

Исследование плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов методом адиабатических мод: нулевое приближение

А.А.Егоров, Л.А.Севастьянов, А.Л.Севастьянов

Рассмотрено применение метода адиабатических волноводных мод, учитывающего трехмерное распространение квазиволноводных мод и точные («наклонные») тангенциальные граничные условия, для расчета распространения электромагнитного излучения в трехмерных нерегулярных интегрально-оптических волноводах. Возможности метода продемонстрированы на примере численного исследования методом адиабатических мод и методом волноводов сравнения двух важнейших элементов интегральной оптики – волновода типа «рупор» и тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга.

Ключевые слова: интегрально-оптические волноводы, плавно-нерегулярные волноводы, метод адиабатических волноводных мод, метод волноводов сравнения, дисперсионное соотношение, численное моделирование.

1. Введение

В наших предыдущих работах [1–11] с помощью асимптотического метода и метода связанных волн были получены аналитические выражения для полей деформирующихся мод четырехслойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического трехмерного волновода как в нулевом, так и в первом приближении теории возмущений. В основе использованного нами рассмотрения лежит представление решения в виде конечного асимптотического ряда, известного как адиабатическое приближение. Полученные в результате теоретического рассмотрения квазиволновые уравнения в нулевом и первом приближениях решены асимптотическим методом [1–3]. Как показал теоретический анализ, моды плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода являются слабо гибридными квази-ТЕ и квази-ТМ модами. При этом именно удержание в граничных условиях и в решении квазиволновых уравнений слагаемых, пропорциональных градиенту диэлектрической проницаемости, позволяет учесть векторный характер распространения монохроматического электромагнитного поля вдоль плавно-нерегулярных участков многослойного многомодового интегрально-оптического волновода. Установлено, что при таком рассмотрении возникают сдвиги комплексных постоянных распространения у слабо связанных квази-ТЕ и квази-ТМ мод. Определено, что в случае действительных

(и положительных) диэлектрической и магнитной проницаемостей сред плавно-нерегулярного волновода эти сдвиги являются мнимыми и различны для различных квазиволноводных мод [1–3].

В основу рассмотрения нами положен метод коротковолновых асимптотик [12, 13] с решением U в виде некоторого асимптотического ряда,

$$U \sim \sum_m u_m / k_0^m,$$

члены которого пропорциональны $k_0^{-m} = (2\pi/\lambda)^{-m}$, где λ – длина волны монохроматического света в вакууме; k_0 – модуль волнового вектора k_0 . В видимом диапазоне длин волн $\lambda \rightarrow 0$ ($k_0 \rightarrow \infty$), что позволяет использовать решение в виде конечного асимптотического ряда, известного как адиабатическое приближение [1–14].

Впервые метод коротковолновых асимптотик был сформулирован П.Дебаем для решения скалярного волнового уравнения в виде

$$u(x, \lambda) = \exp[i\lambda S(x)] \sum_m (i\lambda)^{-m} \varphi_m(x),$$

где $S(x)$ и $\varphi_j(x)$ – некоторые функции. Развитие идеи Дебая для решения уравнений Максвелла изложено в книге [13]. Приближение, при котором в данном асимптотическом ряде удерживаются члены нулевого и первого порядков, получило название «адиабатического приближения» в публикациях по теоретической и математической физике и «приближения геометрической оптики» (геометрической теории дифракции) в работах по изучению электромагнитной (оптической) дифракции (см., напр., [15]).

В.П.Маслов значительно усовершенствовал асимптотический метод решения задач математической физики (в особенности уравнения Шредингера) в ряде работ, результаты которых приведены, например, в монографии [16]. Данный подход описывает классы решений, соответствующие распространяющимся в неоднородном пространстве объемным волнам. Тем не менее помимо них существуют также другие важные классы волн, не совпадаю-

А.А.Егоров. Институт общей физики РАН им. А.М.Прохорова, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38;

e-mail: yegorov@kapella.gpi.ru

Л.А.Севастьянов. Российский университет дружбы народов, Россия, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Объединенный институт ядерных исследований, Россия, Московская обл., 141980 Дубна; e-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru

А.Л.Севастьянов. Российский университет дружбы народов, Россия, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; e-mail: alsevastyanov@gmail.com

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г., после доработки – 8 декабря 2013 г.

