

# Модуляционная неустойчивость в зигзагообразной цепочке нелинейных волноводов с чередующимися положительным и отрицательным показателями преломления\*

А.А.Довгий

*Аналитически исследована модуляционная неустойчивость в зигзагообразной цепочке туннельно-связанных оптических волноводов с чередующимися значениями показателя преломления и с керровской нелинейностью. Найдены частные решения системы связанных нелинейных уравнений, описывающие распространение однородных вдоль волноводов электромагнитных волн, и исследована их неустойчивость. Показано, что коэффициент связи между волноводами, не являющимися ближайшими соседями, оказывает существенное влияние на неустойчивость найденных волн. При превышении коэффициентом связи определенного порогового значения модуляционная неустойчивость исчезает, независимо от мощности излучения. Исследовано влияние отношения амплитуд волн в соседних волноводах на неустойчивость полученных частных решений. Рассмотрены различные варианты нелинейного отклика в волноводах. Проведенные исследования представляют новый необычный тип модуляционной неустойчивости в нелинейных периодических системах.*

**Ключевые слова:** модуляционная неустойчивость, туннельно-связанные волноводы, оптическая решетка, дискретная дифракция, отрицательное преломление, прямые и обратные волны, вектор обратной решетки, инкремент неустойчивости.

## 1. Введение

Последние 30–40 лет отмечены интенсивными теоретическими и экспериментальными исследованиями нелинейных дискретных систем (см. [1], а также ссылки в ней). Такие структуры встречаются во многих материальных системах и представляют несомненный научный интерес. Так, при изучении распространения волн в нелинейных дискретных структурах появляются новые виды солитонов, которые не наблюдаются в непрерывных системах. Принципиальной особенностью дискретных систем является то, что их линейные свойства сильно отличаются от последних в непрерывных системах, и, как следствие, нелинейный отклик демонстрирует новые эффекты, которые не имеют аналогов в непрерывных системах.

Одним из важных эффектов нелинейной динамики является модуляционная неустойчивость (МН), которая возникает во многих материальных системах [2–16]. МН предшествует распаду пространственно однородной волны на отдельные волновые пакеты при больших интенсивностях. Распространяющаяся волна становится неустойчивой по отношению к амплитудным и фазовым модуляциям, величины которых начинают расти экспоненциально. Часто такой процесс разрушения волны приводит к формированию цепочки солитонов с промежутками между ними, обратно пропорциональными пространственной частоте, соответствующей максимуму инкре-

мента неустойчивости. Поэтому МН известна в физике как предвестник образования солитонов [17, 18].

Интересной и плодотворной областью исследований, которая рассматривает новые примеры дискретных систем, является дискретная оптика связанных волноводов [19]. Расположенные друг относительно друга на расстоянии порядка длины волны излучения оптические волноводы могут быть связанными за счет туннельного проникновения света из одного волновода в другой [20]. Системы из большого числа туннельно-связанных волноводов образуют оптическую решетку. Дискретные оптические системы можно рассматривать как одномерный фотонный кристалл [21], и такие структуры способны обеспечивать полное отражение излучения в заданном частотном диапазоне для любых направлений поляризации и углов падения [22, 23], поэтому они могут быть использованы в качестве частотного фильтра электромагнитного излучения. Отражение излучения в определенном диапазоне частот объясняется наличием щели в энергетическом спектре. Нелинейное взаимодействие в нелинейных дискретных системах может также привести к МН [24, 25].

В периодических средах разные типы дискретизации могут оказывать неодинаковое влияние на МН и приводить к различным условиям возникновения локализованных мод (т. н. дискретных солитонов) [26, 27]. В частности, большое внимание уделено экспериментальному и аналитическому исследованию линейных и нелинейных свойств цепочек из одинаковых волноводов [28–34]. В работе [35] рассмотрена такая система связанных волноводов с самофокусирующей керровской нелинейностью. Исследован процесс МН и показано, что в зависимости от значения вектора обратной решетки в рассматриваемой системе имеют место два различных сценария эволюции модуляционно неустойчивых уединенных волн. В работах [36, 37] авторы исследовали систему двух связанных волноводов – положительно преломляющего (ПП) и «отрицательно» преломляющего (ОП), получившую название

\* Доложена на III Международной конференции по фотонике и инфракрасной оптике, Россия, Москва, январь 2014 г.

А.А.Довгий. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: dovgiyalexandr@gmail.com

Поступила в редакцию 2 апреля 2014 г., после доработки – 28 апреля 2014 г.

антинаправленного ответвителя (АНО). Такая система позволяет изучать взаимодействие прямых и обратных волн, причем в ней возможно образование нелинейной стационарной уединенной волны, которая распространяется в обоих волноводах как единое целое. В работе [38] показано, что такая пара волноводов обладает свойством бистабильности, которое выражается в неоднозначной зависимости мощности выходного импульса от мощности входного импульса. В работе [39] рассмотрен линейный усилитель на основе АНО, определен коэффициент усиления и найдено, что возможна компенсация потерь в ОП волноводе; там же исследована эволюция непрерывных волн в диссипативном АНО с нелинейным ПП волноводом. В работе [40] показано, что эффект МН в АНО с керровской нелинейностью имеет место только при определенных отношениях амплитуд прямой и обратной волн в волноводах и коэффициентах нелинейности. МН возникает только в ограниченном диапазоне мощности в волноводах, если нелинейность ОП волновода дефокусирующая, а нелинейность ПП волновода фокусирующая. С увеличением мощности МН подавляется, а в случае обычного направленного ответвителя усиливается. Это необычное свойство эффекта МН является следствием взаимодействия прямой и обратной волн, поскольку в обычном направленном ответвителе взаимодействующие волны прямые, и ничего подобного не наблюдается. В работе [41] исследовано влияние насыщающейся нелинейности на МН в АНО. Авторы [42, 43] изучили цепочку связанных волноводов, в которой ПП и ОП волноводы чередуются, и показали, что в спектре линейных волн, распространяющихся в такой системе, есть запрещенная зона. В работе [44] установлено существование новых дискретных щелевых солитонов в такой системе связанных волноводов и исследованы их свойства. Кроме того, в системе возможно образование нелинейной стационарной уединенной волны, которая распространяется по всей цепочке связанных волноводов как единое целое [45].

Теоретические модели, описывающие эволюцию волн во всех рассмотренных выше вариантах цепочек туннельно-связанных волноводов, учитывают только взаимодействие ближайших соседей. Электромагнитное поле сильно локализовано в каналах цепочки, и взаимодействие с остальными волноводами оказывается несущественным. В работе [46] предложена зигзагообразная конфигурация цепочки связанных волноводов, в которой взаимодействие с волноводами, не являющимися ближайшими соседями, может быть столь же существенным, как и взаимодействие ближайших соседей. Это приводит к возникновению новых видов дискретных солитонов. В работе [47] рассмотрена модификация зигзагообразной цепочки, в которой волноводы с четными номерами являются ПП, а с нечетными – ОП. Показано, что в спектре линейных волн есть запрещенная зона. Описано распространение нелинейной стационарной уединенной волны и взаимодействие между такими волнами, которые в зависимости от коэффициентов связи могут вести себя либо как щелевые солитоны, либо как неустойчивые уединенные волны.

В настоящей работе аналитически исследована неустойчивость однородных вдоль волноводов электромагнитных волн, распространяющихся в зигзагообразной цепочке связанных волноводов с чередующимися положительным и отрицательным показателями преломления (рис. 1) при наличии керровской нелинейности в волноводах. Исследование инкремента МН, аналитическое выражение

которого находится с помощью метода линейного анализа, выполнено численно. Показано, что величина инкремента МН существенно зависит от параметров рассматриваемой системы: коэффициента связи с волноводами, следующими за ближайшими соседями, параметров нелинейности, отношения амплитуд прямой и обратной волн в соседних волноводах. Обнаружено, что МН существенно уменьшается при увеличении силы взаимодействия с несоседними волноводами независимо от мощности поля в волноводах, что является новым для нелинейных периодических структур, поскольку обычно МН только усиливается с увеличением амплитуды волны в подобных системах [48–50].

