

Синхронизация в фазовой модели трех связанных лазеров

А.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев, Л.В.Тюрюкина, Н.Ю.Чернышов

Рассматривается задача синхронизации трех лазеров в фазовом приближении. С помощью бифуркационного анализа, метода карт ляпуновских показателей и построения фазовых портретов найдены области полной синхронизации, частичной синхронизации, резонансных двухчастотных режимов и трехчастотной квазипериодичности. Обсуждаются различия свойств цепочки и кольца из трех элементов, а также влияние типа связи.

Ключевые слова: синхронизация лазеров, квазипериодические колебания, бифуркация.

1. Введение

Задачи, связанные с синхронизацией как небольшого числа лазеров, так и достаточно больших их массивов, весьма популярны в лазерной физике [1–11]. Синхронизация позволяет существенно увеличить интенсивность и качество излучения. Добиться синхронной генерации лазеров можно разными способами. Это могут быть инжекция внешнего поля одночастотного лазера, синхронизирующего ансамбль, использование пространственного фильтра, резонатора Тальбо, синхронизация с помощью фурье-связи и др. [1–11]. Например, в [2, 3] оптическая связь между двумя волноводными лазерами осуществляется с помощью пространственного фильтра. Для этого в линзовую систему помещают дифракционную решетку, играющую роль пространственного фильтра. Дифракция излучения на ней и обеспечивает оптическую связь. Задача синхронизации уже трех лазеров [2, 3, 6], как и классическая задача синхронизации трех осцилляторов [12–15], является сложной. В этом случае возможны такие эффекты, как полная синхронизация лазеров, частичная синхронизация пар лазеров, отвечающая двухчастотной квазипериодичности, и более сложные режимы трехчастотной квазипериодичности. Следует отметить, что отдельный лазер – это, фактически, автоколебательная система, причем наличие отрицательного трения обеспечивает активная среда. Поэтому задачи о динамике лазеров являются фундаментальными, и для их решения могут привлекаться методы нелинейной динамики и теории бифуркаций, как это сделано, например, в [8, 9, 11]. В последнее время в нелинейной динамике развиты новые подходы и методы исследования подобных систем [13–19]. Они позволяют исследовать устройство пространства параметров, коррек-

тно выявить разные типы режимов и условия их появления (исчезновения). В настоящей работе такой подход будет применен к задачам, решавшимся в [2, 3, 6].

2. Уравнение Адлера–Хохлова и его обобщение

Сущность явления синхронизации в системах любой физической природы состоит во взаимной подстройке фаз взаимодействующих подсистем [12, 20, 21]. Поэтому принципиальным моментом в описании синхронизации является формулировка соответствующего фазового уравнения

$$\dot{\theta} = \Delta - \mu \sin \theta. \quad (1)$$

Здесь θ – относительная фаза подсистем; μ – коэффициент связи; Δ – частотная расстройка подсистем. Уравнение (1) описывает также и задачи вынужденной синхронизации, только в этом случае переменные и параметры определяются относительно внешнего сигнала. Впервые уравнение (1) было получено Р.Адлером в 1946 г. [22]. Адлер рассматривал радиотехническую задачу: триодный генератор, возбуждаемый внешним сигналом. Тем не менее в его работе уже содержалось понимание универсальности уравнения (1) и была предложена также и механическая модель в виде маятника в сильно вязкой среде. В 1954 г. подобное уравнение получено Р.В.Хохловым [23], причем был сформулирован важный метод нелинейной теории, состоящий в переходе от исходной системы к укороченным уравнениям для медленных амплитуд с последующим переходом к фазовым уравнениям*. С помощью этого подхода был решен ряд фундаментальных задач, а также рассмотрены практические задачи (в частности о синхронизации отражательных клистронов и молекулярных генераторов). Со временем уравнение Адлера–Хохлова и его обобщения были получены и для задач синхронизации различных типов лазеров при различных способах их связи (полупроводниковые лазеры, СО₂-лазеры и др.) [25, 5, 2, 3, 7–11].

А.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев, Л.В.Тюрюкина. Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38; e-mail: apkuz@rambler.ru

Н.Ю.Чернышов. Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83; e-mail: nick.chernyschov@yandex.ru

Поступила в редакцию 11 января 2013 г., после доработки – 24 октября 2013 г.

* В обзоре С.А.Ахманова [24] (1986 г.) имеется даже специальный раздел: «Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений – метод Хохлова».

