

Синхронизация автоколебаний в твердотельном кольцевом лазере при модуляции накачки в области параметрического резонанса между автомодуляционными и релаксационными колебаниями

В.Ю.Дудецкий, Е.Г.Ларионцев, С.Н.Чекина

Теоретически и экспериментально исследована синхронизация частоты автомодуляционных колебаний излучения кольцевого чип-лазера на YAG: Nd внешним периодическим сигналом, модулирующим мощность накачки в области параметрического резонанса между автомодуляционными и релаксационными колебаниями. Рассмотрены характерные особенности процессов синхронизации, возникающие при работе лазера в автомодуляционном режиме первого рода и в режиме с удвоенным периодом автомодуляции. На основе численного моделирования найдены две бистабильные ветви режимов синхронизации автомодуляционных колебаний. Результаты экспериментальных исследований хорошо согласуются с результатами численного моделирования для одной из этих ветвей, однако другую ветвь бистабильных автомодуляционных колебаний экспериментально наблюдать не удалось.

Ключевые слова: твердотельный кольцевой лазер, автомодуляционный режим генерации, параметрический резонанс, синхронизация частоты, бистабильность излучения.

1. Введение

Синхронизация автомодуляционных колебаний (АК), возникающих в лазерах, исследовалась в ряде работ (см., напр., [1–6]). Одной из целей этих исследований было изучение синхронизации как фундаментального явления, наблюдающегося в динамических системах разной природы [7]. В работах [1–4] был изучен общий случай синхронизации периодических колебаний порядка n/m , характеризующийся следующим соотношением между частотой синхронизованных АК Ω и частотой внешнего сигнала модуляции ω : $n\omega = m\Omega$. Синхронизация квазипериодических АК внешним периодическим сигналом исследовалась в работах [5, 6]. Другие цели, достигаемые при синхронизации АК внешним периодическим сигналом, относятся к задачам управления динамикой генерации и улучшения стабильности АК. Технические флуктуации (прежде всего шумы накачки и нестабильность коэффициентов связи встречных волн) приводят к нестабильности частоты АК, синхронизация которых внешним периодическим сигналом существенно повышает их стабильность.

В твердотельных кольцевых лазерах (ТКЛ) АК обычно возбуждаются вследствие конкуренции встречных волн. Возможен целый ряд автомодуляционных режимов генерации (см. обзор [8], а также работы [9–11]), среди которых основным и наиболее распространенным является

режим АК первого рода. В проводившихся ранее исследованиях была развита теория синхронизации АК в ТКЛ внешним периодическим сигналом [12] и экспериментально изучена синхронизация АК первого рода при периодической модуляции мощности накачки [2, 3, 6].

Как известно, автомодуляционный режим первого рода устойчив лишь вне области параметрического резонанса между автомодуляционными и релаксационными колебаниями [13]. В области параметрического резонанса этот режим сменяется автомодуляционным режимом с удвоенным периодом колебаний и другими режимами. В случае симметричной связи встречных волн (при равных модулях коэффициентов связи, $m_1 = m_2$) ширина области параметрического резонанса обращается в нуль. В случае несимметричной связи встречных волн ширина зоны параметрической неустойчивости существенно возрастает при увеличении разности модулей коэффициентов связи встречных волн $m_1 - m_2$ [13].

Отметим, что ранее была исследована синхронизация лишь автомодуляционного режима первого рода. Характерные особенности синхронизации для других автомодуляционных режимов, возникающих в области параметрического резонанса, до настоящего времени не изучены. Целью настоящей работы является восполнение этого пробела. В работе проведены теоретическое (на основе численного моделирования) и экспериментальное исследования процессов синхронизации АК внешним периодическим сигналом, модулирующим мощность накачки, в области параметрического резонанса между автомодуляционными и релаксационными колебаниями.

2. Экспериментальная установка

Исследуемый кольцевой чип-лазер представлял собой моноблок в виде призмы с одной сферической (радиус кривизны 50 мм) гранью и тремя плоскими гранями пол-

В.Ю.Дудецкий. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vadim.dudetskiy@gmail.com
Е.Г.Ларионцев, С.Н.Чекина. НИИ ядерной физики им. Д.В.Скобелева МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: e.lariontsev@yahoo.com

ного внутреннего отражения. Геометрический периметр резонатора составлял около 2.8 см, угол неплоскостности резонатора был равен 80° . Накачка лазера осуществлялась полупроводниковым лазерным диодом с длиной волны излучения 0.810 мкм. В цепь питания диода был включен генератор периодических колебаний, модулировавший мощность накачки исследуемого лазера в диапазоне частот 50–220 кГц. С помощью системы термостабилизации температура моноблока регулировалась таким образом [6], чтобы неравенство модулей коэффициентов обратной связи встречных волн было максимальным ($m_1/m_2 = 2.3$).