## 2. Теоретическая модель

Система уравнений, описывающая эволюцию оптических волн в рассматриваемой зигзагообразной цепочке связанных волноводов (рис. 1), в нормированных переменных имеет следующий вид [47]:

$$i(\partial_\zeta + \partial_\tau) a_n + K_1(b_{n-1} + b_n) + K_2(a_{n-1} + a_{n+1}) + r_1 |a_n|^2 a_n = 0, \quad (1.1)$$

$$i(-\partial_\zeta + \partial_\tau) b_n + K_1(a_n + a_{n+1}) + K_3(b_{n-1} + b_{n+1}) + r_2 |b_n|^2 b_n = 0, \quad (1.2)$$

где  $a_n$  ( $b_n$ ) – нормированная огибающая электрического поля квазигармонической волны в ПП (ОП) волноводе с номером  $n$ ;  $r_1$ ,  $r_2$  – параметры нелинейности в ПП и ОП волноводах соответственно;  $K_1$  ( $K_1 > 0$ ) – коэффициент связи между ПП и ОП волноводами;  $K_2$  ( $K_2 > 0$ ) – коэффициент связи между ПП волноводами;  $K_3$  ( $K_3 > 0$ ) – коэффициент связи между ОП волноводами. Эффектами диссипации и дисперсией групповых скоростей второго порядка здесь пренебрегается.

Коэффициент  $K_1$  отвечает за взаимодействие ближайших соседей, а коэффициенты  $K_2$  и  $K_3$  – за взаимодействие с волноводами, следующими за ближайшими соседями. Подробности вывода уравнений (1) можно найти в работах [42, 51]. Следует отметить, что в уравнениях (1) коэффициенты связи  $K_2$  и  $K_3$  могут принимать произвольные значения, но для простоты примем  $K_2 = K_3$ .

В уравнении (1.2) перед пространственной производной  $\partial_\zeta$  стоит знак минус, в отличие от уравнения (1.1). Это связано с тем, что в ОП волноводе распространяется обратная волна, у которой векторы фазовой и групповой скоростей противоположно направлены, а в ПП волноводе распространяются обычные прямые волны.

Уравнения (1.1) и (1.2) описывают распространение оптических волн в отсутствие потерь, но метаматериалы с ОП, как правило, обладают достаточно большими потерями. Однако в работе [52] продемонстрирована воз-

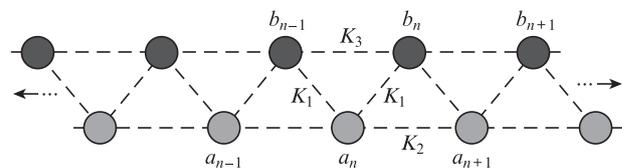


Рис. 1. Зигзагообразная цепочка связанных волноводов (поперечное сечение). Светлые кружки – ПП волноводы, темные – ОП волноводы (см. [45]).

возможность получения метаматериала с ОП, в котором оптические волны распространяются без потерь. Это оставляет большую надежду, что в скором будущем станет возможным изготовление прозрачных материалов с ОП.

### 3. Однородные волны. Дисперсионное соотношение

Рассмотрим самое простое решение уравнений (1), которое описывает распространение плоских волн в данной системе связанных волноводов:

$$a_n = a \exp(i\kappa z + iqn - i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad (2.1)$$

$$b_n = b \exp(i\kappa z + iqn - i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad (2.2)$$

где  $\kappa$  – постоянная распространения волны;  $a^2 + b^2 = P$  – полная мощность излучения в паре ПП и ОП волноводов;  $q$  – волновой вектор обратной решетки;  $\omega$  – отклонение от частоты  $\omega_0$  несущей волны квазигармонического волнового пакета. В работе [47] найден спектр линейных волн (2) системы (1) при  $r_1 = r_2 = 0$ :

$$\omega^{(+),(-)} = -(K_2 + K_3) \cos q \pm \sqrt{[\kappa - (K_2 - K_3) \cos q]^2 + 4K_1^2 \cos^2(q/2)},$$

в котором есть запрещенная зона (рис.2). Излучение с частотами, находящимися в области запрещенной зоны, не может распространяться в рассматриваемой цепочке волноводов и поэтому отражается от нее. В связи с этим данная цепочка волноводов действует подобно распределенному зеркалу Брэгга. Однако при значениях вектора обратной решетки  $q = \pi \pm 2\pi n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) спектр бесщелевой (рис.2). Эти точки отвечают резонансу Брэгга в одномерной решетке. Следует отметить, что взаимодействие с волноводами, следующими за соседними, оказывает влияние на спектр распространяющихся плоских волн. Исходя из рис.2, можно сделать вывод, что при увеличении коэффициентов связи  $K_2$  и  $K_3$  ветви спектра, соответствующие  $q = 0$ , «сползают» вниз, ветви спектра с  $q = \pi/2$  остаются неподвижными, а ветви спектра с  $q = \pi$  поднимаются вверх, что приводит к сокращению щели. Таким образом, усиление связи между несоседними волноводами может привести к вырождению запрещенной зоны в спектре распространяющихся плоских волн, и он может стать бесщелевым.

При увеличении мощности поля в волноводах нелинейные эффекты начинают оказывать существенное влияние, и спектр плоских волн искажается. Подставив решения (2) в систему нелинейных уравнений (1), можно получить следующее нелинейное дисперсионное соотношение:

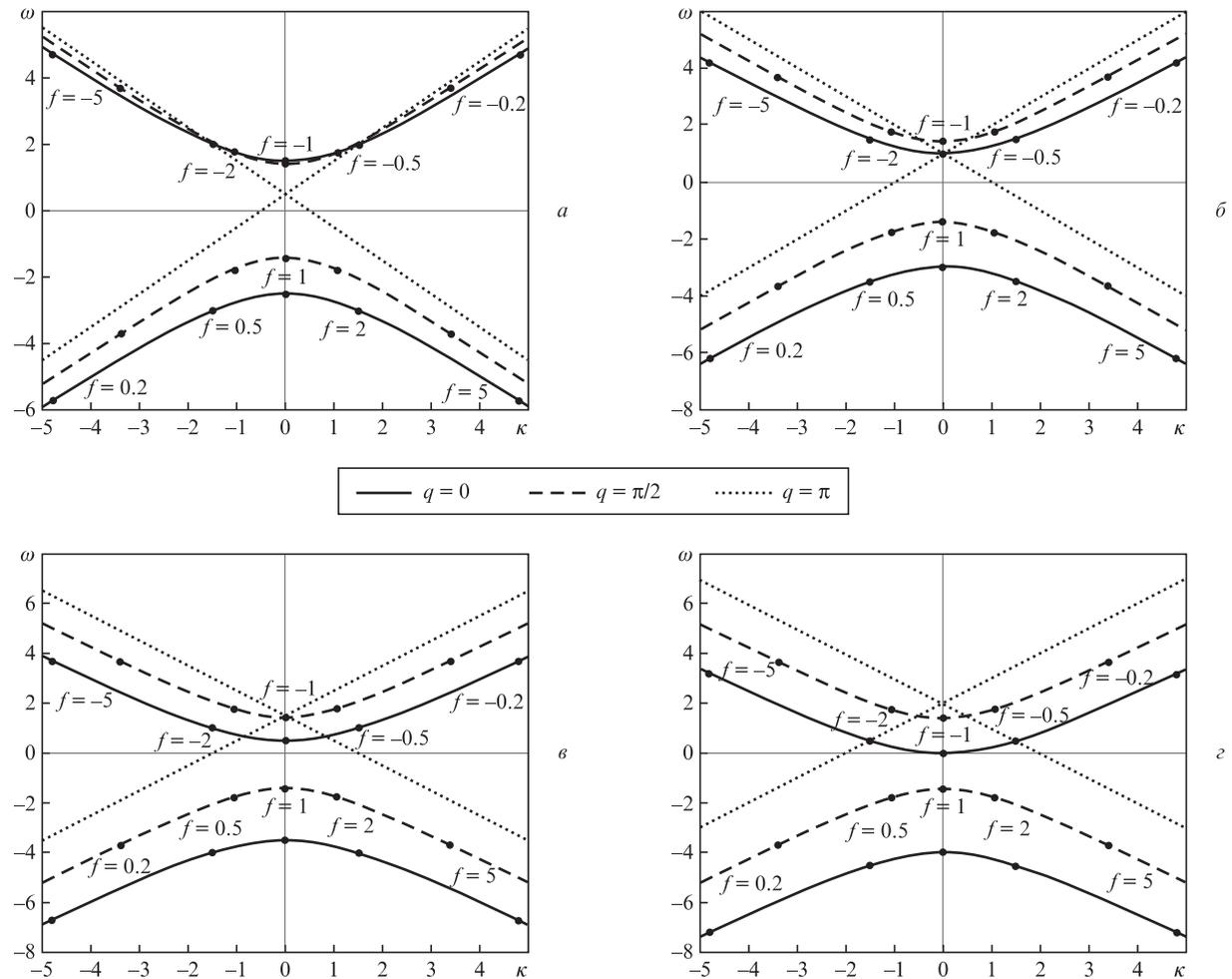


Рис.2. Дисперсионные соотношения распространяющихся однородных волн в рассматриваемой системе волноводов при фиксированных  $q$  и различных  $K_2, K_3$  ( $K_1 = 1$ ). Точки соответствуют  $r_1 = r_2 = 0.1, P = 0.1$  при  $K_2 = K_3 = 0.25$  (а),  $K_2 = K_3 = 0.5$  (б),  $K_2 = K_3 = 0.75$  (в) и  $K_2 = K_3 = 1$  (г).