Естественным обобщением уравнения Адлера–Хохлова является переход к системе из нескольких взаимодействующих элементов. Для трех связанных в цепочку лазеров с оптической связью обобщение уравнения Адлера–Хохлова можно найти в работе [6]. Исходные уравнения имеют вид

$$E_i = [G\delta_i - \Gamma_i - i(\omega_0 - \omega_i)]E_i + \sum_j m_{ij}E_j, \quad (2a)$$

$$\dot{\delta}_i = -\gamma(\delta_i - \delta_{0i}) - 4G\delta_i|E_i|^2.$$

Здесь E_i – комплексное поле, генерируемое i -м лазером в ансамбле; δ_i – разность населенностей в этом лазере; δ_{0i} – соответствующая ненасыщенная инверсная населенность; G – константа связи; γ и Γ_i – скорости релаксации населенности и поля в резонаторе i -го лазера соответственно; ω_i – собственная частота резонатора i -го лазера; ω_0 – частота лазерного перехода; m_{ij} – матрица коэффициентов связи.

Для действительных амплитуд A_i и фаз ψ_i запишем аналогично [6] уравнения

$$\dot{A}_i = -\Gamma_i A_i + G\delta_i A_i + \sum_j m_{ij} A_j \cos(\psi_i - \psi_j), \quad (2b)$$

$$\dot{\psi}_i = (\omega_i - \omega_0) + \sum_j m_{ij} \frac{A_j}{A_i} \sin(\psi_i - \psi_j).$$

Действуя далее стандартным образом, можно получить следующие уравнения для фаз в случае трех связанных в цепочку лазеров [6]:

$$\dot{\theta} = \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \phi, \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \phi + \mu_2 \sin \theta.$$

Здесь $\theta = \psi_1 - \psi_2$ и $\phi = \psi_2 - \psi_3$ – относительные фазы первого и второго и второго и третьего лазеров; μ_1, μ_2 – соответствующие коэффициенты связи. Параметры Δ_{21} и Δ_{23} представляют собой частотные расстройки первого и второго и второго и третьего лазеров. Детальный вывод системы (3) можно найти в [6].

Как было показано в [6], система (3) допускает определенное аналитическое рассмотрение, в рамках которого может быть найдено условие полной синхронизации всех трех лазеров. В этом случае все три лазера захвачены, так что их фазы ψ_i являются константами. Тогда производные от относительных фаз равны нулю, так что уравнения (3) имеют состояния равновесия

$$\Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \phi = 0, \quad (4)$$

$$-\Delta_{23} - \mu_1 \sin \phi + \mu_2 \sin \theta = 0.$$

Уравнения (4) можно разрешить относительно синусов фаз:

$$\sin \theta = \frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, \quad (5)$$

$$\sin \phi = \frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}.$$

Уравнения (5) решаются аналитически, причем решения появляются в виде пар θ_1 и θ_2 для первого уравнения и ϕ_1 и ϕ_2 – для второго:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \quad (6)$$

$$\phi_1 = \arcsin\left(\frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right), \quad \phi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23}}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\right).$$

Таким образом, на фазовой плоскости состояния равновесия соответствуют вершинам прямоугольника с координатами (θ_1, ϕ_1) , (θ_1, ϕ_2) , (θ_2, ϕ_1) , (θ_2, ϕ_2) (см. ниже на рис.2,а).

Будем теперь варьировать частотные расстройки так, чтобы правая часть первого уравнения (5) увеличивалась по абсолютной величине. В тот момент, когда она обращается в единицу, пара решений сливается, и все четыре состояния равновесия одновременно исчезают. Аналогичная ситуация имеет место и для второго уравнения (5). Таким образом, условием исчезновения решений является обращение правых частей (5) в ± 1 :

$$\mu_1 \Delta_{21} - \mu_2 \Delta_{23} = \pm (\mu_1^2 - \mu_2^2), \quad (7)$$

$$\mu_2 \Delta_{21} - \mu_1 \Delta_{23} = \pm (\mu_1^2 - \mu_2^2).$$

Соотношения (7) задают на плоскости частотных расстроек две пары взаимно параллельных линий, пересечение которых образует параллелограмм, который и дает область полной синхронизации. Этот результат получен в [6] и обсуждается также в [2, 3]. Отметим, однако, что в теории колебаний аналогичный результат был описан в книге П.С.Ланды [12] еще в 1980 г.* Поэтому полученную область полной синхронизации можно назвать параллелограммом Ланды (рис.1,а).

