения формы резонатора от идеальной. Так, при изготовлении полудискового лазера скол, как правило, не проходит точно через центр диска. На боковых поверхностях дисковых резонаторов возможно появление мелких сколов (рис.1). Целью настоящей работы является изучение влияния небольших ( $\alpha \approx \Delta R/R \ll 1$ ) дефектов на модовую структуру соответствующего резонатора.

## 2. Постановка задачи

Для простоты будем рассматривать резонатор с идеальными проводящими стенками, поскольку известно [9], что для мод шепчущей галереи в диэлектрическом резонаторе с большим показателем преломления (случай полупроводниковых лазеров) решение слабо отличается от реше-

ния для мод в металлическом резонаторе, заполненном диэлектриком. Такое приближение хорошо описывает модовую структуру, однако если необходимо учесть потери на излучение, то границы резонатора следует считать диэлектрическими.

Как известно [10], решение уравнений Максвелла в цилиндрической области общего вида (не обязательно в круговом цилиндре) с идеально проводящими стенками сводится к решению двумерного уравнения для проекции напряженности электрического (ТМ мода) или магнитного (ТЕ мода) векторов напряженности на ось цилиндра. Уравнение для соответствующей компоненты имеет вид

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями  $\phi = 0$  для ТМ моды и  $\partial\phi/\partial n = 0$  для ТЕ моды. В общем случае в уравнение входит показатель преломления среды  $n_m \neq 1$ , и необходимо заменить  $k^2$  на  $n_m^2 k^2$ , но мы выберем скорость света так, что  $c/n_m = 1$ .

Заметим, что величины  $k$  и  $\lambda = 2\pi/k$  относятся к двумерной задаче. Полный же квадрат волнового числа в трехмерном пространстве состоит из двух слагаемых:  $k_t^2 = k_z^2 + k^2$ , где числа  $k_z$  и  $k$  – величины одного порядка.

Как будет показано ниже, для WG-мод неидеальных резонаторов  $k$  имеют вид

$$k = k_0(1 + \delta), \quad (2)$$

где  $k_0$  – безразмерное невозмущенное поперечное волновое число;  $\delta$  – малая безразмерная величина, слабо зависящая от номера моды. Поэтому для возмущенного полного волнового числа  $k_t'$  следует использовать формулу  $k_t' = k_{t0}[1 + (k_0^2/k_{t0}^2)\delta]$ , где  $k_{t0}$  – невозмущенное полное волновое число.

## 3. Расчет мод в случае полудискового резонатора

Рассмотрим случай полудискового резонатора (рис.1,а). Систему единиц всегда можно выбрать так, что радиус диска  $R = 1$ . Введем цилиндрические координаты  $(r, \varphi)$

А.А.Донцов, А.М.Монахов, Н.С.Аверкиев. Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, Россия, 194021 С.-Петербург, ул. Политехническая, 26; e-mail: operatorne@yandex.ru, amon@les.ioffe.ru

Поступила в редакцию 22 февраля 2013 г., после доработки – 12 апреля 2013 г.

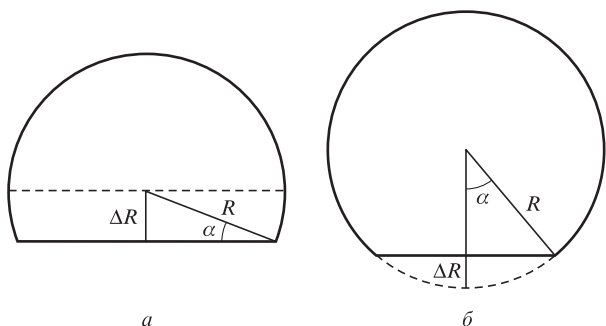


Рис.1. Рассматриваемые неидеальные области, близкие к полу-диску (а) и диску (б).