$$\omega = -K_1 \frac{1+f^2}{f} \cos \frac{q}{2} - (K_2 + K_3) \cos q - \frac{P}{2(1+f^2)} (r_1 + r_2 f^2),$$

$$\kappa = -K_1 \frac{1-f^2}{f} \cos \frac{q}{2} + (K_2 - K_3) \cos q + \frac{P}{2(1+f^2)} (r_1 - r_2 f^2),$$

где параметр  $f = b/a$  (отношение амплитуды обратной волны в ОП волноводе к амплитуде прямой волны в ПП волноводе) описывает, как эта мощность распределена между ПП и ОП волноводами. На рис.2 показано, что линейный и нелинейный спектры совпадают с хорошей точностью при малых величинах мощности излучения в волноводах. Значение  $f = 1$  соответствует дну, а  $f = -1$  – полтолку запрещенной зоны. Положительные значения  $f$  лежат на нижних, а отрицательные  $f$  – на верхних ветвях спектра (рис.2). Для того чтобы ощутить более общее значение параметра  $f$ , рассмотрим групповую скорость  $v_{gr} = d\omega/d\kappa$ :

$$v_{gr} = \frac{1-f^2}{1+f^2}.$$

Значения  $\pm f$  отвечают одной и той же групповой скорости, но находятся на разных ветвях спектра, тогда как значения  $f$  и  $f^{-1}$  отвечают противоположным групповым скоростям и находятся на одной ветви спектра (рис.2). Случай  $|f| < 1$  отвечает прямому распространению волн в системе, а  $|f| > 1$  – обратному. При  $|f| = 1$ , что соответствует границам запрещенной зоны в спектре, групповая скорость равна нулю. В этом случае энергия не переносится ни в прямом, ни в обратном направлении.

#### 4. Анализ устойчивости плоских волн

Процедура исследования устойчивости полученных решений (2), описывающих распространение однородных вдоль волноводов волн в рассматриваемой зигзагообразной цепочке, является известным методом линейного анализа [18]. Введем возмущения в амплитуды полученных решений (2) следующим образом:

$$a_n = (a + \tilde{a}_n) \exp(ik\zeta + iqn - i\omega\tau), \quad (4.1)$$

$$b_n = (b + \tilde{b}_n) \exp(ik\zeta + iqn - i\omega\tau), \quad (4.2)$$

где  $\tilde{a}_n$  и  $\tilde{b}_n$  – малые величины ( $|\tilde{a}_n| \ll a$ ,  $|\tilde{b}_n| \ll b$ ). Подставив (4) в систему нелинейных уравнений (1) и линеаризовав ее относительно малых возмущений, несложно получить следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$i(\partial_\zeta + \partial_\tau)\tilde{a}_n - f\mu_1\tilde{a}_n + K_1(\tilde{b}_{n-1} + \tilde{b}_n) - \mu_2\tilde{a}_n + K_2(\tilde{a}_{n-1} + \tilde{a}_{n+1}) + \rho_1(\tilde{a}_n + \tilde{a}_n^*) = 0, \quad (5)$$

$$i(-\partial_\zeta + \partial_\tau)\tilde{b}_n - (\mu_1/f)\tilde{b}_n + K_1(\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n+1}) - \mu_3\tilde{b}_n + K_3(\tilde{b}_{n-1} + \tilde{b}_{n+1}) + \rho_2(\tilde{b}_n + \tilde{b}_n^*) = 0,$$

где  $\mu_1 = 2K_1 \cos(q/2)$ ;  $\mu_2 = 2K_2 \cos q$ ;  $\mu_3 = 2K_3 \cos q$ ;  $\rho_1 = r_1 P/(1+f^2)$ ;  $\rho_2 = r_2 P f^2/(1+f^2)$ .

Решения системы уравнений (5) будем искать в виде

$$\tilde{a}_n = c_1 \exp(ik\zeta + iQn - iv\tau) + d_1 \exp(-ik\zeta - iQn + iv\tau), \quad (6.1)$$

$$\tilde{b}_n = c_2 \exp(ik\zeta + iQn - iv\tau) + d_2 \exp(-ik\zeta - iQn + iv\tau), \quad (6.2)$$

что представляет собой более общий случай распространяющихся плоских волн, чем решение (2). Здесь константы  $c_i$  и  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) – действительные величины,  $k$  – постоянная распространения,  $Q$  – волновой вектор обратной решетки, а  $v$  – частота малых возмущений. Подстановка (6) в уравнения (5) приводит к системе четырех линейных однородных алгебраических уравнений первого порядка относительно четырех неизвестных

$$\begin{pmatrix} L_1 & M_1 & \rho_1 & 0 \\ M_1 & L_2 & 0 & \rho_2 \\ \rho_1 & 0 & L_3 & M_1 \\ 0 & \rho_2 & M_1 & L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$L_1 = v - k - \mu_1 f - \mu_2 + M_2 + \rho_1,$$

$$L_2 = v + k - \mu_1/f - \mu_3 + M_3 + \rho_2,$$

$$L_3 = -v + k - \mu_1 f - \mu_2 + M_2 + \rho_1,$$

$$L_4 = -v - k - \mu_1/f - \mu_3 + M_3 + \rho_2,$$

где  $M_1 = 2K_1 \cos(Q/2)$ ,  $M_2 = 2K_2 \cos Q$ ,  $M_3 = 2K_3 \cos Q$ . Полученная система алгебраических уравнений (7) имеет нетривиальное решение, когда ее детерминант равен нулю. Отсюда следует алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно частоты малых возмущений  $v$ , которое определяет дисперсионное соотношение для волн, порожденных малыми возмущениями:

$$v^4 - Av^2 + Bv + C = 0, \quad (8)$$

где

$$A = 2k^2 + 2M_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - 2r_1 \frac{P}{1+f^2} N_2 - 2r_2 \frac{P f^2}{1+f^2} N_3;$$

$$B = 2k \left( N_3^2 - N_2^2 + 2r_1 \frac{P}{1+f^2} N_2 - 2r_2 \frac{P f^2}{1+f^2} N_3 \right);$$

$$C = k^4 + \left( 2M_1 - N_2^2 - N_3^2 + 2r_1 \frac{P}{1+f^2} N_2 + 2r_2 \frac{P f^2}{1+f^2} N_3 \right) k^2$$

$$+ (M_1^2 - N_2 N_3) \left[ (M_1^2 - N_2 N_3) - 4r_1 r_2 \left( \frac{P f}{1+f^2} \right)^2 \right]$$

$$+ 2r_2 \frac{P f^2}{1+f^2} N_2 + 2r_1 \frac{P}{1+f^2} N_3 \Big];$$

$$N_2 = \mu_1 f + \mu_2 - M_2; \quad N_3 = \mu_1/f + \mu_3 - M_3.$$

Матрица системы (7) называется матрицей устойчивости, которая используется для исследования устойчивости полученных решений (2) рассматриваемых уравнений (1). МН возникает в случае, когда хотя бы одно соб-

ственное значение матрицы устойчивости имеет ненулевую мнимую часть, что приводит к экспоненциальному росту амплитуды распространяющихся плоских волн (2), подвергающихся воздействию малых возмущений (4). Таким образом, необходимо найти корни уравнения (8), которое является алгебраическим уравнением четвертого порядка и, согласно основной теореме алгебры, имеет четыре корня. Корни уравнения (8), выраженные в радикалах, определяются с помощью метода Феррари и имеют вид

$$v_{1,2} = \frac{\sqrt{A+2s}}{2} \pm \sqrt{\frac{A-2s}{4} - \frac{B}{2\sqrt{A+2s}}},$$

$$v_{3,4} = -\frac{\sqrt{A+2s}}{2} \pm \sqrt{\frac{A-2s}{4} + \frac{B}{2\sqrt{A+2s}}},$$

где  $s$  – кубическая резольвента уравнения (8), выраженная в радикалах с помощью формулы Кардано:

$$s = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{3}\right)^3}} - \frac{A}{6}$$

(здесь  $d = A^2/12 + C$ ,  $g = A^3/108 - AC/3 - B^2/8$ ).