щие с объемными. В частности в интегральной оптике и волноводной оптоэлектронике изучаются так называемые поверхностные волны. Непосредственное применение методов Дебая и Маслова к описанию таких волн оказалось невозможным. Однако возможна их модификация, разработанная авторами настоящей статьи. Она заключается в частичном разделении переменных (см., напр., работы [3, 10]), основанном на усреднении адиабатического решения по быстрым переменным [3] с последующим «асимптотическим» продолжением по ним (по аналогии с методом усреднения [17]). Подчеркнем, что в нашем случае метод Фурье для разделения переменных, используемый в регулярных волноводах, не применим. Кроме того, для поиска решения не применим известный метод спектрального разложения поля по полной системе направляемых (собственных) мод и мод излучения регулярного волновода [21, 24] (или метод мод [22]), поскольку постоянная распространения здесь величина комплексная и существует проблема ортогональности соответствующих мод. Следует отметить, что, в отличие от приближенных методов геометрической оптики и геометрической дифракции, мы ищем (и находим) решения уравнений Максвелла, которые являются точными уравнениями электромагнитной теории распространения и дифракции волн. Двумерные («трассирующие») лучи, фигурирующие в построенных нами «адиабатических волноводных модах», являются усредненным (энергетическим) остоном «асимптотического разложения», удовлетворяющего электродинамическим, а не геометрооптическим уравнениям (подробнее см. в [1, 3, 10]).

В настоящей работе возможности развитого нами метода адиабатических мод продемонстрированы на примере численного исследования двух важнейших элементов интегральной оптики – волновода типа «рупор» и тонкоплочной обобщенной волноводной линзы (ТОВЛ) Люнеберга. Напомним, что это линза, у которой фокальная сфера не совпадает с поверхностью, а плоскость изображения расположена от центра линзы на расстоянии, большем ее радиуса. ТОВЛ Люнеберга является планарным аналогом [1–11, 18, 19] объемной обобщенной линзы Люнеберга [20]. Интегрально-оптический волновод типа «рупор» – это волновод, у которого есть некоторое расширение. Такой волновод может быть получен, например, путем постепенного утолщения волноводного слоя вдоль заданной оси.

2. Общая постановка задачи

Распространение направляемых и квазинправляемых мод в плавно-нерегулярных волноводах типа «рупор» и ТОВЛ Люнеберга (рис.1) описываются уравнениями Максвелла, которые для непоглощающей неоднородной изотропной среды в системе СИ в отсутствие источников можно записать в следующем виде [21, 22]:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{1}$$

В многослойном интегрально-оптическом волноводе электромагнитное поле, являющееся решением системы (1), на границах раздела слоев должно удовлетворять тангенциальным граничным условиям $\mathbf{E}^T|_1 = \mathbf{E}^T|_2, \mathbf{H}^T|_1 = \mathbf{H}^T|_2$.

Решения уравнений Максвелла (1) ищем в следующем виде [1–5]:

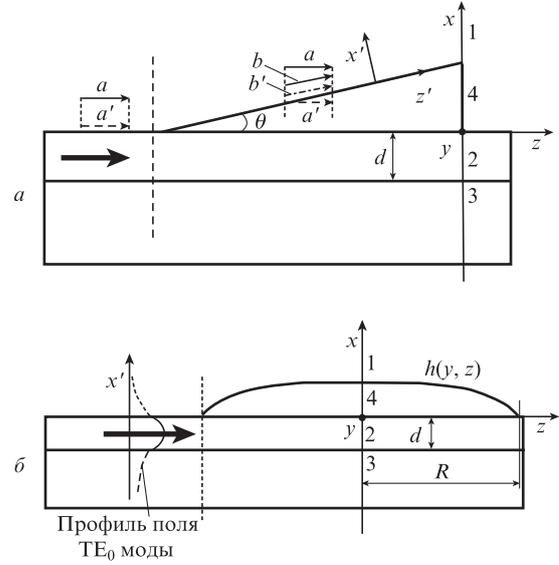


Рис.1. Поперечные сечения исследуемых волноводящих структур типа «рупор» (а) и ТОВЛ Люнеберга (б). Трехслойный регулярный интегрально-оптический волновод образован обрамляющей средой, или покровным слоем (воздух) с показателем преломления n_c (1), первым волноводным слоем (регулярная часть интегрально-оптической структуры) с показателем преломления n_f (2), подложкой с показателем преломления n_s (3) и вторым волноводным слоем (нерегулярная часть интегрально-оптической структуры) с показателем преломления n_{layer} (4). Направление распространения ТЕ или ТМ моды показано жирной стрелкой. В левой части рис.1,а показаны одна из составляющих волнового векторного поля (сплошная линия a со стрелкой) и ее проекция на горизонтальную плоскость (штриховая линия a'), в правой части – та же составляющая волнового векторного поля (сплошная линия a со стрелкой), ее проекция на горизонтальную плоскость (штриховая линия a' со стрелкой), действительная составляющая волнового векторного поля на наклонной плоскости (сплошная линия b со стрелкой) и ее проекция на наклонную плоскость (штрихпунктирная линия b' со стрелкой). Здесь используется лабораторная (вспомогательная) система координат x', y', z' ; $h(z)$ – толщина слоя, образующего клин. На рис.1,б: $h(y, z)$ – толщина слоя, образующего линзу Люнеберга; R – радиус апертуры линзы.

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{E}(x; y, z) \\ \mathbf{H}(x; y, z) \end{cases} \frac{\exp[i\omega t - i\varphi(y, z)]}{\beta^{1/2}(y, z)}, \tag{2}$$

где

$$\beta_y(y, z) = k_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \beta_z(y, z) = k_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\beta(y, z) = k_0^{-1} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_0 = \frac{\omega}{c};$$

ω – круговая частота монохроматического излучения; c – скорость света. Эйконал (фаза)

$$\varphi(y, z) = k_0 \int^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')$$

в (2) вычисляется интегрированием вдоль лучей после решения дисперсионного соотношения и изолированного вычисления лучей и волновых фронтов в горизонтальной плоскости; здесь $ds = \sqrt{dy^2 + dz^2}$ – элемент длины луча.

Дисперсионные соотношения для ТОВЛ Люнеберга были получены Саутвеллом в приближении, когда «наклонные» тангенциальные граничные условия заменялись их проекциями на горизонтальную плоскость [18]. Учет ус-

ловий $|\partial h/\partial y| \neq 0$, $|\partial h/\partial z| \neq 0$ вносит в соотношения Саутвелла малую поправку по параметру δ , где $\delta = \max|\nabla_{y,z}\beta|(k_0\beta^2)^{-1}$.

В случае использования при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений для адиабатических волноводных мод параметра δ [1–5] – двумерного аналога величины $|\nabla\epsilon/\epsilon|$, в волноводе с трехмерными плавными нерегулярностями возникают связанные квазиволноводные моды [1–11], подобные гибридным модам и имеющие не три компоненты поля, как ТЕ и ТМ моды, а шесть [21, 22]. Для этих мод в общем случае не выполняются условия $\partial\mathbf{E}/\partial y \equiv 0$, $\partial\mathbf{H}/\partial y \equiv 0$, т. е. существуют вариации полей в направлении оси y .

Декартова система координат ориентирована следующим образом. Ось x пересекает слои волновода и на его регулярных участках перпендикулярна этим слоям, а оси y , z на регулярных участках волновода параллельны им. Направляемые и квазинправляемые моды волновода распространяются вдоль оси z . Подстановка (2) в (1) приводит после ряда преобразований к следующим результатам.