таким образом, чтобы прямая часть границы полудиска соответствовала углам  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Тогда решением уравнения (1) для полудиска единичного радиуса будет

$$\phi_{mn} = A_{mn} J_m(p_{mn}r) \sin(m\varphi), \quad k_{mn} = p_{mn}. \quad (3)$$

Здесь  $J_m$  – функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $p_{mn}$  – значение  $n$ -го нуля функции Бесселя  $m$ -го порядка ( $m$  – натуральное число). Коэффициент  $A_{mn}$  выбран так, что  $\int_A |\phi_{mn}|^2 dS = 1$  (интегрирование производится по всему полудиску). Отсюда получим

$$A_{mn} = \left( \frac{\pi}{2} \int_0^1 J_m(p_{mn}r)^2 r dr \right)^{-1/2} = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} |J_{m-1}(p_{mn})| \right)^{-1}.$$

При  $m \gg 1$  и  $n \ll m$  функция Бесселя существенно отличается от нуля только при  $r \approx 1$ , т.е. решение (3) сосредоточено вблизи границы полудиска. Эти моды будут модами шепчущей галереи для данного резонатора.

Решение (1) для области на рис.1,а можно получить конформным отображением указанной области на полукруговую. Если функция  $w(z)$ , где  $z = x + iy$ , осуществляет такое преобразование, то уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta\psi = -k^2\psi |dw/dz|^2. \quad (4)$$

Здесь оператор  $\Delta$ , функции  $|dw/dz|^2$  и  $\psi$  рассматриваются в координатах для области полудиска. Если область на рис.1,а близка к полудиску, то существует близкое к тривиальному преобразование  $w(z) \approx z + \alpha g(z)$  с малым постоянным параметром  $\alpha$ . Тогда  $|dw/dz|^2 \approx 1 + \alpha f(z)$ . Таким образом, с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$  уравнение (4) принимает вид

$$\Delta\psi + k^2\psi = -\alpha k^2\psi f. \quad (5)$$

Это уравнение с малой правой частью для простой области полудиска с прежними граничными условиями  $\psi = 0$ . Если  $\alpha = 0$ , то решения  $\phi_{mn}$  известны. Для (5) можно использовать стандартную теорию возмущений [11], из которой следует, что с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$

$$k^2 = k_{mn}^2 \left( 1 - \alpha \int_A f \phi_{mn} \phi_{mn}^* dS \right). \quad (6)$$

В нашем случае отображение формы полудиска (рис.1,а) на полукруг можно выполнить с помощью функции

$$z = \left[ \left( \frac{b+w}{b-w} \right)^{\pi/2d} - 1 \right] \left[ \left( \frac{b+w}{b-w} \right)^{\pi/2d} + 1 \right]^{-1}, \quad (7)$$

где  $d = 2 \arctan[(1 + \sin\alpha)/b]$  и  $b = \cos\alpha$ . Разложив функцию (7) в ряд с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$ , получим

$$w = z + \frac{\alpha}{\pi} (1 - z^2) \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right).$$

Тогда  $f(r, \varphi)$  в выражении (5) примет вид

$$f(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \left[ 2 - r \cos \varphi \ln \left( \frac{1 + 2r \cos \varphi + r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \right) + 2r \sin \varphi \arctan \left( \frac{2r \sin \varphi}{1 - r^2} \right) \right].$$

Интеграл в выражении (6)

$$\int_A f \phi_{mn} \phi_{mn}^* dS = \int_0^1 \int_0^\pi A_{mn}^2 J_m(p_{mn}r)^2 \sin^2(m\varphi) f(r, \varphi) r d\varphi dr. \quad (8)$$

Поскольку  $\sin^2(m\varphi) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2m\varphi)]$ , а при больших  $m$  функция  $\cos(2m\varphi)$  быстро осциллирует по сравнению с медленно меняющейся  $f(r, \varphi)$ , то при интегрировании по углу слагаемым  $\cos(2m\varphi)$  можно пренебречь. Интеграл (8) тогда равен  $4/\pi$ . Подставив этот результат в (6), получим конечную формулу для волнового числа данной моды (в обычных единицах измерения):

$$k = k_0(1 + \delta), \quad \delta = -2\alpha/\pi, \quad (9)$$

где  $k_0 = p_{mn}/(n_m R)$  – невозмущенное волновое число данной моды.