Оказывается, однако, что даже незначительное усложнение при переходе от уравнения (1) к уравнениям (3) приводит к очень существенному обогащению картины возможных колебательных режимов. Они требуют для своего анализа численного исследования и привлечения методов теории динамических систем и нелинейной динамики.

Прежде всего представим несколько фазовых портретов системы (3) на плоскости относительных фаз θ и ϕ , иллюстрирующих основные типы поведения. Благодаря

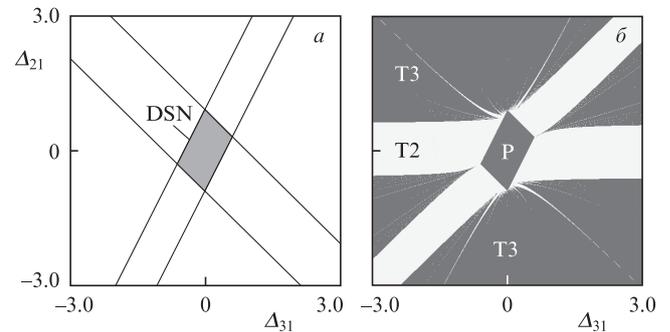


Рис.1. Линии (7) и область полной синхронизации системы (3) (DSN (degenerate saddle-node) – один из четырех отрезков линии вырожденной седло-узловой бифуркации) (а), а также соответствующая ляпуновская карта (P – область полной синхронизации, T2 и T3 – области двух- и трехчастотной квазипериодичности) (б). По оси абсцисс отложена частотная расстройка третьего и первого лазеров $\Delta_{31} = \Delta_{21} - \Delta_{23}$; $\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.3$.

* В английском варианте этот результат был опубликован в книге [26].

свойству 2π -периодичности фаз их динамику можно рассматривать в диапазонах $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$. При этом, если фазовая траектория уходит, например, через правую сторону этого квадрата, то она появляется в соответствующей точке на его левой стороне. Аналогично для верхней и нижней границ.

На рис.2 представлены фазовые портреты, отвечающие основным типам режимов системы (3). В случае рис.2,а система имеет четыре состояния равновесия, что соответствует аналитическому рассмотрению. При этом точка 1 – устойчивый узел, точки 2 и 3 – седла, а точка 4 – неустойчивый узел. Относительные фазы осцилляторов с течением времени будут стремиться к точке устойчивого равновесия. При этом скорости изменения фаз каждого осциллятора становятся постоянными и равными друг другу. Это режим полной синхронизации всех трех лазеров.

При приближении к границам параллелограмма на рис.1,а точки равновесия попарно сближаются (например, 1 и 3, а также 2 и 4) и одновременно сливаются и исчезают. Это своего рода вырожденная седло-узловая бифуркация, когда одновременно сливаются точка устойчивого равновесия и седло, а также точка неустойчивого равновесия и седло.

Перейдем теперь к рис.2,б. На нем имеются два новых объекта: притягивающая и отталкивающая инвариантные кривые. Устойчивая кривая обозначена буквой I. Теперь фаза θ в режиме, отвечающем устойчивой инвариантной кривой, не постоянна, а осциллирует около некоторого среднего значения. Поскольку по определению $\theta = \psi_1 - \psi_2$, то это значит, что фазы первого и второго осцилляторов близки, а их разность не увеличивается. Данный режим можно охарактеризовать как захват первого и второго лазеров. Этот захват, однако, не полный, а частичный – относительная фаза не постоянна во времени. Отметим, что на рис.2,б относительная фаза θ колеблется вблизи нулево-

го значения, поэтому лазеры синхронизованы «почти» синфазно.

На рис.2,в представлен другой вариант расположения притягивающей инвариантной кривой. В этом случае около стационарного значения колеблется уже фаза $\phi = \psi_2 - \psi_3$, а фаза θ изменяется во всем возможном диапазоне. Таким образом, это режим частичного захвата второго и третьего лазеров.

На рис.2,г показана еще одна разновидность режима колебаний системы. В этом случае наблюдается «поток» фазовых траекторий, всюду плотно покрывающих фазовый квадрат. При этом каждая фаза меняется во всем возможном диапазоне: $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$.

Как описанные режимы проявляются с точки зрения динамики исходной системы? Количество базовых частот в этом случае складывается из их числа для фазовых уравнений (3) и основной оптической частоты ω_0 . Поэтому случай устойчивого равновесия соответствует предельному циклу. Инвариантная кривая будет отвечать режиму двухчастотной квазипериодичности и двухчастотному инвариантному тору, а поток траекторий на рис.2,г – уже режиму трехчастотной квазипериодичности и инвариантному тору более высокой размерности.