Теперь можно исследовать неустойчивость решений (2), анализируя инкремент МН, который находится согласно известной процедуре [49] как

$$G = |\text{Im}(v)_{\max}|, \tag{9}$$

где  $\text{Im}(v)_{\max}$  – мнимая часть того корня  $v_i$  уравнения (8), у которого она максимальна. Если инкремент (9) принимает отличные от нуля значения, то решения (2) являются неустойчивыми.

### 5. Инкремент модуляционной неустойчивости

Исследование инкремента МН (9) проводится методом компьютерного моделирования, поскольку получить для него явное аналитическое выражение весьма затруднительно, т. к. корни уравнения (8) выражены в радикалах с

помощью формул Кардано. Рассматриваются различные варианты нелинейного отклика в волноводах данной системы: 1) все волноводы нелинейные, фокусирующие или дефокусирующие ( $r_1 = r_2 > 0$  или  $r_1 = r_2 < 0$ ); 2) одни волноводы фокусирующие, а другие – дефокусирующие ( $r_1 = -r_2 \neq 0$ ); 3) одни волноводы линейные, а другие – нелинейные ( $r_1 = 0, r_2 \neq 0$  или  $r_2 = 0, r_1 \neq 0$ ). Исследуется влияние коэффициента взаимодействия с волноводами, расположенными за ближайшими соседями, параметра  $f$  и мощности  $P$  на величину инкремента МН.

Следует отметить, что существуют частные случаи, когда можно получить явное аналитическое выражение инкремента МН. Например, когда  $r_1 = r_2, K_2 = K_3$  и  $|f| = 1$ . В этом случае выражение для инкремента МН (9) принимает следующий вид:

$$G = [\sqrt{(k^2 + M_1^2)(2N_2 - r_1P)^2 - k^2r_1^2P^2} - (k^2 + M_1^2 + N_2^2 - r_1PN_2)]^{1/2}. \tag{10}$$

На рис.3 показано влияние мощности  $P$  на величину инкремента МН (10) для данного частного случая при векторе обратной решетки плоских волн  $q = \pi$ , когда спектр бесщелевой (рис.2). Можно сделать вывод, что в данном случае при увеличении мощности поля в волноводах решения (2) становятся неустойчивыми. Влияние мощности на устойчивость полученных решений (2) имеет пороговый характер (рис.3,б). При превышении пороговой мощности решения (2) становятся полностью неустойчивыми (рис.3,в,з). Этот же случай исследован на рис.4, но для  $q = \pi/2$ , когда в спектре плоских волн есть щель. Так же, как и при  $q = \pi$ , влияние мощности на устойчивость решений (2) с  $q = \pi/2$  имеет пороговый характер, но наличие щели в спектре приводит к повышению порогового значения мощности, что легко увидеть, сравнив рис.3 и 4.

#### 5.1. Влияние коэффициента связи $K_2$ на инкремент МН

Как уже отмечалось, в рассматриваемой зигзагообразной цепочке связанных волноводов взаимодействие

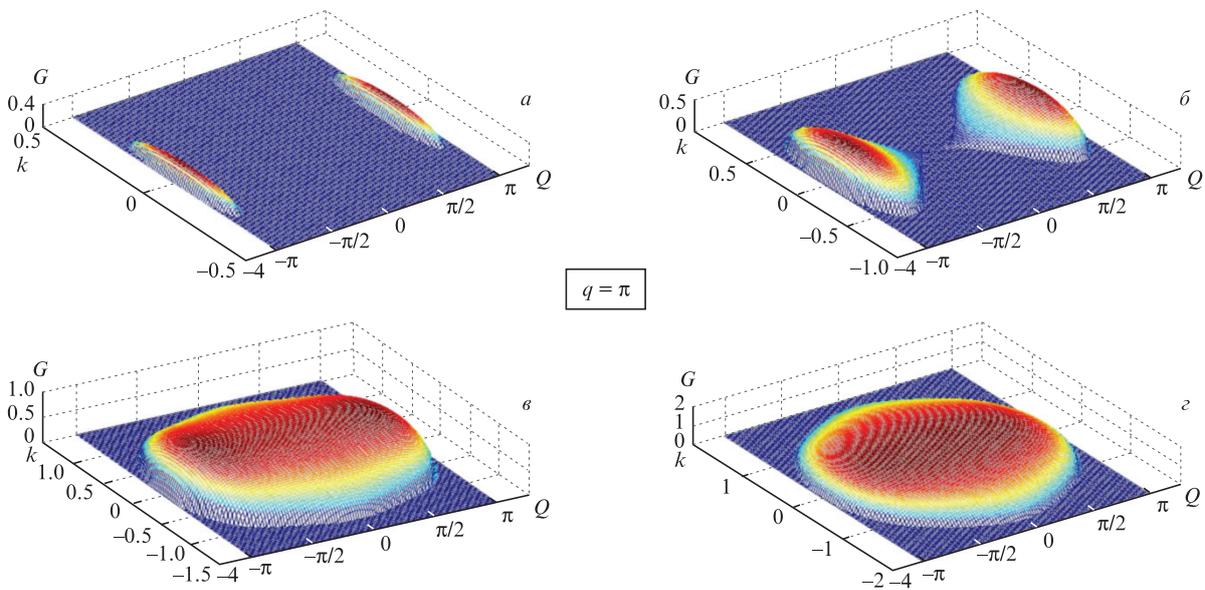


Рис.3. Зависимости инкремента МН  $G$  от вектора обратной решетки  $Q$  и постоянной распространения  $k$  малых возмущений при  $P = 5$  (а), 10 (б) 15 (в) и 20 (з) ( $K_1 = 1, K_2 = K_3 = 0.25, r_1 = r_2 = 0.1, f = 1, q = \pi$ ).

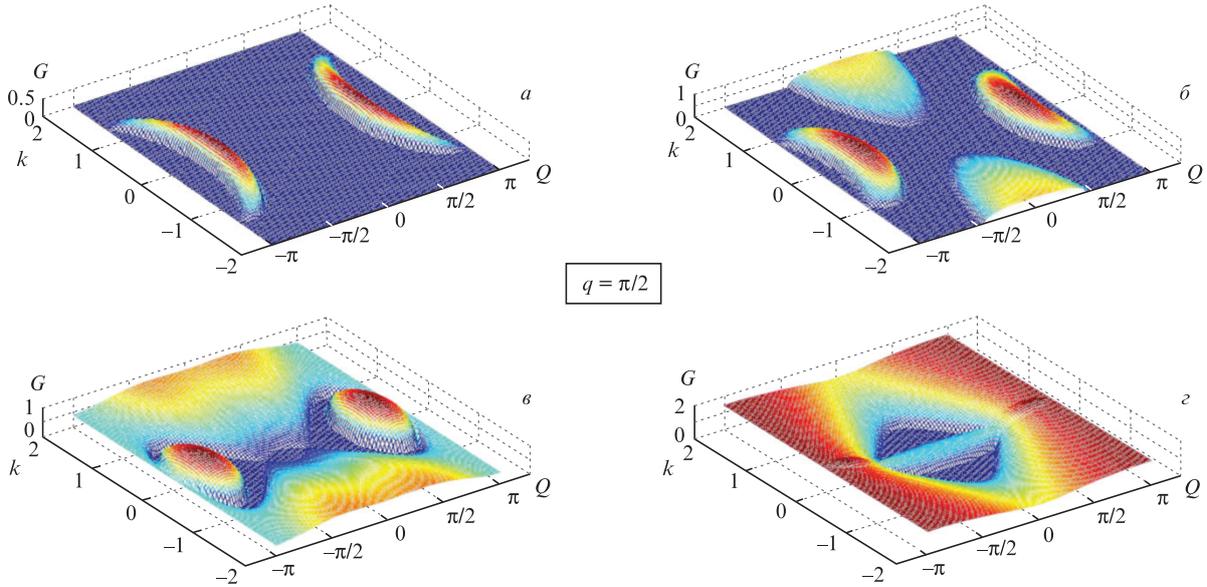


Рис.4. Зависимости инкремента МН  $G$  от вектора обратной решетки  $Q$  и постоянной распространения  $k$  малых возмущений при  $P = 10$  (а), 15 (б), 20 (в) и 30 (г) ( $K_1 = 1, K_2 = K_3 = 0.25, r_1 = r_2 = 0.1, f = 1, q = \pi/2$ ).