ТЕ моде волновода соответствует задача с однородными граничными условиями Неймана  $\delta\phi/\delta n = 0$ . Рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям для ТМ моды, дадут выражение, полностью повторяющее (9), но с отличием в выражении для невозмущенного волнового числа:  $k_0 = \eta_{mn}/(n_m R)$ , где  $\eta_{mn}$  – значение  $n$ -го нуля производной функции Бесселя  $m$ -го порядка.

При  $m \rightarrow \infty$  собственные числа мод шепчущей галереи можно рассчитать из условия кратности набега фаз числа  $\pi$ , т.е.  $kn_m(\pi + 2\alpha)R = m\pi$ ; тогда

$$k = \frac{m}{n_m R} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right). \quad (10)$$

В формуле (9)  $p_{mn} \approx m$  при  $m \rightarrow \infty$ , и выражения (10) и (9) совпадают. Таким образом, формула (9) подтверждается в предельном случае.

Для применимости формулы (9) необходимо, чтобы собственные числа уравнения (5) для неидеального резонатора хорошо описывались первым приближением теории возмущений по параметру  $\alpha$ . Это условие заведомо выполняется, если поля мод, соответствующих данному собственному числу в возмущенном и невозмущенном резонаторах, отличаются несильно. Из теории дифракции известно, что для этого размер дефекта границы, параллельной вектору Пойнтинга, должен быть много меньше длины волны. В описываемом случае характерный размер возмущения, которое приводит к качественному изменению поля, описывается формулой  $\Delta R = R(1 - \cos\alpha) \approx \frac{1}{2}R\alpha^2$ . В результате получаем эквивалентные условия

$$\alpha \ll \sqrt{\lambda/R}, \quad \alpha \ll \sqrt{2\pi/m}. \quad (11)$$

Для  $m = 600$  имеем  $\alpha < 0.1$ .

Табл.1. Неидеальный полудиск. Значения волновых чисел мод, полученные численным решением задачи на компьютере ( $k_c^2$ ) и по формуле (9) ( $k_f^2$ ) при различных  $\Delta R/R \approx \alpha$ .

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R/R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$(k_c^2 - k_f^2)/k_c^2$ (%)
1.7	0.10	$1.03 \times 10^4$	$1.04 \times 10^4$	1.0
2.1	0.12	$1.00 \times 10^4$	$1.02 \times 10^4$	2.0
2.4	0.14	$9.73 \times 10^3$	$9.97 \times 10^3$	2.4
2.8	0.16	$9.43 \times 10^3$	$9.74 \times 10^3$	3.3
3.1	0.18	$9.13 \times 10^3$	$9.52 \times 10^3$	4.0
3.5	0.20	$8.82 \times 10^3$	$9.30 \times 10^3$	5.0
3.8	0.22	$8.52 \times 10^3$	$9.10 \times 10^3$	6.3
4.0	0.24	$8.22 \times 10^3$	$8.90 \times 10^3$	7.6
4.5	0.26	$7.92 \times 10^3$	$8.71 \times 10^3$	9.0

Примечания: Радиус диска  $R = 1$ ,  $m = 100$ , невозмущенное значение  $k_0^2 = 1.18 \times 10^4$ ;  $\Delta R/\lambda$  – отношение размера дефекта к длине волны.

В табл.1 проведено сравнение значений волновых чисел, полученных с помощью формулы (9) ( $k_f$ ) и численного компьютерного расчета ( $k_c$ ). Видно, что даже для относительно небольшого  $m = 100$  формула (9) при  $\Delta R/R = \alpha = 0.26$  дает погрешность в 10%, что подтверждает применимость (9) и при достаточно сильных отклонениях формы от полукруга.

### 4. Расчет мод в случае дискового резонатора

Перейдем теперь к другой, похожей внешне задаче: в качестве невозмущенной области рассмотрим диск, а в качестве возмущенной – диск с малым сколом (рис.1,б). Малый угол  $\alpha$  связан с малым дефектом по радиусу ( $\Delta R/R \ll 1$ ) формулой  $\Delta R/R = 1 - \cos \alpha \approx \alpha^2/2$ .

Для этой задачи метод конформных отображений не подходит, поскольку такое отображение качественно изменяет форму круга и из-за этого сингулярно. Первое слагаемое ряда для этого преобразования плохо описывает дефект. Поэтому для второй задачи мы применим метод граничных возмущений [11]. В данном случае будем использовать метод возмущений граничных условий для вырожденного случая.