Для продольных компонент $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$ получаем уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi^2 E_z = \frac{\partial \ln \chi_z^2}{\partial y} \left(p_y E_z + \frac{p_z}{ik_0 \epsilon} \frac{dH_z}{dx} \right), \quad (3)$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi^2 H_z = \frac{\partial \ln \chi_z^2}{\partial y} \left(p_y H_z - \frac{p_z}{ik_0 \mu} \frac{dE_z}{dx} \right). \quad (4)$$

Для компонент поля $E_x(x; y, z)$, $E_y(x; y, z)$, $H_x(x; y, z)$, $H_y(x; y, z)$ через продольные компоненты $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$ и их производные получаем

$$\chi_z^2 H_y = \left(p_y p_z + \frac{\partial p_z}{\partial y} \right) H_z - ik_0 \epsilon \frac{dE_z}{dx}, \quad (5)$$

$$\chi_z^2 H_x = p_z \frac{dH_z}{dx} + ik_0 \epsilon p_y E_z,$$

$$\chi_z^2 E_y = \left(p_y p_z + \frac{\partial p_z}{\partial y} \right) E_z + ik_0 \mu \frac{dH_z}{dx}, \quad (6)$$

$$\chi_z^2 E_x = p_z \frac{dE_z}{dx} - ik_0 \mu p_y H_z.$$

В соотношениях (3)–(6) использованы обозначения

$$\chi_z^2 = k_0^2 \epsilon \mu + p_z p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z}, \quad \chi^2 = \chi_z^2 + p_y p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y},$$

$$p_y = -ik_0 \beta_y - (2\beta)^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad p_z = -ik_0 \beta_z - (2\beta)^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

с помощью которых производные от напряженностей E_m (здесь $m = x, y, z$) выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial E_m}{\partial y} = p_y E_m, \quad \frac{\partial^2 E_m}{\partial y^2} = \left(p_y p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) E_m,$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial z} = p_z E_m, \quad \frac{\partial^2 E_m}{\partial z^2} = \left(p_z p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) E_m.$$

Производные от напряженностей H_m выражаются аналогичным образом.

В интересующем нас случае плавных нерегулярностей (т. е. при $\delta < 1$) в нулевом по малому параметру δ приближении для продольных компонент справедливы уравнения

$$\frac{d^2 E_z^0}{dx^2} + k_0^2 (\epsilon \mu - \beta^2) E_z^0 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 H_z^0}{dx^2} + k_0^2 (\epsilon \mu - \beta^2) H_z^0 = 0, \quad (8)$$

а для поперечных и вертикальных компонент – следующие дифференциальные выражения:

$$H_y^0 = \frac{1}{k_0^2 (\epsilon \mu - \beta_z^2)} \left(-k_0^2 \beta_y \beta_z H_z^0 - ik_0 \epsilon \frac{dE_z^0}{dx} \right), \quad (9)$$

$$E_x^0 = \frac{1}{k_0^2 (\epsilon \mu - \beta_z^2)} \left(-ik_0 \beta_z \frac{dE_z^0}{dx} - k_0^2 \mu \beta_y H_z^0 \right), \quad (10)$$

$$E_y^0 = \frac{1}{k_0^2 (\epsilon \mu - \beta_z^2)} \left(ik_0 \mu \frac{dH_z^0}{dx} + k_0^2 \beta_y \beta_z E_z^0 \right), \quad (11)$$

$$H_x^0 = \frac{1}{k_0^2 (\epsilon \mu - \beta_z^2)} \left(-ik_0 \beta_z \frac{dH_z^0}{dx} + k_0^2 \epsilon \beta_y E_z^0 \right). \quad (12)$$

В работе рассматриваются интегрально-оптические волноводные структуры, показанные на рис.1. На подложку (находится в области $I_s = \{(x, y, z): x \in (-\infty, -d]; y, z \in (-\infty, +\infty)\}$) из материала с показателем преломления n_s нанесен основной волноводный слой (расположен в области $I_f = \{(x, y, z): x \in [-d, 0]; y, z \in (-\infty, +\infty)\}$) толщиной d из материала с показателем преломления $n_f \geq n_s$. Сверху на основной волноводный слой нанесен дополнительный волноводный слой из материала с показателем преломления $n_{\text{layer}} \geq n_s$ переменной толщины $x = h(z)$ или $x = h(y, z)$ (область ненулевой толщины ограничена в плоскости yz). Дополнительный волноводный слой размещен в области $I_{\text{layer}} = \{(x, y, z): x \in [0, h(z)]; y, z \in (-\infty, +\infty)\}$. Еще выше находится покровный слой из материала с показателем преломления $n_c \leq n_s, n_f, n_{\text{layer}}$. Этот слой (здесь – воздух) находится в области $I_c = \{(x, y, z): x \in [h(z), +\infty); y, z \in (-\infty, +\infty)\}$.