Теперь возникает вопрос, как эти типы режимов представлены на плоскости частотных расстроек. Для ответа на него используем численный метод нелинейной динамики – метод карт ляпуновских показателей [13, 14, 18, 19]. Ляпуновские показатели характеризуют сжатие (расширение) фазового объема динамической системы [27]. Система (3) имеет второй порядок и поэтому характеризуется двумя ляпуновскими показателями – Λ_1 и Λ_2 . Будем вычислять, используя стандартную «технология» [27], оба ляпуновских показателя в каждой точке плоскости параметров Λ_{31} и Λ_{21} . Затем эту плоскость окрасим в разные цвета в соответствии с величинами показателей, чтобы визуализировать следующие режимы:

а) $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, наличие устойчивого состояния равновесия P;

б) $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, устойчивая инвариантная кривая, двухчастотный квазипериодический режим T2;

в) $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, поток фазовых траекторий, трехчастотный квазипериодический режим T3.

Полученная таким образом карта ляпуновских показателей показана на рис.1,б. На ней видна область полной синхронизации, которая отвечает аналитическому рассмотрению. Кроме того, имеют место широкие области (полосы) двухчастотных режимов, обусловленные двумя возможными резонансными условиями для системы:

$$\Lambda_{21} = 0, \quad \Lambda_{21} = \Lambda_{31}. \quad (8)$$

В первом случае совпадают собственные частоты первого и второго лазеров, а во втором – второго и третьего. Соответственно на рис.1,б имеются две полосы, отвечающие двухчастотным режимам, которые занимают конечный диапазон в окрестности значений (8). Эти полосы примыкают к границам параллелограмма Ланды. Таким образом, выход за границы параллелограмма приводит к разрушению режима полной синхронизации лазеров с переходом в режим частичной синхронизации той или иной пары.

В свою очередь, на границах полос двухчастотных режимов сливаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. В терминах исходной системы можно ска-

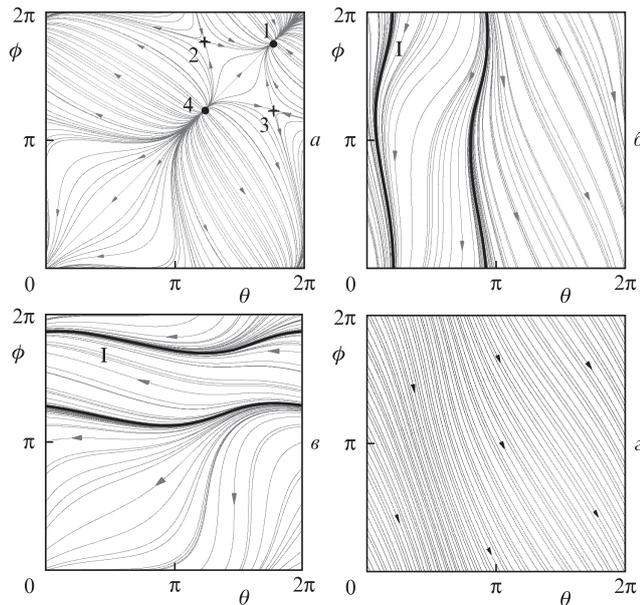


Рис.2. Фазовые портреты системы (3): режим полной синхронизации всех осцилляторов ($\Lambda_{21} = -0.25$, $\mu_1 = 0.75$, $\mu_2 = 0.375$) (а), режим частичного захвата первого и второго осцилляторов ($\Lambda_{21} = 0.125$, $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.125$) (б), режим частичного захвата второго и третьего осцилляторов ($\Lambda_{21} = -0.375$, $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.125$) (в) и трехчастотный квазипериодический режим ($\Lambda_1 = -1$, $\mu = 0.25$) (г). Расстройка $\Lambda_{31} = -0.5$.

зать, что происходит седло-узловая бифуркация инвариантных торов. После этого торы исчезают, и возникает режим трехчастотной квазипериодичности. Отметим, что разрушение режима синхронизации пар лазеров в результате этой бифуркации не отвечает линиям (7), как могло бы показаться на первый взгляд, т. е. появление пары решений для одной из относительных фаз не связано с разрушением режима синхронизации для соответствующей пары осцилляторов.