Известно, что любое решение  $\psi(r)$  с собственным числом  $k$  уравнения (1) для возмущенной области (лежащей внутри невозмущенной) с граничными условиями  $\psi(r) = 0$  удовлетворяет внутри этой области точному интегральному уравнению

$$\psi(r) = \sum_q \phi_q(r) \left[ \int_L \phi_q^*(r_0) \frac{\delta \psi(r_0)}{\delta n_0} dl_0 \right] (k_q^2 - k^2)^{-1}, \tag{12}$$

где функции  $\phi_q(r)$  с волновыми числами  $k_q$  – решения для невозмущенной области. Если при этом возмущение мало, то  $k \approx k_q$  для некоторого  $q$ . Интегрирование выполняется по линии  $L$  – возмущенной части границы.

В нашем случае моды  $\phi_q$  дважды вырождены, т.е.  $k_1 = k_2$ ;  $k_3 = k_4$  и т.д., поэтому решение ищется в виде  $\psi(r) = a_1 \phi_1(r) + a_2 \phi_2(r) + \delta \Psi(r)$ . Здесь  $\delta \Psi(r) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Подставив это выражение в (12), получим в первом приближении

$$\begin{aligned} & (k_1^2 - k^2) [a_1 \phi_1(r) + a_2 \phi_2(r)] \\ &= \sum_{q'=1,2} \phi_{q'}(r) \oint_{S_0} \phi_{q'}^*(r_0) \left( a_1 \frac{\delta \phi_1(r_0)}{\delta n_0} + a_2 \frac{\delta \phi_2(r_0)}{\delta n_0} \right) dl_0. \end{aligned}$$

Умножив полученное выражение на  $\phi_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) и проинтегрировав по невозмущенной области, получим с уче-

том ортогональности мод систему однородных алгебраических уравнений, решение которой существует при равенстве нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} V_{11} + k^2 - k_0^2 & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} + k^2 - k_0^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

где

$$V_{ij} = \oint \phi_i^*(r_0) \frac{\delta \phi_j(r_0)}{\delta n_0} dl_0. \tag{14}$$

Решением задачи (1) для диска единичного радиуса с однородными граничными условиями  $\phi = 0$  являются функции

$$\phi_{mn} = B_{mn} J_m(p_{mn}r) \exp(\pm im\varphi), \quad k_{mn} = p_{mn}.$$

При этом одному значению  $k_{mn}$  отвечают две ортогональные моды с показателями степени  $\pm im\varphi$ . Примем, как и в предыдущем примере,  $\int_A |\phi_{mn}|^2 dS = 1$ . Тогда  $B_{mn} = A_{mn}/2$ .

При вычислении матричных элементов (14) необходимо вести интегрирование лишь по возмущенным участкам границы, поскольку на невозмущенных участках  $\phi_j = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} V_{11} = V_{22} = & \int_{-\alpha}^{\alpha} B_{mn}^2 J_m(p_{mn}r) \left[ J_m'(p_{mn}r) p_{mn} \cos \varphi \right. \\ & \left. + \frac{im \sin \varphi J_m(p_{mn}r)}{r} \right] \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \end{aligned} \tag{15}$$

где  $J_m'(p_{mn}r) = (dJ_m(x)/dx)|_{x=p_{mn}r}$ . При интегрировании по границе следует положить  $r = \cos \alpha / \cos \varphi$ . При  $V_{12} = V_{21}^*$  в выражении (15) под знаком интеграла появится множитель  $\exp(\pm i2m\varphi)$ . Разложив  $J_m(p_{mn}r)$  в ряд возле  $r = 1$ , с точностью до третьего порядка малости по  $\alpha$  (полагая, что  $m\alpha$  произвольно, а не мало) получим из (13) конечную формулу для  $\delta$  из выражения (2):

$$\delta^{\pm} = \frac{\alpha^3}{3\pi} \pm \frac{\Delta}{2}, \tag{16}$$

где

$$\Delta = \frac{k^+ - k^-}{k_0} = \frac{1}{2\pi m^2} \left[ \alpha \cos(2m\alpha) - \frac{\sin(2m\alpha)}{2m} \right]$$

определяет расщепление волновых чисел.