с несоседними волноводами может быть таким же существенным, как и с соседними (отметим, что в обычных цепочках связанных волноводов существенным является только взаимодействие ближайших соседей). Поэтому интересно исследовать влияние этого дополнительного взаимодействия на неустойчивость распространяющихся плоских волн в рассматриваемой зигзагообразной цепочке и сравнить с МН в обычных цепочках связанных волноводов или в брэгговских решетках. Обычно плоские волны неустойчивы в нелинейных брэгговских решетках, и с увеличением амплитуды волн неустойчивость только усиливается [48–50].

На рис.5 показано влияние коэффициента связи  $K_2$  на величину инкремента МН (10) при  $q = \pi$ , когда спектр бесцелевой. Взаимодействие с волноводами, следующими за ближайшими соседями, существенно влияет на неустой-

чивость плоских волн. При увеличении  $K_2$  неустойчивость плоских волн (рис.5,а–в) существенно уменьшается, и появляется достаточно большая область устойчивости, которая не изменяется при увеличении мощности поля (рис.5,г). Таким образом, можно сделать вывод, что влияние коэффициента связи  $K_2$  на неустойчивость плоских волн имеет пороговый характер. Для нахождения порогового значения  $K_2$  исследуем выражение для инкремента МН (10) при произвольном  $q$ . Для простоты рассмотрим выражение (10) при  $k = 0$ :

$$G = [(r_1 P/2)^2 - (|r_1 P/2 - N_2| - 2K_1 |\cos(Q/2)|)^2]^{1/2},$$

где  $N_2 = 2K_1 \cos(q/2) + 2K_2 \cos q - 2K_2 \cos Q$ . Отсюда следует, что неустойчивость исчезает независимо от величины  $P$ , если выполнено неравенство

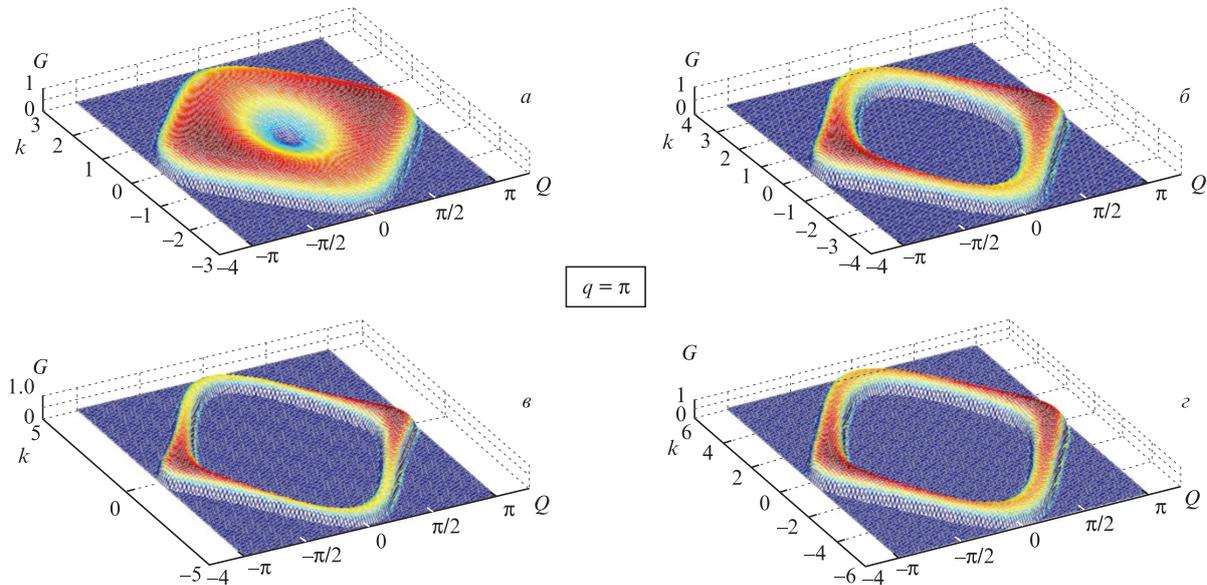


Рис.5. Зависимости инкремента МН  $G$  от вектора обратной решетки  $Q$  и постоянной распространения  $k$  малых возмущений при  $P = 20, K_2 = K_3 = 0.5$  (а),  $P = 20, K_2 = K_3 = 0.75$  (б),  $P = 20, K_2 = K_3 = 1$  (в) и  $P = 40, K_2 = K_3 = 1$  (г) ( $K_1 = 1, r_1 = r_2 = 0.1, f = 1, q = \pi$ ).

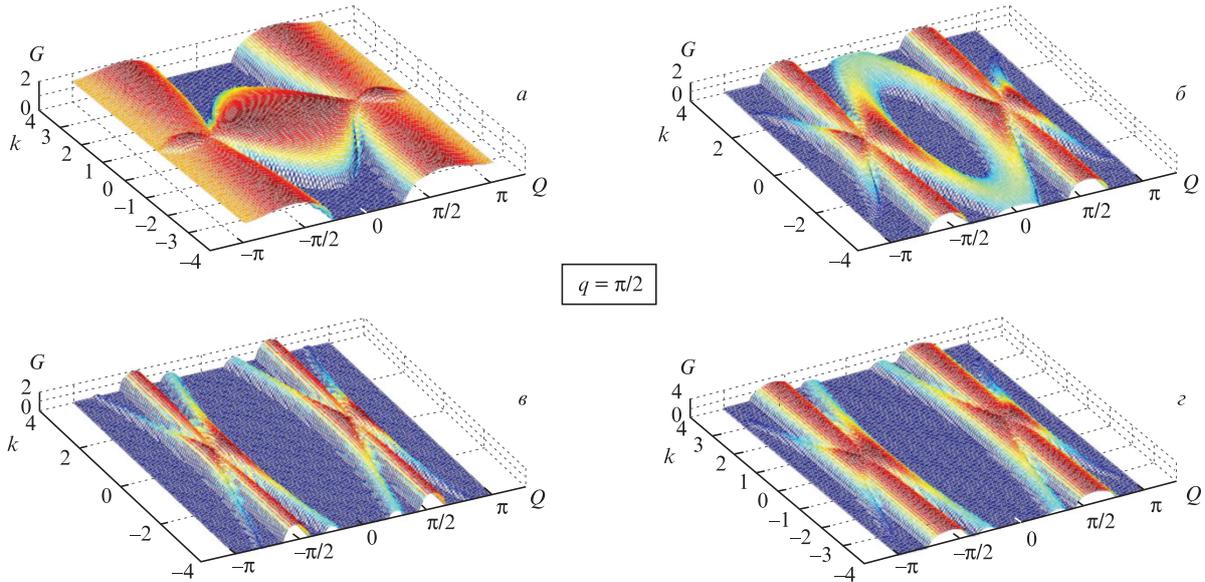


Рис.6. Зависимости инкремента МН  $G$  от вектора обратной решетки  $Q$  и постоянной распространения  $k$  малых возмущений при  $P = 40$ ,  $K_2 = K_3 = 1$  (а),  $P = 40$ ,  $K_2 = K_3 = 2$  (б),  $P = 40$ ,  $K_2 = K_3 = 3$  (в) и  $P = 60$ ,  $K_2 = K_3 = 3$  (з) ( $K_1 = 1$ ,  $r_1 = r_2 = 0.1$ ,  $f = 1$ ,  $q = \pi/2$ ).

$$|\cos(Q/2)| \geq K_1/2K_2 + \cos(q/2). \quad (11)$$

Волновой вектор обратной решетки малых возмущений  $Q$  является действительной величиной, и, следовательно, абсолютная величина косинуса не может быть больше единицы, поэтому последнее неравенство выполняется, только когда  $K_2 \geq K_1/4 \sin^2(q/4)$  и  $q \neq 0$ . Как следствие, для пороговой величины коэффициента связи  $K_2$  имеем

$$K_2^{\text{th}} = K_1/4 \sin^2(q/4). \quad (12)$$

При  $q = 0$  неравенство (11) не выполняется ни для каких  $Q$ , и неустойчивость сохраняется независимо от величины  $K_2$ . Минимальное пороговое значение  $K_2^{\text{th}}$  достигается при  $q = \pi$ :  $K_2^{\text{th}}(\pi) = K_1/2$ ; при этом значении только  $Q = 0$  удовлетворяет неравенству (11), поэтому неустойчивость пропадает лишь в центре зоны Бриллюэна (рис.5,а). При превышении порогового значения область устойчивости увеличивается (рис.5,б–з). Из неравенства (11) легко найти границы области устойчивости:

$$\begin{aligned} -2 \arccos[K_1/2K_2 + \cos(q/2)] &\leq Q \\ &\leq 2 \arccos[K_1/2K_2 + \cos(q/2)]. \end{aligned} \quad (13)$$

При  $K_2 < K_1/4 \sin^2(q/4)$  устойчивость плоских волн не наблюдается, а пороговая мощность, при которой решения (2) становятся в этом случае полностью неустойчивыми, определяется выражением

$$P^{\text{th}}(q) = 4 \frac{K_1 \cos^2(q/4) - K_2 \sin^2(q/2)}{r_1}$$

(см. рис.3,б). Минимальная пороговая мощность достигается при  $q = \pi$ , а максимальная – при  $q = 0$ .