Еще одна особенность картины на рис.1,б – наличие большого числа соответствующих двухчастотным режимам тонких язычков, форма которых наиболее сложна в окрестности вершин параллелограмма. Эти области отвечают наличию резонансных двухчастотных режимов разных типов. Для них инвариантные кривые имеют более сложную конфигурацию и разное (причем и большое) число пересечений со сторонами фазового квадрата по сравнению с простейшими типами кривых на рис.2,б и в (детали см. в [14, 18]).

Скажем несколько слов о характере связи. Положительные значения коэффициентов связи в (1) и (3) отвечают, в терминах теории колебаний, диссипативной связи [12, 20]. Однако коэффициент связи может иметь и отрицательный знак, что достаточно распространено в задачах лазерной физики [2, 3]. Этот случай можно назвать активной связью. Нетрудно видеть, что изменение знака коэффициента связи в уравнениях (3) эквивалентно замене фаз

$$\theta \rightarrow \theta + \pi, \phi \rightarrow \phi + \pi. \tag{9}$$

Таким образом, отрицательный коэффициент связи будет отвечать противофазной синхронизации лазеров. В то же время для цепочки лазеров картины режимов на плоскости параметров для диссипативной и активной связей точно совпадают вследствие замены (9).

3. Фазовая динамика трех глобально связанных лазеров

Фазовые уравнения для более общего случая, когда возможна также связь третьего и первого лазеров, т. е. когда все три лазера оптически связаны, можно найти в [2, 3]. Обобщение уравнения Адлера – Хохлова в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \phi - m \sin(\theta + \phi), \\ \dot{\phi} &= -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \phi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \phi). \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициент m учитывает возможность связи третьего и первого лазеров. При этом обращаем внимание на то, что величины μ_1 и μ_2 выражаются через использованные в [3] параметры M и c с помощью соотношений $\mu_1 = (c + 1/c)M$ и $\mu_2 = M/c$. В свою очередь, коэффициенты M и c могут быть рассчитаны оптическими методами для исходной системы. Детали расчета и связь с параметрами исходной лазерной системы даны в работах [2, 3].

Обсудим сначала влияние характера связи на структуру уравнений. Изменим знак всех коэффициентов в (10). Теперь замена (9) недостаточна: необходимо еще дополнительно изменить знак константы m , отвечающей за связь крайних лазеров:

$$\theta \rightarrow \theta + \pi, \phi \rightarrow \phi + \pi, m \rightarrow -m. \tag{11}$$

Таким образом устройство плоскости параметров в случае глобальной связи всех лазеров будет зависеть от знака параметра связи. В то же время случай системы (10) со всеми отрицательными коэффициентами будет эквивалентен случаю, когда коэффициенты μ_1 и μ_2 положительны, а коэффициент m отрицателен*.

Теперь необходимо найти условие полной синхронизации всех трех лазеров. Система (10) может иметь состояния равновесия, которые ищем, приравнявая скорости изменения относительных фаз нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_{21} - \mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sin \phi - m \sin(\theta + \phi) &= 0, \\ -\Delta_{23} - \mu_1 \sin \phi + \mu_2 \sin \theta - m \sin(\theta + \phi) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

К сожалению, в этом случае подход [6] неприменим: условие обращения синусов в единицу не дает правильного решения. Требуется более корректный поиск условий возникновения бифуркаций. В случае $m \neq 0$ таким условием является обращение в нуль якобиана матрицы возмущений системы (10) [21, 28], что приводит к достаточно громоздким аналитическим выражениям. Поэтому далее мы представим результаты численного определения области полной синхронизации**.

Картина бифуркационных линий для системы (10) на плоскости частотных расстройек лазеров Δ_{23} и Δ_{21} представлена на рис.3. Она найдена численно с помощью стандартной программы MatCont. На рис.4,а-е даны примеры фазовых портретов в точках, обозначенных соответствующими буквами на рис.3. При этом выбраны коэффициенты $\mu_1 = 0.351, \mu_2 = 0.108, m = -0.139$, отвечающие использованным в [2, 3] параметрам $M = 0.162, c = 1.5, m = -0.139$. В соответствии со сделанным выше замечанием, этот случай эквивалентен ситуации, когда все коэффициенты связи отрицательны (активная связь).