На каждой из границ раздела двух сред (границ между областями I_j) выполняются тангенциальные граничные условия

$$\mathbf{E}^\tau|_{-d-0} = \mathbf{E}^\tau|_{-d+0}, \quad \mathbf{H}^\tau|_{-d-0} = \mathbf{H}^\tau|_{-d+0}, \quad (13)$$

$$\mathbf{E}^\tau|_{-0} = \mathbf{E}^\tau|_{+0}, \quad \mathbf{H}^\tau|_{-0} = \mathbf{H}^\tau|_{+0},$$

$$\mathbf{E}^\tau|_{h(z)-0} = \mathbf{E}^\tau|_{h(z)+0}, \quad \mathbf{H}^\tau|_{h(z)-0} = \mathbf{H}^\tau|_{h(z)+0}. \quad (14)$$

Кроме того, на бесконечности выполняются граничные условия

$$|\mathbf{E}^\tau|_{|x \rightarrow \pm\infty}| < +\infty, \quad |\mathbf{H}^\tau|_{|x \rightarrow \pm\infty}| < +\infty.$$

Касательные плоскости к границам раздела для условий (13) являются горизонтальными, поэтому система граничных уравнений (13) разделяется на независимые подсистемы для собственных ТЕ и ТМ мод. Для условий (14) эти плоскости в общем случае не горизонтальны и $\partial h/\partial y \neq 0$, поэтому тангенциальные компоненты полей в общем случае являются линейными комбинациями всех трех декартовых компонент полей с нетривиальными коэффициентами. Это не позволяет разделить систему гра-

нических уравнений (14) на две независимые подсистемы для ТЕ и ТМ мод, что приводит к «перепутыванию» поляризации распространяющихся в нерегулярном интегрально-оптическом волноводе квазиволноводных мод [3, 10].

3. Учет точных тангенциальных граничных условий в методе адиабатических волноводных мод

Граничные условия (13) на горизонтальных плоскостях раздела слоев в покомпонентной записи принимают следующий вид:

$$H_z(x)|_{x=-d-0} = H_z(x)|_{x=-d+0}, \quad E_y(x)|_{x=-d-0} = E_y(x)|_{x=-d+0},$$

$$E_z(x)|_{x=-d-0} = E_z(x)|_{x=-d+0}, \quad H_y(x)|_{x=-d-0} = H_y(x)|_{x=-d+0},$$

$$H_z(x)|_{x=-0} = H_z(x)|_{x=+0}, \quad E_y(x)|_{x=-0} = E_y(x)|_{x=+0},$$

$$E_z(x)|_{x=-0} = E_z(x)|_{x=-d+0}, \quad H_y(x)|_{x=-0} = H_y(x)|_{x=+0}.$$

Из трех компонент тангенциального поля $\mathbf{E}^{\tau(0)}$ в условиях (14) лишь $E_y^{\tau(0)}$ и $E_z^{\tau(0)}$ линейно независимы. Аналогично из трех компонент магнитного поля только компоненты $H_y^{\tau(0)}$ и $H_z^{\tau(0)}$ являются линейно независимыми. Следовательно, граничные условия (14) достаточно выписать лишь для них.

Рассмотрим более подробно условия (14). В точке $(h(y, z), y, z)^T$ границы раздела $x = h(y, z)$ касательная плоскость задается уравнением $dx - (\partial h / \partial y) dy - (\partial h / \partial z) dz = 0$.