В процессе экспериментов регистрировались временные и спектральные характеристики интенсивности излучения встречных волн в зависимости от превышения накачки над порогом η_0 , частоты и амплитуды сигнала, модулирующего накачку. Регистрация сигналов проводилась с помощью АЦП 20-12-PCI и широкополосного цифрового осциллографа Tektronix TDS 2014.

3. Теоретическая модель и параметры лазера

При численном моделировании в настоящей работе использовалась векторная модель ТКЛ [8, 14]. В этой модели поляризация излучения встречных волн предполагается заданной и определяется единичными векторами $e_{1,2}$ для встречных направлений. Исходная система уравнений векторной модели имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{E}_{1,2} &= -\frac{\omega_c}{2Q_{1,2}} \tilde{E}_{1,2} \pm i \frac{\Omega}{2} \tilde{E}_{1,2} + \frac{i}{2} \tilde{m}_{1,2} \tilde{E}_{2,1} \\ &+ \frac{\sigma l}{2T} (N_0 \tilde{E}_{1,2} + N_{\pm} \tilde{E}_{2,1}), \\ T_1 \frac{dN_0}{dt} &= N_{th} (1 + \eta) - N_0 - N_0 a (|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2) \\ &- N_+ a \tilde{E}_1 \tilde{E}_2^* - N_- a \tilde{E}_1^* \tilde{E}_2, \\ T_1 \frac{dN_{\pm}}{dt} &= -N_{\pm} - N_{\pm} a (|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2) - \beta N_0 a \tilde{E}_1^* \tilde{E}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega_c/Q_{1,2}$ – ширины полос резонатора; $Q_{1,2}$ – добротности резонатора для встречных волн (далее мы полагаем $Q_1 = Q_2 = Q$); $T = L/c$ – время обхода светом резонатора длиной L ; T_1 – время продольной релаксации; l – длина активного элемента; $a = T_1 c \sigma / (8 \hbar \omega \pi)$ – параметр насыщения; σ – сечение лазерного перехода; $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ – частотная невязанность резонатора; ω_1, ω_2 – собственные частоты резонатора для встречных волн; скорость накачки представлена в виде $N_{th}(1 + \eta)/T_1$; N_{th} – пороговая инверсная населенность; $\eta = P/P_{th} - 1$ – превышение мощности накачки над порогом; $\tilde{E}_{1,2}(t) = E_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$ – комплексные амплитуды полей встречных волн; N_0, N_{\pm} – пространственные гармоники инверсной населенности N , определяемые выражениями

$$N_0 = \frac{1}{L} \int_0^L N dz, \quad N_{\pm} = \frac{1}{L} \int_0^L e_1^* e_2 N \exp(\pm i2kz) dz. \quad (2)$$

Система уравнений (1) отличается от уравнений стандартной модели ТКЛ [1] лишь присутствием в последнем уравнении поляризационного фактора

$$\beta = (e_1 e_2)^2 = \cos^2 \gamma, \quad (3)$$

где γ – угол между единичными векторами $e_{1,2}$.

Линейная связь встречных волн определяется феноменологически вводимыми комплексными коэффициентами связи

$$\tilde{m}_1 = m_1 \exp(i\vartheta_1), \quad \tilde{m}_2 = m_2 \exp(-i\vartheta_2), \quad (4)$$

где $\vartheta_{1,2}$ – фазы модулей коэффициентов связи $m_{1,2}$.

При модуляции накачки превышение мощности накачки над порогом

$$\eta(t) = \eta_0 + h \sin(2\pi f_p t), \quad (5)$$

где η_0 – превышение мощности накачки над порогом в отсутствие модуляции накачки; h и f_p – глубина и частота модуляции накачки.

Численное моделирование проводилось при параметрах лазера, близких к экспериментально измеренным параметрам кольцевого чип-лазера на YAG:Nd [10]. Время релаксации $T_1 = 240$ мкс, ширина полосы резонатора определялась по релаксационной частоте $\omega_r = \sqrt{\eta \omega_c / Q T_1}$. В исследуемом лазере при $\eta_0 = 0.2$ основная релаксационная частота $\omega_r / 2\pi = 98.5$ кГц, что дает $\omega_c / Q = 4.37 \times 10^8$ с⁻¹. Значение поляризационного параметра $\beta = 0.75$ было определено, как и в [14], по экспериментально измеренной зависимости дополнительной релаксационной частоты ω_{r1} от частотной невязанности резонатора Ω .

Как было показано в работе [6], в кольцевом чип-лазере можно изменять отношение m_1/m_2 регулировкой температуры моноблока. При численном моделировании были выбраны следующие значения: $m_1 = 1986400$ с⁻¹, $m_2 = 861378$ с⁻¹. При таких m_1 и m_2 частоты АК и отношение средних значений интенсивностей встречных волн близки к экспериментально измеренным. Разность фаз комплексных коэффициентов связи $\tilde{m}_{1,2}$ трудно оценить по характеристикам АК. Для простоты разность фаз $\vartheta_1 - \vartheta_2$ полагалась равной нулю. Предполагалось также, что частотная и амплитудная невязанности кольцевого резонатора отсутствуют ($\Omega = 0$, $\Delta = \omega_c / 2Q_2 - \omega_c / 2Q_1 = 0$).