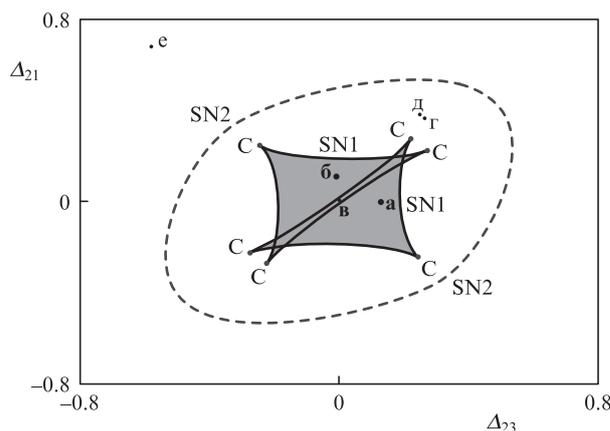


Рис.3. Бифуркационные линии состояний равновесия системы (10); SN1 и SN2 – линии седло-узловых бифуркаций для устойчивых и неустойчивых узлов соответственно, С – точки сборки. Серым цветом выделена область, в которой возможно хотя бы одно устойчивое состояние равновесия.

* Именно такой случай рассмотрен в [2, 3].

** Мы акцентируем внимание на этом моменте, поскольку в [3] условия $\theta = \pm \pi/2$ и $\phi = \pm \pi/2$ (т. е. $\sin \theta = \pm 1$ и $\sin \phi = \pm 1$) интерпретированы как условия, определяющие границу области синхронизации в общем случае, что не верно. В этом можно убедиться, сравнивая полученную ниже картину бифуркационных линий с рис.2 из работы [3], который воспроизведен и в [2].

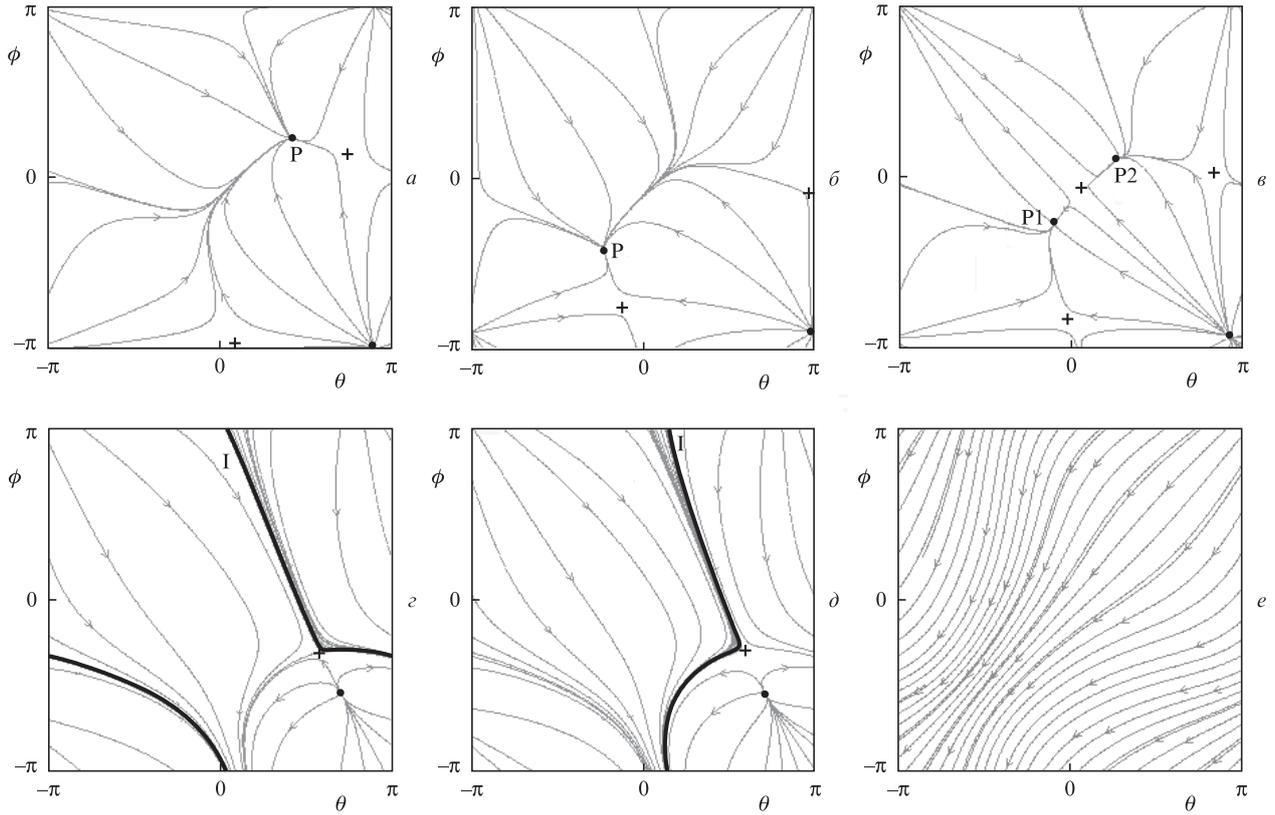


Рис.4. Характерные фазовые портреты (а–е), построенные в точках, обозначенных соответствующими маленькими буквами на рис.3. Буквой Р обозначены устойчивые точки равновесия, крестиком – седла, устойчивые инвариантные кривые I показаны жирными линиями.