Тангенциальные к этой плоскости составляющие напряженностей электрического ($\mathbf{E}^{\tau(0)}$) и магнитного ($\mathbf{H}^{\tau(0)}$) полей в покомпонентной записи таковы:

$$E_y^{\tau(0)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y} E_x^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] E_y^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} E_z^{(0)}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}, \quad (15)$$

$$E_z^{\tau(0)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial z} E_x^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} E_y^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] E_z^{(0)}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2},$$

$$H_y^{\tau(0)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y} H_x^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] H_y^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} H_z^{(0)}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}, \quad (16)$$

$$H_z^{\tau(0)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial z} H_x^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} H_y^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] H_z^{(0)}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}.$$

Таким образом, в каждую тангенциальную компоненту электрического поля вносят вклады все три компоненты электрического поля, т. е. обе поляризации. Аналогично ведут себя и компоненты магнитного поля, так что строгие граничные условия метода адиабатических мод, в отличие от метода поперечных сечений [21, 23, 24], учитывают реально возникающее на наклонных участках волновода «связывание» двух поляризаций. В плавно-нерегулярной части волноводной структуры при наклонном

падении волн (на границы раздела сред, образующих волновод) происходит перепутывание поляризации, и линейно поляризованная мода (моды) преобразуется в моду с запутанным состоянием, сложное поляризационное строение которой можно определить, решив систему уравнений и соотношений, связывающих обе поляризации. Заметим, что это неклассическое состояние отличается от состояния классической гибридной моды, также имеющей шесть компонент поля, поскольку классическая гибридная мода является таковой и в регулярном оптическом волокне. Когда из регулярного участка интегрально-оптического волновода на нерегулярный участок падает собственная ТЕ или ТМ мода с линейной поляризацией, принадлежащая дискретному спектру направляемых мод, то на нерегулярном участке она становится модой с запутанным состоянием, у которой появляется переменный мнимый сдвиг в постоянной распространения.

В случае волновода типа «рупор» негоризонтальный участок границы (клин) меняется с изменением аргумента z , но не меняется с изменением аргумента y . Следовательно,

$$\beta_y = 0, \quad \beta_z = \beta, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \tan \theta, \quad (17)$$

где θ – угол наклона негоризонтальной плоскости рупора (клинообразный участок) к горизонтальной плоскости yz .

При этом уравнения (7), (8) принимают вид

$$\frac{d^2 E_z^0}{dx^2} + k_0^2 (\epsilon \mu - \beta^2) E_z^0 = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 H_z^0}{dx^2} + k_0^2 (\epsilon \mu - \beta^2) H_z^0 = 0,$$

а соотношения (9)–(12) таковы:

$$H_y^0 = -\frac{ik_0 \epsilon}{\chi^2} \frac{dE_z^0}{dx}, \quad E_x^0 = -\frac{ik_0 \beta}{\chi^2} \frac{dE_z^0}{dx}, \quad (19)$$

$$E_y^0 = \frac{ik_0 \mu}{\chi^2} \frac{dH_z^0}{dx}, \quad H_x^0 = -\frac{ik_0 \beta}{\chi^2} \frac{dH_z^0}{dx}. \quad (20)$$

В силу выражений (21) и (23), (24) в волноводе типа «рупор» граничные условия на негоризонтальной границе раздела выполняются отдельно для разных мод, но у каждой моды возникает вращение плоскости поляризации.

Для ТМ мод имеем

$$H^{\tau(0)} = H_y^{(0)}, \quad E_z^{\tau(0)} = \left(\frac{\partial h}{\partial z} E_x^{(0)} + E_z^{(0)}\right) \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{-1},$$

т. е.

$$E_z^{\tau(0)} = \frac{\tan \theta E_x^{(0)} + E_z^{(0)}}{1 + \tan^2 \theta}.$$

Аналогично для ТЕ мод

$$E_y^{\tau(0)} = E_y^{(0)}, \quad H_z^{\tau(0)} = \left(\frac{\partial h}{\partial z} H_x^{(0)} + H_z^{(0)}\right) \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{-1},$$

т. е.

$$H_z^{\tau(0)} = \frac{\tan \theta H_x^{(0)} + H_z^{(0)}}{1 + \tan^2 \theta}.$$

Вывод аналогичных уравнений для случая ТОВЛ Люнеберга дан в наших работах [1–5], поэтому ограничимся только кратким комментарием. Здесь негоризонтальный участок границы (верхний профиль линзы) изменяется с изменением аргументов y и z ($x = h(y, z)$), что существенно усложняет все этапы исследования подобной волноведущей структуры (подробнее см. в [1–3, 5, 7–10]).