4. Периодический и квазипериодический режимы синхронизации

В автономном кольцевом чип-лазере в широком диапазоне значений лазерных параметров (вне области параметрического резонанса) наблюдается автомодуляционный режим первого рода, для которого характерна противофазная синусоидальная модуляция интенсивностей встречных волн. Этот режим устойчив лишь вне области параметрического резонанса, между автомодуляционными и релаксационными колебаниями [10, 13]. В области параметрического резонанса частота АК близка к удвоенной релаксационной частоте ($\omega_m \approx 2\omega_r = 2\sqrt{\eta_0 \omega_c / Q T_1}$).

В исследованиях, проводившихся в настоящей работе, варьировались следующие параметры: превышение накачки над порогом η_0 , глубина и частота модуляции мощности накачки h и f_p . Если частота f_p близка к частоте АК f_m , в ТКЛ может возникнуть синхронизация АК, при этом частота автомодуляции захватывается внешним сигналом: $f_m = f_p$. Именно эта область синхронизации АК рассматривается нами. Синхронизация возможна также и при

частотах модуляции f_p , близких к $f_m/2$, а также в области частот $f_p \approx 2f_m$. Эти области синхронизации будут изучены отдельно.

Экспериментальные исследования и численное моделирование проводились при нескольких значениях превышения накачки над порогом η_0 . Изменение η_0 приводит к изменению релаксационной частоты ω_r . Если частота $2\omega_r$ приближается к частоте АК ω_m , возникает ряд нелинейных эффектов, связанных с параметрическим взаимодействием автомодуляционных и релаксационных колебаний (параметрический резонанс). В области параметрического резонанса автомодуляционный режим первого рода становится неустойчивым и возникает бифуркация удвоения периода АК [10].

При каждом значении η_0 варьировались частота модуляции f_p и глубина модуляции h мощности накачки. Установлено, что внутри области параметрического резонанса при вариации управляющих параметров η_0 и f_p могут возникнуть несколько режимов синхронизации.

4.1. Результаты численного моделирования

В отсутствие модуляции накачки автомодуляционный режим первого рода оказывается неустойчивым и сменяется периодическим автомодуляционным режимом с удвоенным периодом модуляции в области превышения накачки над порогом $0.23 \leq \eta_0 < 0.35$. Рассмотрим вначале область $0.17 \leq \eta_0 < 0.23$, достаточно близкую к границе неустойчивости, в которой при отсутствии модуляции

($h = 0$) автомодуляционный режим первого рода еще устойчив. Численное моделирование показало, что в этой области могут возникнуть два режима синхронизации АК – периодический и квазипериодический. Частота АК при $\eta_0 = 0.15$ была равна 214.5 кГц. Синхронизация АК возникает в области частот $f_- \leq f_p \leq f_+$, где f_- и f_+ – нижняя и верхняя границы области синхронизации. Периодический режим синхронизации существует в области частот, примыкающей к верхней границе области синхронизации f_+ , а квазипериодический – в области, примыкающей к нижней границе f_- .

На рис.1 представлены характерные спектры интенсивности излучения для периодического и квазипериодического режимов синхронизации АК. В первом случае (рис.1,а), как и в автомодуляционном режиме первого рода, в спектре интенсивности излучения присутствует лишь одна спектральная компонента, соответствующая f_p , т. е. происходит захват частоты АК ($f_m = f_p$). В квазипериодическом режиме (рис.1,б) синхронизация АК, как видно из спектра, проявляется в том, что пик на частоте f_m захватывается частотой модулирующего сигнала f_p . Кроме того, в спектре излучения наблюдаются дополнительные компоненты на частоте f_1 , близкой к f_r , а также на комбинационной частоте $f_p - f_1$.

На рис.2 показаны области существования периодического и квазипериодического режимов синхронизации при $\eta_0 = 0.15$ и 0.17 (глубина модуляции накачки $h = 0.25$). Для квазипериодического режима синхронизации на рис.2 приведены две кривые: одна – соответствующая частоте