Три фазовых портрета на рис.4,а–в иллюстрируют устойчивые положения равновесия в системе, отвечающие полной синхронизации всех трех лазеров. В случаях рис.4,а и б система имеет четыре точки равновесия, из которых одна – устойчивый узел, вторая – неустойчивый узел, а оставшиеся две – седла. В случае рис.4,в имеются шесть точек равновесия, из которых две – устойчивые узлы, три – седла и еще одна – неустойчивый узел. Таким образом, в отличие от случая цепочки лазеров данная система характеризуется бистабильностью, т.е. сосуществованием двух устойчивых точек равновесия.

Линии седло-узловых бифуркаций попарно сходятся в точках сборки С [29], где имеются характерные острия с полкубической особенностью. Область полной синхронизации на рис.3 лежит внутри штрихового овала, представляющего собой линию седло-узловой бифуркации SN2, на которой сливаются уже неустойчивый узел и седло.

Таким образом, принципиальное отличие рассматриваемой системы от случая цепочки лазеров состоит в том, что при связи каждого лазера с каждым бифуркации устойчивого и неустойчивого узлов происходят не одновременно.

Фазовые портреты на рис.4,з,д демонстрируют возможность режимов двухчастотной квазипериодичности. На рис.4,е фазовые траектории всюду плотно заполняют фазовый квадрат, что отвечает трехчастотной квазипериодичности.

Для выявления общей картины режимов системы (10) построим карту ляпуновских показателей (рис.5). На ней видна область полной синхронизации, которая отвечает проведенному бифуркационному анализу. При этом, однако, оба перекрывающихся листа на рис.3 проецируются на одну плоскость параметров, поэтому визуализиру-

ются на рис.5 как единая область. На рис.5 можно видеть целую систему сложно организованных областей двухчастотной квазипериодичности. Три наиболее широкие полосы, соответствующие таким режимам, располагаются вблизи линий, отвечающих резонансным условиям

$$\Delta_{21} = 0, \Delta_{23} = 0, \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (13)$$

Условия (13) соответствуют трем основным резонансам в системе. В первом случае имеет место совпадение собственных частот первого и второго лазеров, во втором – второго и третьего лазеров и в третьем – первого и третьего лазеров. Так, рис.4,д отвечает первому случаю, и

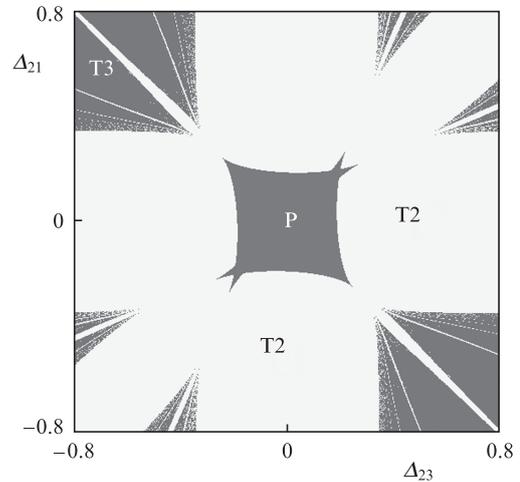


Рис.5. Карта ляпуновских показателей системы (10) при $\mu_1 = 0.351$, $\mu_2 = 0.108$, $m = -0.139$.

относительная фаза первого и второго осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ совершает осцилляции около некоторого равновесного положения. Соответственно вдоль вертикальной полосы двухчастотной квазипериодичности на рис.5 возникает режим, когда частично захвачены второй и третий осцилляторы. Наконец, вдоль диагонали наблюдается режим частичного захвата первого и третьего осцилляторов. Фазовый портрет в этом случае показан на рис.4,г. Область полной синхронизации лежит на пересечении указанных трех полос, отвечающих трем вариантам частичной синхронизации в системе.