Проведем численный расчет этих мощностей. Для этого воспользуемся данными из работы [33], в которой экспериментально исследовано образование дискретных солитонов в системе связанных волноводов, изготовленных из AlGaAs:  $K_1 = 1 \text{ мм}^{-1}$ ,  $r_1 = 5 \text{ м}^{-1} \cdot \text{Вт}^{-1}$ . Для оценки примем

$K_2 = 0.25 \text{ мм}^{-1}$ , тогда  $P^{\text{th}}(\pi) = 200 \text{ Вт}$ , а  $P^{\text{th}}(0) = 800 \text{ Вт}$ . Полученные пороговые значения хорошо согласуются с результатами работы [53], в которой экспериментально исследована МН в такой системе связанных волноводов, изготовленных из AlGaAs. Увеличение коэффициента связи  $K_2$  до определенного момента приводит к уменьшению порогового значения мощности, а при достижении порогового значения  $K_2^{\text{th}}$  (12) неустойчивость начинает исчезать (рис.5,а) независимо от величины мощности (рис.5,б, в).

На рис.6 показано влияние коэффициента связи  $K_2$  на величину инкремента МН (10) при  $q = \pi/2$ , когда в спектре есть запрещенная зона (рис.2). Так же, как и при  $q = \pi$ , увеличение  $K_2$  приводит к существенному уменьшению неустойчивости плоских волн с  $q = \pi/2$ , однако наличие щели в спектре повышает пороговое значение  $K_2$  по сравнению с предыдущим случаем, что несложно увидеть, если сравнить рис.5 и 6 (это следует также из соотношения (12)). Кроме того, из неравенства (13) следует, что область устойчивости при  $q = \pi/2$  уже, чем при  $q = \pi$ , а при  $q = 0$  вовсе вырождается.

Таким образом, взаимодействие с волноводами, расположенными за ближайшими соседями, в рассмотренной зигзагообразной цепочке связанных волноводов оказывает существенное влияние на неустойчивость распространяющихся однородных волн, и эффект МН имеет особенности, которые не наблюдались ранее в обычных цепочках связанных волноводов и в брэгговских решетках. Однако в зигзагообразной цепочке, рассмотренной в работе [46], наблюдался похожий эффект отсутствия МН при небольших значениях коэффициента взаимодействия с волноводами, не являющимися ближайшими соседями.

## 5.2. Влияние параметра $f$ на инкремент МН

Зависимость инкремента МН (9) от  $f$  исследована с помощью компьютерного моделирования. Рассмотрен нелинейный отклик данной системы связанных волноводов (варианты 1–3, разд.5). На рис.7 и 8 показано влияние параметра  $f$  на неустойчивость плоских волн (2) при

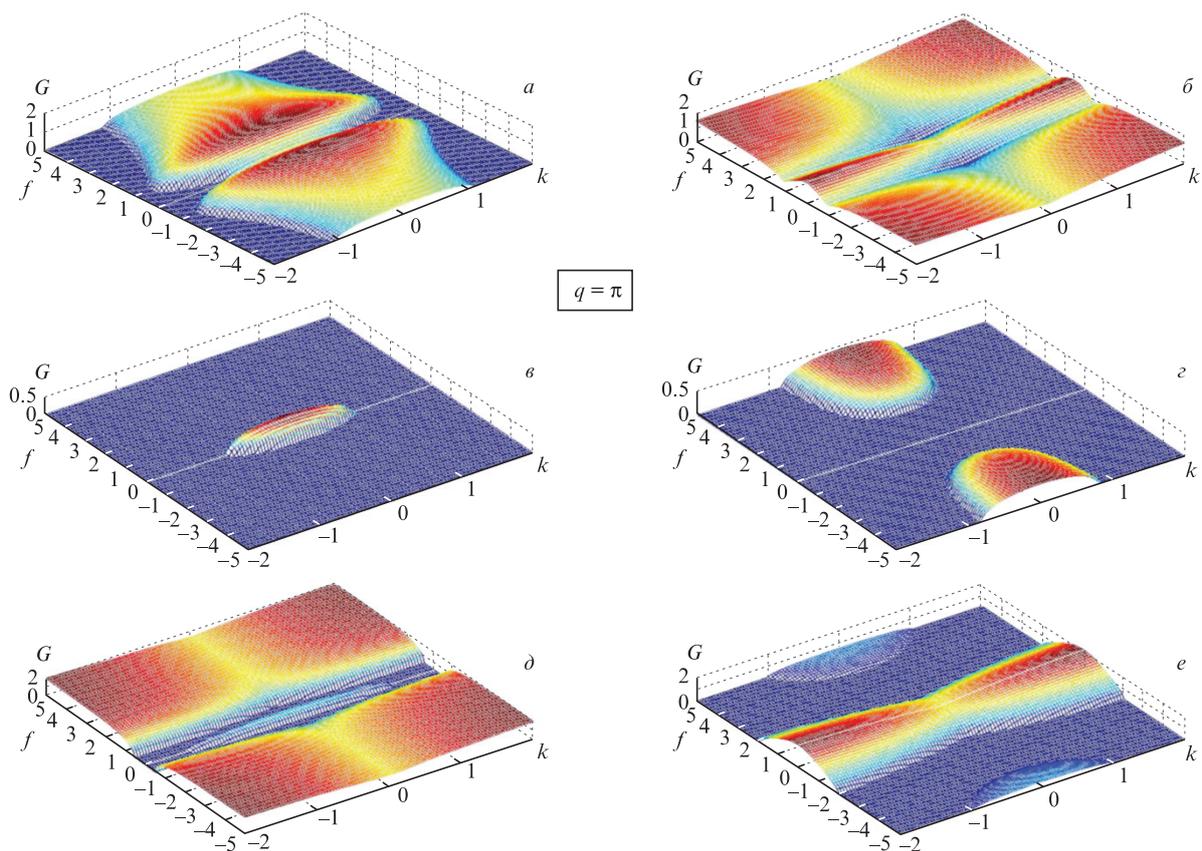


Рис.7. Зависимости инкремента МН  $G$  от постоянной распространения  $k$  малых возмущений и параметра  $f$  при  $r_1 = r_2 = 0.1$  (а),  $r_1 = r_2 = -0.1$  (б),  $r_1 = 0.1, r_2 = 0$  (в),  $r_1 = 0, r_2 = 0.1$  (г),  $r_1 = 0.1, r_2 = -0.1$  (д) и  $r_1 = -0.1, r_2 = 0.1$  (е) ( $K_1 = 1, K_2 = K_3 = 0.25, P = 20, q = \pi, Q = 0$ ).