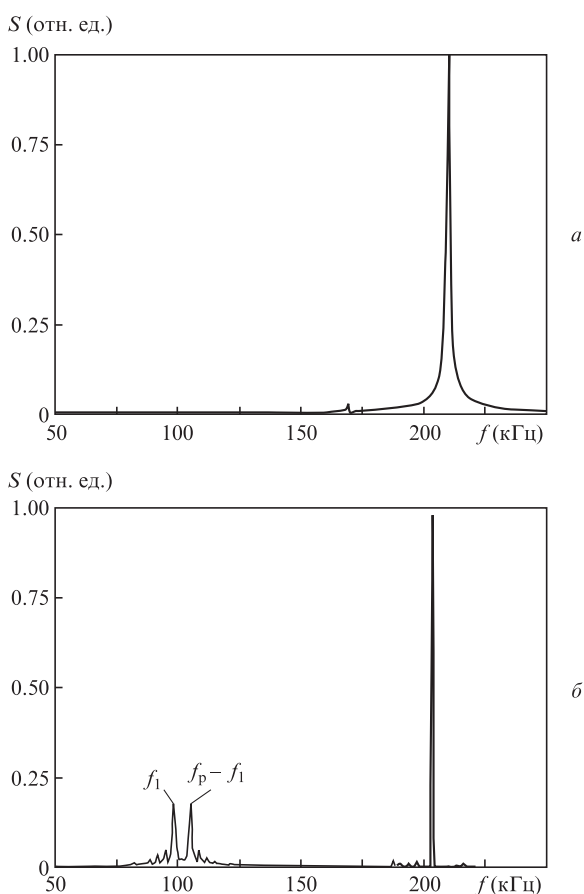


Рис.1. Спектры интенсивности излучения (численное моделирование) для периодического, $f_p = 210$ кГц (а), и квазипериодического, $f_p = 204$ кГц (б), режимов синхронизации АК при $\eta_0 = 0.17$ и $h = 0.25$.

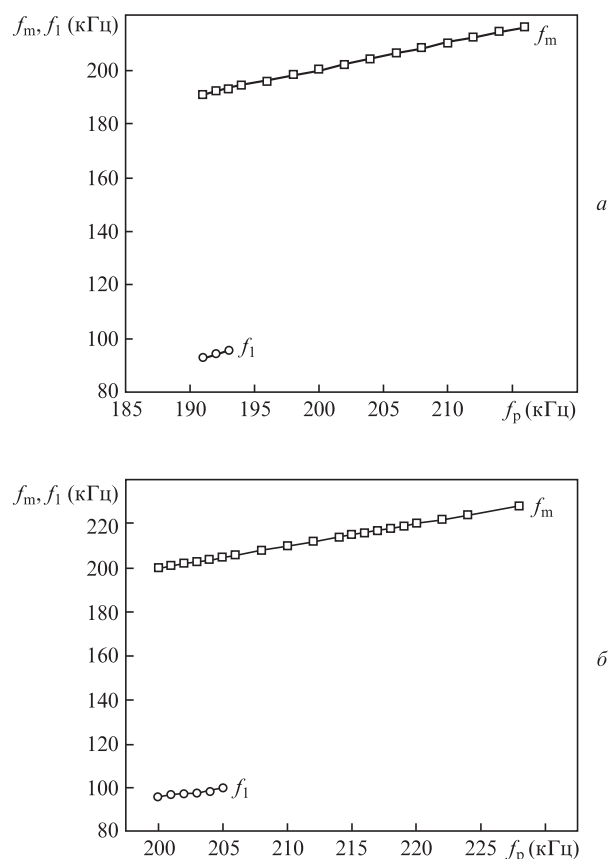


Рис.2. Найденные при численном моделировании области существования периодического и квазипериодического режимов синхронизации при превышениях накачки над порогом $\eta_0 = 0.15$ (а) и 0.17 (б); глубина модуляции накачки $h = 0.25$.

$f_m = f_p$, вторая – частоте f_1 , которая внутри области синхронизации линейно зависит от f_p . Как видно из рис.2,*a*, при $\eta_0 = 0.15$ квазипериодический режим только начинает возникать, и область его существования составляет лишь малую часть всей области синхронизации. С увеличением η_0 область существования квазипериодического режима расширяется.

4.2. Экспериментальные результаты

Рассмотрим теперь результаты эксперимента. На рис.3,*a* приведен характерный спектр интенсивности одной из волн в окрестности частоты АК (при $\eta_0 = 0.15$) в отсутствие модуляции накачки ($h = 0$), показывающий, что частота АК в исследуемом чип-лазере нестабильна и флуктуирует (ширина спектра около 5 кГц). В режимах синхронизации ширина спектральной компоненты, захваченной внешним сигналом ($f_m = f_p$), уменьшается более чем на порядок (рис.3,*б*).

Характерные экспериментально измеренные спектры интенсивности излучения для периодического и квазипериодического режимов синхронизации АК показаны на рис.4. Как и при численном моделировании (см. рис.1), в случае периодического режима синхронизации (рис.4,*a*) в спектре интенсивности излучения присутствует лишь одна спектральная компонента, соответствующая захваченной частоте АК ($f_m = f_p$). В квазипериодическом режиме (рис.4,*б*) в спектре излучения наблюдаются основной пик на захваченной частоте АК и два небольших дополнительных пика на частоте f_1 (левый пик) и на комбинационной частоте $f_p - f_1$ (правый пик).