В выражение (16) не входит функция Бесселя и ее производные, поскольку они могут быть исключены после интегрирования при использовании точной формулы  $J_{m-1}(p_{mn}) = J_m'(p_{mn})$ .

Аналогичные рассуждения можно провести для ТЕ моды. При этом все промежуточные выражения отличаются из-за различия граничных условий, однако после интегрирования и упрощений мы вновь получим формулу (16) с единственным отличием – в случае ТЕ невозмущенное волновое число вырожденных мод  $k_0 = \eta_{mn}/(n_m R)$ , где  $\eta_{mn}$  – значение  $n$ -го нуля производной функции Бесселя  $m$ -го порядка. При вычислении использована точная формула  $J_m''(\eta_{mn}) = (m^2/\eta_{mn}^2 - 1)J_m(\eta_{mn})$ .

С увеличением  $\alpha$  расщепление  $\Delta$  начинает осциллировать с частотой  $2m$  вокруг нуля, возрастая по амплитуде. Огибающую осцилляций легко найти:  $|\Delta|_{\max} = (2\pi)^{-1} \alpha/m^2$ . Отсюда видно, что максимальное расщепление медленно

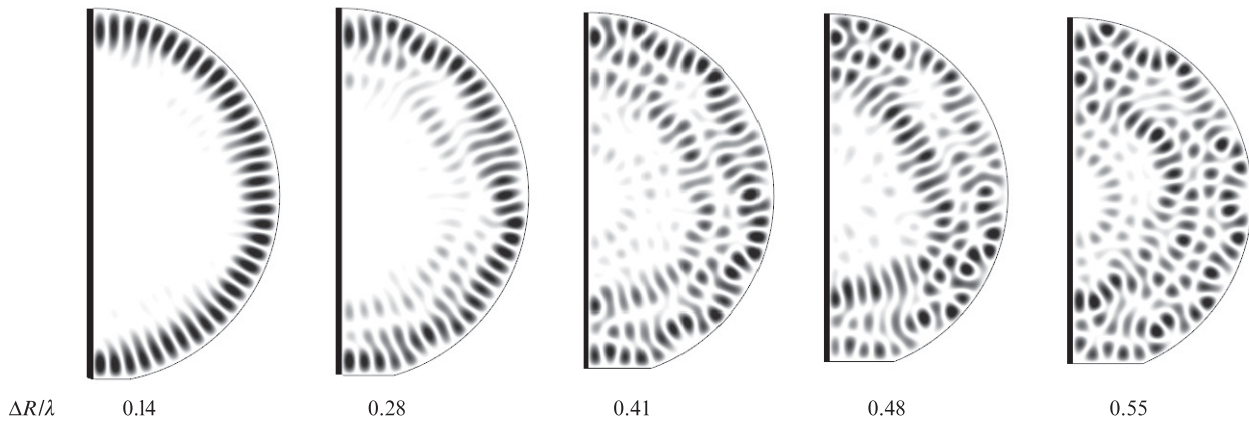


Рис.2. Полученное компьютерным расчетом распределение величины  $|E_z|$  (модуль проекции вектора электрического поля на ось  $z$ ) для ТМ моды ( $m = 37, n = 1$ ) при различных значениях дефекта  $\Delta R/\lambda$  (указаны под каждой из структур). Более темные участки соответствуют большей величине поля. Изображены только половины возмущенных дисков, жирной линией обозначена линия симметрии.

Табл.2. Неидеальный диск (обозначения те же, что и в табл.1).

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R/R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$(k_c^2 - k_f^2)/k_c^2$ (%)
0.55	0.10	$1.251 \times 10^3$	$1.253 \times 10^3$	0.2
0.67	0.12	$1.258 \times 10^4$	$1.257 \times 10^4$	0.1
0.78	0.14	$1.266 \times 10^3$	$1.264 \times 10^3$	0.2
0.83	0.15	$1.274 \times 10^3$	$1.266 \times 10^3$	0.6

Примечания: Радиус диска  $R = 1, m = 29, k_0^2 = 1.227 \times 10^3$ . Собственные числа получены для тех размеров дефектов, при которых поле моды качественно еще можно отнести к модам шепчущей галереи.