Обсудим, как может происходить переход от режима частичной синхронизации первого и третьего лазеров к режиму захвата первого и второго лазеров в случае глобальной связи. Этот переход может осуществляться в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых, как и в случае цепочки лазеров. Однако возможен и другой сценарий. А именно, если маршрут на плоскости частотных расстройек располагается вблизи области полной синхронизации, то наблюдается следующая нелокальная бифуркация: инвариантная кривая проходит сквозь седло на фазовой плоскости, сливаясь с его сепаратрисами, причем направление следования вдоль инвариантной кривой задается неустойчивым многообразием седла. Этот механизм иллюстрирует переход от рис.4,г к рис.4,д. На рис.4,г инвариантная кривая, обходя седло, поворачивает налево (относительно направления фазовой траектории), а на рис.4,д – направо.

4. Заключение

Таким образом, картина режимов трех взаимодействующих лазеров даже в фазовом приближении весьма сложна. Она выявляется совместным применением бифуркационного анализа, метода ляпуновских карт и построением фазовых портретов. Основные режимы – полная синхронизация лазеров, частичная синхронизация пар лазеров, резонансные двухчастотные режимы разных типов и трехчастотные режимы. Картина режимов включает в себя бифуркации состояний равновесия, а также седло-узловые и нелокальные бифуркации инвариантных кривых. Динамика цепочки и кольца из трех элементов имеет заметные различия. Так, различаются типы бифуркаций, отвечающих за разрушение режима полной синхронизации. Кроме того, для глобальной связи характерна бистабильность в виде сосуществования двух устойчивых состояний равновесия, отвечающих за полную синхронизацию трех лазеров. Еще одна особенность состоит в том, что для кольца из лазеров картина режимов

в пространстве параметров зависит от знака коэффициента связи, а для цепочки – нет.

Авторы выражают благодарность Л.А.Мельникову за полезные обсуждения.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-02-91334-НННОа.

1. Лиханский В.А., Напартович А.П. *УФН*, **160** (4), 101 (1990).
2. Глова А.Ф. *Квантовая электроника*, **33**, 283 (2003).
3. Глова А.Ф., Лысыков А.Ю. *Квантовая электроника*, **32**, 315 (2002).
4. Глова А.Ф. и др. *Квантовая электроника*, **24**, 318 (1997).
5. Глова А.Ф. и др. *Квантовая электроника*, **23**, 515 (1996).
6. Pamarploni E., Lapucci A. *Opt. Lett.*, **18**, 1881 (1993).
7. Braimanc Y., Kenneddy T.A.B., Wiesenfeld K., Khibnik A.I. *Phys. Rev. A*, **52**, 1500 (1995).
8. Khibnik A.I., Braimanc Y., Protopopescu V., Kenneddy T.A.B., Wiesenfeld K. *Phys. Rev. A*, **62**, 063815 (2000).
9. Khibnik A.I., Braimanc Y., Kenneddy T.A.B., Wiesenfeld K. *Physica D*, **111**, 295 (1998).
10. Высоцкий Д.В., Напартович А.П., Трощиева В.Н. *Квантовая электроника*, **37**, 345 (2007).
11. Владимиров А.Г. Докт. дис. (С.-Пб., Санкт-Петербургский государственный университет, 2006).
12. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (М.: Наука, 1980).
13. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. *Нелинейная динамика*, **6**, 693 (2010).
14. Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. *Physica D*, **244**, 36 (2013).
15. Maistrenko Y., Popovych O., Burylko O., Tass P.A. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 084102 (2004).
16. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. *Europhys. Lett.*, **86**, 30003 (2009).
17. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **16**, 2371 (2011).
18. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. *Нелинейная динамика*, **7**, 411 (2011).
19. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. *Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика*, **19** (7), 76 (2011).
20. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (М.: Техносфера, 2003).
21. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания* (М.: Физматлит, 2002).
22. Adler R. *Proc. IRE Waves Electrons*, **34** (6), 351 (1946).
23. Хохлов Р.В. *ДАН СССР*, **97**, 411 (1954).
24. Ахманов С.А. *УФН*, **149**, 361 (1986).
25. Spencer M.B., Lamb W.E. *Phys. Rev. A*, **5**, 893 (1972).
26. Landa P.S. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996).
27. Кузнецов С.П. *Динамический хаос* (М.: Физматлит, 2001).
28. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (Москва – Ижевск: изд-во ИКИ, 2002).
29. Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения* (М.: Физматлит, 1980).