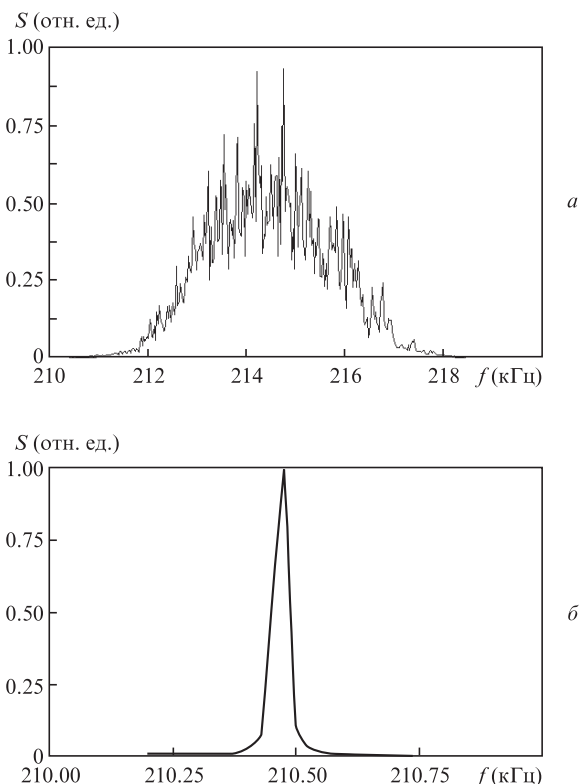


Рис.3. Форма линии в экспериментально измеренных при $\eta_0 = 0.15$ спектрах интенсивности излучения в отсутствие модуляции накачки (*a*) и в периодическом режиме синхронизации при $f_p = 210.4$ кГц и $h = 0.25$ (*б*).

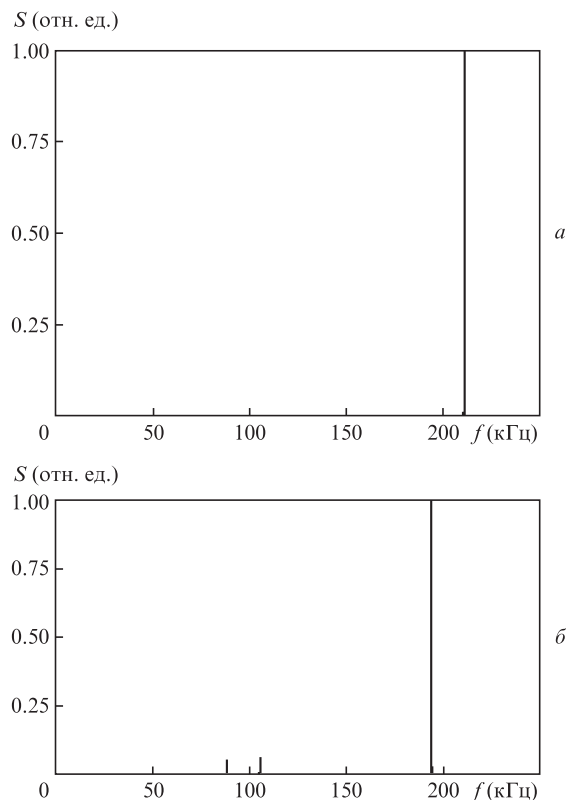


Рис.4. Экспериментально измеренные при $\eta_0 = 0.15$ спектры интенсивности излучения для периодического ($f_p = 210.4$ кГц) (*a*) и квазипериодического ($f_p = 194$ кГц) (*б*) режимов синхронизации.

На рис.5 показаны экспериментально измеренные области существования периодического и квазипериодического режимов синхронизации при $\eta_0 = 0.15$ и 0.17 и глубине модуляции накачки $h = 0.25$. Приведенные экспериментальные результаты находятся в качественном соответствии с результатами численного моделирования (см. рис.2): 1) периодический режим наблюдается в области частот, примыкающей к f_+ , а область существования квазипериодического режима примыкает к f_- ; 2) ширина области существования квазипериодического режима увеличивается с ростом превышения накачки над порогом η_0 ; 3) экспериментально измеренные значения частот f_1 дополнительных пиков близки к найденным при численном моделировании.

5. Режим синхронизации с удвоением периода

5.1. Результаты численного моделирования

В области превышений накачки над порогом $0.2 \leq \eta_0 \leq 0.22$ в отсутствие модуляции накачки ($h = 0$) автомодуляционный режим первого рода еще остается устойчивым. При $h \neq 0$ в этой области были численно найдены две ветви бистабильных режимов синхронизации АК. На первой ветви наблюдаются периодический и квазипериодический режимы синхронизации, рассмотренные в п.4, а вблизи верхней границы существования квазипериодического режима синхронизации в узком (~ 1 кГц) диапазоне частот модулирующего сигнала f_p возникает режим синхронизации с удвоенным периодом модуляции (режим I) со следующими характерными признаками: частота АК оказывается захваченной внешним сигналом ($f_m = f_p$) и в