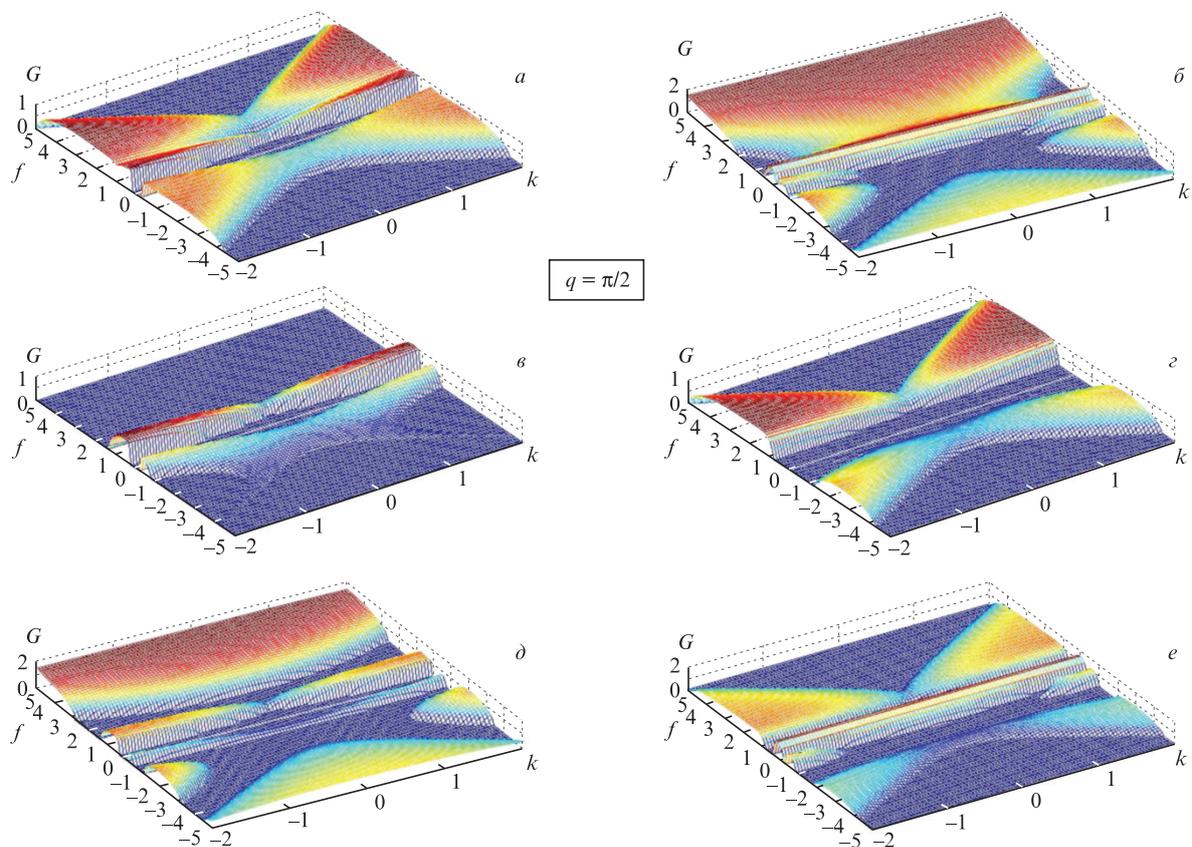


Рис.8. Зависимости инкремента МН  $G$  от постоянной распространения  $k$  малых возмущений и параметра  $f$  при  $r_1 = r_2 = 0.1$  (а),  $r_1 = r_2 = -0.1$  (б),  $r_1 = 0.1, r_2 = 0$  (в),  $r_1 = 0, r_2 = 0.1$  (г),  $r_1 = 0.1, r_2 = -0.1$  (д) и  $r_1 = -0.1, r_2 = 0.1$  (е) ( $K_1 = 1, K_2 = K_3 = 0.25, P = 20, q = \pi/2, Q = 0$ ).

$q = \pi$  и  $\pi/2$  соответственно. Наибольшая устойчивая область наблюдается для случая 3 (рис.7,в,з и 8,в,з). Если нелинейными являются ПП волноводы, а ОП волноводы линейные, то неустойчивость появляется, когда амплитуда прямой волны больше амплитуды обратной волны (рис.7,в и 8,в). И наоборот, когда ОП волноводы нелинейные, а ПП – линейные, неустойчивость увеличивается с ростом  $|f|$ , если амплитуда обратной волны больше амплитуды прямой волны (рис.7,з и 8,з). Случаи 1 и 2 оказались неустойчивыми, но наибольшая неустойчивость возникает, когда ОП волноводы дефокусирующие (рис.7,б,д и 8,б,д). Следует отметить, что расчеты проведены для  $Q = 0$ . При других значениях  $Q$  появляются особенности в поведении МН, которые рассмотрены ниже. Из сравнения рис.7 и 8 можно заключить, что принципиальное отличие зависимости инкремента МН (9) от параметра  $f$  для плоских волн с  $q = \pi$  и с  $q = \pi/2$  состоит в том, что в первом случае инкремент МН симметричен относительно  $f$ , а во втором – нет.

**5.3. Влияние нелинейного параметра ОП волновода  $r_2$  и мощности  $P$  на инкремент МН**

На рис.9 показана зависимость инкремента МН (9) от параметра нелинейности ОП волновода  $r_2$  и мощности  $P$  при  $q = \pi/2$ . Для  $Q = \pi/2$  и положительных значений  $f$  наблюдается нехарактерная зависимость инкремента МН (9) от  $P$  при дефокусирующем ОП волноводе и фокусирующем ПП волноводе (рис.9,а,б). МН возникает только в ограниченном диапазоне значений  $P$  и подавляется с дальнейшим увеличением мощности. Похожий эффект наблюдался в антинаправляющем ответвителе [40]. При  $Q = \pi$  и отрицательных значениях  $f$  неустойчивость полностью отсутствует (независимо от мощности), когда все волноводы фокусирующие (рис.9,в,з). Подобные особенности эффекта МН ранее в обычных брэгговских решетках не наблюдались.

**6. Заключение**

Аналитически исследован эффект модуляционной неустойчивости в зигзагообразной цепочке туннельно-свя-

занных волноводов, в которой положительно преломляющие волноводы чередуются с «отрицательно» преломляющими. Все волноводы изготовлены из оптически нелинейного материала с керровской нелинейностью. Зигзагообразная пространственная конфигурация системы связанных волноводов позволяет учесть взаимодействие с волноводами, расположенными за ближайшими соседями.

В основе метода исследования лежит теория связанных мод. Получены частные решения системы связанных нелинейных уравнений, описывающие распространение однородных волн в цепочке связанных волноводов. Методом линейного анализа решения исследованы на неустойчивость. Установлено, что связь между несоседними волноводами существенно влияет на неустойчивость однородных вдоль волноводов волн. При превышении порога, значение которого зависит от волнового вектора обратной решетки однородных волн, неустойчивость начинает исчезать независимо от мощности излучения. Подобная особенность поведения МН не наблюдалась ранее в обычных брэгговских решетках [48–50] и является новым результатом, поскольку обычно неустойчивость только усиливается при увеличении амплитуды волны.

Исследовано влияние отношения амплитуд прямой и обратной волн на устойчивость полученных частных решений. Показано, что если в спектре есть щель, то инкремент неустойчивости несимметричен относительно  $f$ , а если щели нет, то симметричен. Рассмотрены различные варианты нелинейного отклика в волноводах. При фокусирующих положительно преломляющих волноводах и дефокусирующих «отрицательно» преломляющих волноводах для определенных значений отношения амплитуд прямой и обратной волн и вектора обратной решетки неустойчивость наблюдается только в ограниченном диапазоне значений мощности и подавляется с ее дальнейшим увеличением. Похожий эффект наблюдался в антинаправляющем ответвителе [40].

Проведенные исследования неустойчивости однородных вдоль волноводов волн, распространяющихся в рассматриваемой зигзагообразной цепочке связанных волноводов, представляют новую особенность поведения