увеличивается с ростом  $\alpha$  и быстро уменьшается с ростом  $m$ , поэтому  $\Delta$  для мод шепчущей галереи ( $m \gg 1$ ) вряд ли может быть определено прямым измерением спектра, однако в некоторых случаях можно измерить расщепление, пропустив излучение через нелинейную среду и измерив разностную частоту.

Для оценки границ применимости формулы (16) применимы те же дифракционные соображения, что и в случае полудиска. Несмотря на то что в случае диска использована теория граничных возмущений, утверждение о малости изменения поля справедливо и в этом случае. Выражение для характерного размера дефекта (как и выражения для границ применимости выбранного подхода) совпадают с выражениями в случае полудиска (11).

В табл.2 сравниваются значения  $k_f$  и  $k_c$ , полученные с помощью формулы (16) и численного расчета на компьютере соответственно. Для дисковой формы резонатора характерно очень сильное искажение поля моды при небольших дефектах. При этом формула (16) дает хорошее приближение для собственных чисел даже для сильно искаженных полей, хотя само понятие моды шепчущей галереи к таким модам может оказаться неприменимо. На рис.2 показано, насколько сильно изменяется поле при малых (по сравнению с длиной волны) деформациях.

## 5. Заключение

Проведен расчет спектров WGM для резонаторов полудисковой (9) и дисковой (16) форм, возмущенных специ-

альным образом. Формулы получены в первом приближении.

Для полудиска изменение  $k_f$  линейно зависит от величины возмущения, а само возмущение может быть больше длины волны. Поле, как показывает компьютерный расчет, тоже устойчиво к возмущению и остается распределенным вдоль стенок. Поэтому WGM высокого порядка устойчивы к указанному возмущению.

Для резонатора дисковой формы спектр зависит от линейных размеров возмущения слабее. Однако поле WGM такого резонатора гораздо сильнее зависит от рассмотренных возмущений. Если возмущение больше половины длины волны, то поле моды оказывается сильно искажено и перераспределяется по объему резонатора. Кроме того, сколь угодно слабое возмущение границы снимает вырождение мод, поэтому бегущие волны, существующие в идеальном диске, переходят в две близкие по спектру стоячие волны, и экспериментально наблюдать бегущие волны трудно.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №11-02-00348, программой Президента РАН №24 и программой фундаментальных исследований ОФН РАН III-7.

1. Frateschi N.C., Levi A.F.J. *Appl. Phys. Lett.*, **66**, 2932 (1995).
2. Wang R.P., Dumitrescu M. *J. Appl. Phys.*, **81**, 3391 (1997).
3. Murugan G.S., Panitchob Y., Tull E.J., Bartlett P.N., Howak D.W., Zervas M.N., Wilkinson J.S. *J. Appl. Phys.*, **107**, 053105 (2010).
4. Monakhov A.M., Sherstnev V.V., Astakhova A.P., Yakovlev Yu.P., Boissier G., Teissier R., Baranov A.N. *Appl. Phys. Lett.*, **94** (5), 051102 (2009).
5. Savchenkov A., Strekalov D., Ilchenko V., Maleki L., Grudinin I., Matsko A. *Opt. Commun.*, **265**, 33 (2006).
6. Gayral B., Gerard J.M., Lemaître A., et al. *Appl. Phys. Lett.*, **75**, 1908 (1999).
7. Zeglache H., Mandel P., Abraham N.B., et al. *Phys. Rev. A*, **37**, 470 (1988).
8. Ding L., Baker C., Senellart P., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **105** (26), 263903 (2010).
9. Аверкиев Н.С., Шерстнев В.В., Монахов А.М., Гребенщикова Е.А., Кислякова А.Ю., Яковлев Ю.П., Кривер А., Райт Д.А. *Физика низких температур*, **33**, 378 (2007).
10. Федоров Н.Н. *Основы электродинамики* (М.: Высшая школа, 1980, с. 120).
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики*. Т.2 (М.: ИИЛ, 1959, с. 887).