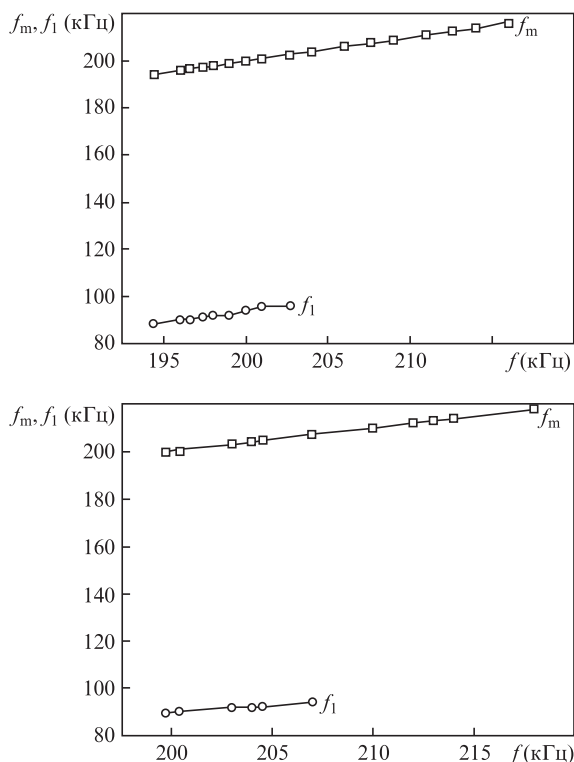


Рис.5. Экспериментально измеренные области существования периодического и квазипериодического режимов синхронизации при превышениях накачки над порогом $\eta_0 = 0.15$ (а) и 0.17 (б); глубина модуляции накачки $h = 0.25$.

спектре интенсивности излучения возникает дополнительная спектральная компонента на частоте субгармоники $f_p/2$. Спектр интенсивности излучения в режиме синхронизации I показан на рис.6,а.

На второй ветви при $0.2 \leq \eta_0 \leq 0.22$ и глубине модуляции накачки $h = 0.25$ во всей области синхронизации (от $f_- = 184$ кГц до $f_+ = 220$ кГц) наблюдается другой режим синхронизации с удвоенным периодом (режим II). В этом режиме в спектре интенсивности излучения возникают несколько дополнительных спектральных компонент на частоте субгармоники $f_p/2$ и кратных ей частотах $kf_p/2$ ($k = 1, 2, 3 \dots$). Характерный спектр интенсивности в режиме II показан на рис.6,б при $f_p = 200$ кГц.

5.2. Сравнение с экспериментом

Экспериментальные исследования в области превышений накачки над порогом $0.2 \leq \eta_0 < 0.22$ показали, что здесь возникают периодический и квазипериодический режимы синхронизации, а режим синхронизации с удвоенным периодом существует лишь в узком (~ 1 кГц) интервале частот модуляции f_p .

На рис.7 представлен экспериментально измеренный спектр интенсивности излучения для режима синхронизации с удвоенным периодом при $f_p = 214.5$ кГц, $\eta_0 = 0.2$, $h = 0.25$. Сравнение с рис.6,а показывает, что форма спектра аналогична полученной при численном моделировании для режима синхронизации I (первая ветвь бистабильных режимов синхронизации). К сожалению, вторую ветвь бистабильных режимов, получавшуюся по результатам численного моделирования, в проведенных экспериментальных исследованиях наблюдать не удалось.

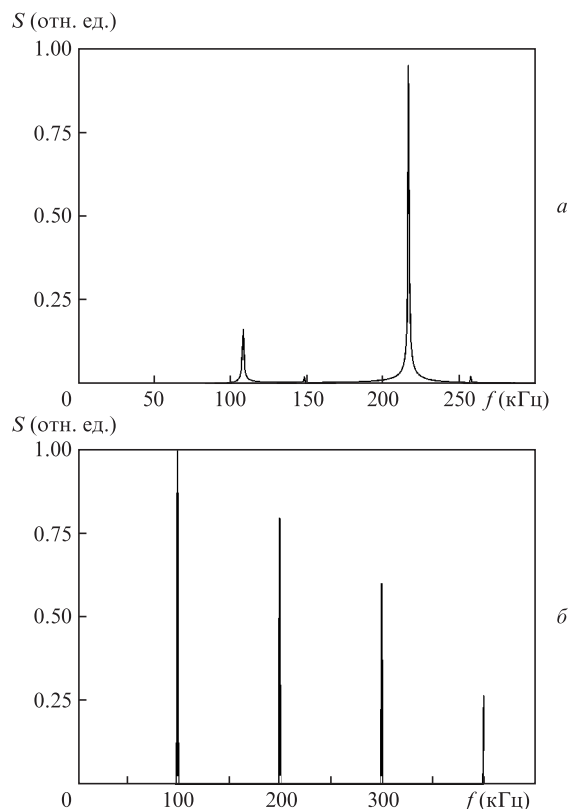


Рис.6. Спектры интенсивности излучения (численное моделирование) при $\eta_0 = 0.2$ и $h = 0.25$ для двух ветвей бистабильных режимов синхронизации с удвоенным периодом модуляции: первая ветвь (режим I), $f_p = 217$ кГц (а) и вторая ветвь (режим II), $f_p = 200$ кГц (б).