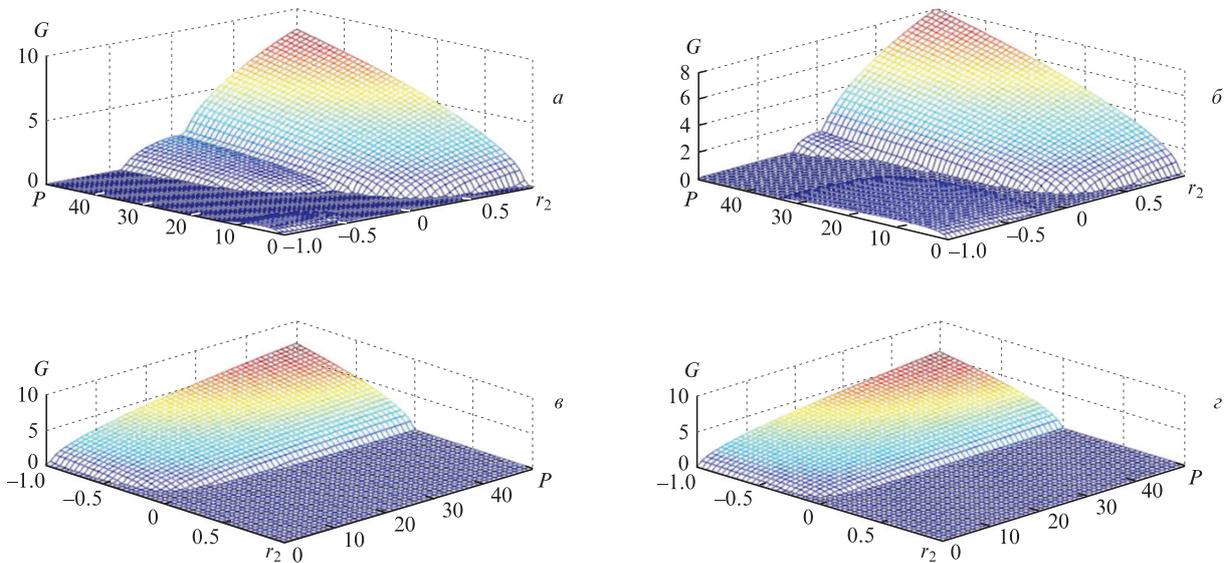


Рис.9. Зависимости инкремента МН  $G$  от мощности  $P$  и параметра нелинейности ОП волновода  $r_2$  при различных значениях  $f$  и  $Q$ :  $f = 1$ ,  $Q = \pi/2$  (а),  $f = 1.5$ ,  $Q = \pi/2$  (б),  $f = -1$ ,  $Q = \pi$  (в) и  $f = -1.5$ ,  $Q = \pi$  (з) ( $K_1 = 1$ ,  $K_2 = K_3 = 0.25$ ,  $r_1 = 0.1$ ,  $q = \pi/2$ ,  $k = 1$ ).

модуляционной неустойчивости в нелинейных периодических системах. С увеличением силы связи между волноводами, расположенными за ближайшими соседями, неустойчивость исчезает при любых значениях мощности поля в волноводах рассматриваемой цепочки, тогда как обычно неустойчивость только усиливается при увеличении амплитуды волны (как в нелинейной непрерывной среде, так и в нелинейных дискретных структурах).

Мне доставляет удовольствие поблагодарить коллег В.Г.Иванова, И.С.Беседина и Д.А.Абина за полезные и плодотворные дискуссии.

- Flach S., Willis C.R. *Phys. Rep.*, **295**, 182 (1998).
- Marklund M., Shukla P.K., Betschart G., et al. *J. Exp. Theor. Phys.*, **99**, 9 (2004).
- Gauthier P., Gobert O., Comte M., et al. *Phys. Rev. A*, **65**, 033804 (2002).
- Machabeli G.Z., Luo Q., Vladimirov S.V., et al. *Phys. Rev. E*, **65**, 036408 (2002).
- Begue M.L., Ghizzo A., Bertrand P., et al. *J. Plasma Phys.*, **62**, 367 (1999).
- Lai R., Sievers A.J. *Phys. Rev. B*, **57**, 3433 (1998).
- Carr L.D., Brand J. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 040401 (2004).
- Strecker K.E., Partridge G.B., Truscott A.G., et al. *Nature*, **417**, 150 (2002).
- Peyrard M., Bishop A.R. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 2755 (1989); Peyrard M., Boesch R., Kourakis I., in *Collective Proton Transport in Hydrogen Bonded Systems, Proc. NATO Advanced Research Workshop (Heraklion, Crete, 1991)*. Ed. by T. Bountis (New York: Plenum Press, 1991).
- Hasegawa A. *Opt. Lett.*, **9**, 288 (1984).
- Peccianti M., Conti C., Assanto G., et al. *Nature*, **432**, 733 (2004).
- Carvalho M.I., Singh S.R., Christodoulides D.N. *Opt. Commun.*, **126**, 167 (1996).
- Gomila D., Zambrini R., Oppo G.-L. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 253904 (2004).
- Fang H., Malendevich R., Schiek R., et al. *Opt. Lett.*, **25**, 1786 (2000).
- Akhmanov S.A., Khokhlov R.V., Sukhorukov A.P., in *Laser Handbook*, Ed. by F.T. Arecchi, E.O. Schulz-DuBois (Amsterdam: North-Holland, 1972, p. 1151).
- Xianqiong Zhong, Tingting Tang, Anping Xiang, Ke Cheng. *Opt. Commun.*, **284** (19), 4727 (2011).
- Stegeman G.I., Segev M. *Science*, **280**, 889 (1998).
- Agrawal G. P. *Nonlinear Fiber Optics* (San Diego: Academic Press, 2001).
- Lederer F., Stegeman G.I., Christodoulides D.N., et al. *Phys. Rep.*, **463** (1–3), 1 (2008).
- Marcuse D. *Bell. Syst. Tech. J.*, **50** (6), 1791 (1971).
- Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А. и др. *Квантовая электроника*, **37** (6), 580 (2007).
- Winn J.N., Fink Y., Fan S., et al. *Opt. Lett.*, **23** (20), 1573 (1998).
- Chigrin D.N., Lavrinenko A.V., Yarotsky D.A., et al. *Appl. Phys. A*, **68**, 25 (1999).
- Christodoulides D.N., Lederer F., Silberberg Y., *Nature (London)*, **424**, 817 (2003).
- Kivshar Yu.S., Peyrard M. *Phys. Rev. A*, **46**, 3198 (1992).
- Kivshar Yu.S., Salerno M. *Phys. Rev. E*, **49** (4), 3543 (1994).
- Christodoulides D.N., Joseph R.I. *Opt. Lett.*, **13** (9), 794 (1988).
- Aceves A.B., De Angelis C., Trillo S., et al. *Opt. Lett.*, **19** (5), 332 (1994).
- Eisenberg H.S., Morandotti R., Silberberg Y., et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19** (12), 2938 (2002).
- Sukhorukov A.A., Kivshar Y.S., *Phys. Rev. E*, **65** (3), 036609 (2002).
- Aceves A.B., De Angelis C., Peschel T., et al. *Phys. Rev. E*, **53** (1), 1172 (1996).
- Efremidis N.K., Sears S., Christodoulides D.N. *Phys. Rev. E*, **66** (4), 046602 (2002).
- Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (16), 3383 (1998).
- Szameit A., Garanovich I.L., Heinrich M., et al. *Nature Phys.*, **5**, 271 (2009).
- Darmanyan S., Relke I., Lederer F. *Phys. Rev. E*, **55** (6), 7662 (1997).
- Маймистов А.И., Габитов И.Р., Личиницер Н.М., *Оптика и спектроскопия*, **104** (2), 292 (2008).
- Kazantseva E.V., Maimistov A.I., Ozhenko S.S. *Phys. Rev. A*, **80**, 43833 (2009).
- Litchinitser N.M., Gabitov I.R., Maimistov A.I. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 1139002 (2007).
- Маймистов А.И., Казанцева Е.В. *Оптика и спектроск.*, **112** (2), 291 (2012).
- Xiang Y., Wen Sh., Dai X., et al. *Phys. Rev. E*, **82**, 056605 (2010).
- Tatsing P.H., Mohamadou A., Bouri C., Tioufack C.G.L., Kofane T.C. *J. Opt. Soc. Am. B*, **29** (12), 3218 (2012).
- Maimistov A.I., Gabitov I.R. *Eur. Phys. J. Special Topics*, **147** (1), 265 (2007).
- Маймистов А.И., Казанцева Е.В., Десятников А.С. В кн. «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: XVI Всероссийская молодежная научная школа, сборник лекционных заметок» (Казань: КФУ, 2012, с. 21).
- Zezyulin D.A., Konotop V.V., Abdullaev F.K. *Opt. Lett.*, **37** (19), 3930 (2012).
- Довгий А.А., Маймистов А.И. *Оптика и спектроск.*, **116** (4), 673 (2014).
- Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Phys. Rev. E*, **65**, 056607 (2002).
- Казанцева Е.В., Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **43** (9), 807 (2013).
- Porsezian K., Senthilnathan K., Devipriya S., *IEEE J. Quantum Electron.*, **41**, 789 (2005).
- Ganapathy R., Senthilnathan K., Porsezian K. *J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt.*, **6**, S436 (2004).
- Litchinitser N.M., McKinstrie C.J., de Sterke C.M., Agrawal G.P. *J. Opt. Soc. Am. B*, **18**, 45 (2001).
- Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999).
- Xiao S., Drachev V.P., Kildishev A.V., Ni X., Chettiar U.K., Yuan H.-K., Shalae V.M. *Nature*, **466**, 735 (2010).
- Meier J., Stegeman G.I., Christodoulides D.N., Silberberg Y., Morandotti R., Yang H., Salamo G., Sorel M., Aitchinson J.S. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 163902 (2004).