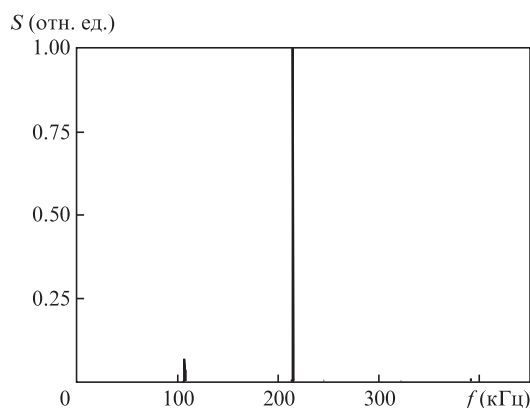


Рис.7. Экспериментально измеренный спектр интенсивности излучения для режима синхронизации с удвоенным периодом при $f_p = 214.5$ кГц, $\eta_0 = 0.2$ и $h = 0.25$.

6. Синхронизация АК с удвоенным периодом

6.1. Результаты численного моделирования

При $\eta_0 \geq 0.22$ автомодуляционный режим первого рода становится неустойчивым, и вместо него в автономном ТКЛ возникает периодический автомодуляционный режим с удвоенным периодом колебаний интенсивностей встречных волн. Синхронизация АК внешним сигналом в этом режиме ранее не изучалась. Численное моделирование, проведенное в настоящей работе, показало, что при периодической модуляции накачки в автомодуляцион-

ном режиме с удвоенным периодом возможны две бистабильные ветви синхронизации АК. На первой ветви наблюдаются периодический и квазипериодический режимы синхронизации, рассмотренные в п.4. На рис.8 показаны полученные на первой ветви при $\eta_0 = 0.23$ спектры интенсивности излучения в отсутствие модуляции накачки и в периодическом режиме синхронизации. При $h = 0$ в спектре интенсивности излучения присутствует спектральная компонента на субгармонике $f_m/2$ частоты АК, т.е. имеет место удвоение их периода (рис.8,*a*). На первой ветви в периодическом режиме синхронизации (рис.8,*б*) присутствует лишь спектральная компонента f_p , а субгармоника $f_p/2$ отсутствует. Из этого следует, что в процессе синхронизации в данном случае происходит как захват частоты АК, так и двукратное уменьшение их периода. На второй ветви в режиме синхронизации (во всей области синхронизации) спектральная компонента на частоте субгармоники $f_p/2$ всегда присутствует и близка по амплитуде к

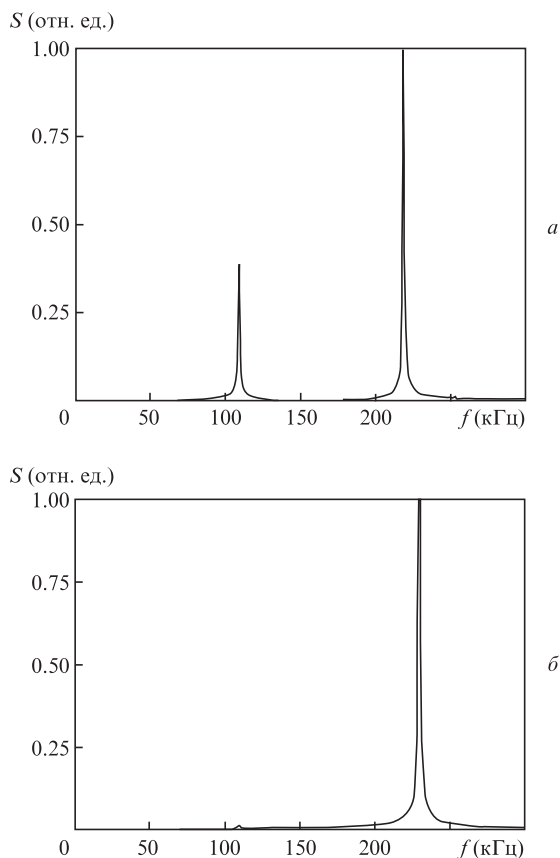


Рис.8. Спектры интенсивности излучения (численное моделирование) при $\eta_0 = 0.23$ в отсутствие модуляции накачки (*a*) и в периодическом режиме синхронизации на первой ветви, $f_p = 230$ кГц, $h = 0.25$ (*б*).

основной компоненте спектра на частоте f_p . Таким образом, на второй ветви при синхронизации сохраняется исходное (имевшее место до синхронизации) удвоение периода АК.

6.2. Сравнение с экспериментом

Рассмотрим теперь экспериментальные результаты, полученные при $\eta_0 = 0.23$. На рис.9 показаны экспериментально измеренные спектры интенсивности излучения в

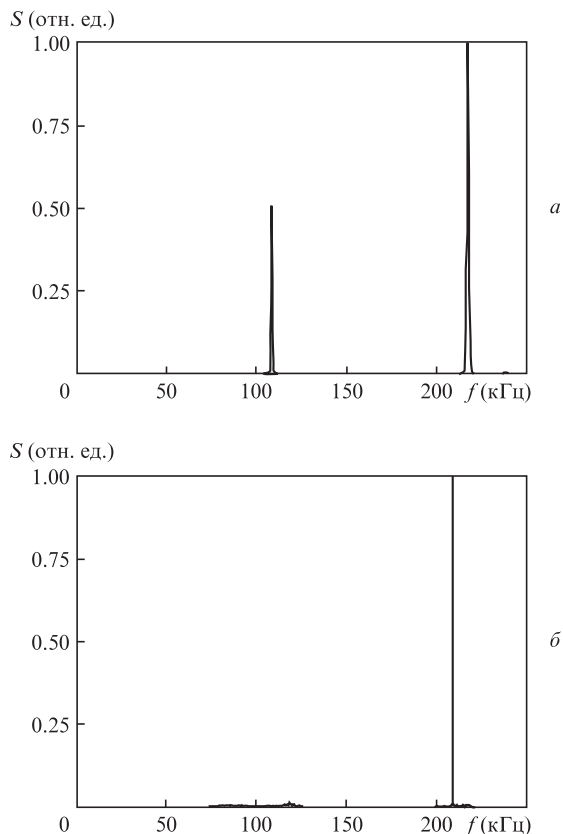


Рис.9. Экспериментально измеренные при $\eta_0 = 0.23$ спектры интенсивности излучения в отсутствие модуляции накачки (*a*) и в периодическом режиме синхронизации, $f_p = 209$ кГц, $h = 0.25$ (*б*).

отсутствии модуляции накачки и в периодическом режиме синхронизации. В первом случае исследуемый лазер работает в автомодуляционном режиме с удвоенным периодом. Сравнивая экспериментальные результаты с результатами численного моделирования (рис.8), можно сделать вывод о том, что экспериментально наблюдаемые режимы синхронизации относятся к первой ветви бистабильных режимов, найденных при численном моделировании.

7. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследована синхронизация частоты для двух автомодуляционных режимов генерации (режим первого рода и режим с удвоенным периодом), существующих в области параметрического резонанса, при воздействии внешнего периодического сигнала, модулирующего накачку. Сравнение экспериментальных и расчетных результатов позволяет сделать вывод, что использованная в работе векторная модель ТКЛ [8, 14] не вполне адекватна: экспериментальные результаты находятся в качественном соответствии с результатами численного моделирования, относящимися лишь к одной ветви бистабильных режимов генерации. Режимы синхронизации, относящиеся к другой ветви, в эксперименте не наблюдались.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-02-00080).

1. Mendez J.M., Laje R., Giudici M., Aliaga J., Mindlin G. B. *Phys. Rev. E*, **63**, 066218 (2001).

2. Кравцов Н.В., Пашинин П.П., Сидоров С.С., Фирсов В.В. *Квантовая электроника*, **32**, 562 (2002).
3. Kravtsov N.V., Lariontsev E.G., Pashinin P.P., Sidorov S.S., Firsov V.V. *Laser Phys.*, **13**, 305 (2003).
4. Pisarchik A.N., Barmenkov Yu.O. *Opt. Commun.*, **254**, 128 (2005).
5. Loose A., Wünsche H.J., Henneberger F. *Phys. Rev. E*, **82**, 035201 (2010).
6. Аулова Т.В., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Чекина С.Н. *Квантовая электроника*, **41**, 504 (2011).
7. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. *Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление* (М.: Техносфера, 2003).
8. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **36**, 192 (2006).
9. Schwartz S., Feugnet G., Lariontsev E.G., Pocholle J.P. *Phys. Rev. A*, **76**, 023807 (2007).
10. Золотоверх И.И., Камышева А.А., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Фирсов В.В., Чекина С.Н. *Квантовая электроника*, **38**, 956 (2008).
11. Аулова Т.В., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Чекина С.Н. *Квантовая электроника*, **41**, 13 (2011).
12. Золотоверх И.И., Клименко Д.Н., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **23**, 625 (1996).
13. Золотоверх И.И., Кравцов Н.В., Кравцов Н.Н., Ларионцев Е.Г., Макаров А.А. *Квантовая электроника*, **24**, 638 (1997).
14. Золотоверх И.И., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Фирсов В.В., Чекина С.Н. *Квантовая электроника*, **37**, 1011 (2007).