4. Система уравнений, описывающая трансформацию направляемых мод

Перейдем к рассмотрению ТМ моды. Выпишем явный вид общих решений для трех ненулевых компонент электромагнитного поля ТМ моды с учетом граничных условий на бесконечности:

$$E_z^c = A_c \exp(-\gamma_c x), \quad (21)$$

$$E_z^s = A_s \exp(\gamma_s x), \quad (22)$$

$$E_z^f = A_f^+ \exp(i\chi_f x) + A_f^- \exp(-i\chi_f x), \quad (23)$$

$$E_z^{\text{layer}} = A_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} x) + A_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} x). \quad (24)$$

Здесь $\chi_j = +k_0 \sqrt{\varepsilon_j - \beta^2}$; $\gamma_j^2 = -\chi_j^2$; $j = s, \text{layer}, f, c$; H_y и E_x получаются подстановкой (21)–(24) в соотношения (19), (20).

Подставим эти выражения в граничные условия для волновода типа «рупор» и получим в явном виде систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов $A_s, A_f^+, A_f^-, A_{\text{layer}}^+, A_{\text{layer}}^-, A_c$, которая после несложных преобразований приводится к виду эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений меньшей размерности:

$$\begin{aligned} & [i \tan \theta k_0 \beta \gamma_c (\varepsilon_{\text{layer}} - \varepsilon_c) + \chi_c^2 \varepsilon_{\text{layer}}] \\ & \times [A_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} a_3) - A_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_3)] \\ & = i \varepsilon_c \chi_{\text{layer}} \gamma_c [A_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} a_3) + A_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_3)]. \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_0 \varepsilon_f}{\chi_f} [A_f^+ \exp(i\chi_f a_2) - A_f^- \exp(-i\chi_f a_2)] \\ & = \frac{k_0 \varepsilon_{\text{layer}}}{\chi_{\text{layer}}} [A_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} a_2) - A_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_2)], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_f^+ \exp(i\chi_f a_2) + A_f^- \exp(-i\chi_f a_2) \\ & = A_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} a_2) + A_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_2), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_0 \varepsilon_f}{\chi_f} [A_f^+ \exp(i\chi_f a_1) - A_f^- \exp(-i\chi_f a_1)] \\ & = -\frac{i k_0 \varepsilon_s \gamma_s}{\chi_s^2} [A_f^+ \exp(i\chi_f a_1) + A_f^- \exp(-i\chi_f a_1)]. \quad (28) \end{aligned}$$

Из приведенных выражений следует, что при отклонении от нуля угла наклона дополнительного волноводного слоя происходит перераспределение энергии между компонентами магнитного поля H .

Аналогичным образом для ТЕ моды получаем общие решения для трех ненулевых компонент электромагнит-

ного поля через неопределенные коэффициенты $B_s, B_f^+, B_f^-, B_{\text{layer}}^-, B_{\text{layer}}^+, B_c$. В итоге граничные условия для тангенциальных компонент поля ТЕ моды приводятся к системе линейных алгебраических уравнений размерности четыре:

$$\begin{aligned} & B_{\text{layer}}^+ (\chi_c^2 - i\gamma_c \chi_{\text{layer}}) \exp(i\chi_{\text{layer}} a_3) \\ & + B_{\text{layer}}^- (-\chi_c^2 - i\gamma_c \chi_{\text{layer}}) \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_3) = 0, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_f^+ \chi_{\text{layer}} \exp(i\chi_f a_2) - B_f^- \chi_{\text{layer}} \exp(-i\chi_f a_2) \\ & - B_{\text{layer}}^+ \chi_f \exp(i\chi_{\text{layer}} a_2) + B_{\text{layer}}^- \chi_f \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_2) = 0, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_f^+ \exp(i\chi_f a_2) + B_f^- \exp(-i\chi_f a_2) \\ & - B_{\text{layer}}^+ \exp(i\chi_{\text{layer}} a_2) - B_{\text{layer}}^- \exp(-i\chi_{\text{layer}} a_2) = 0, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_f^+ (\chi_s^2 + i\chi_f \gamma_s) \exp(i\chi_f a_1) \\ & + B_f^- (-\chi_s^2 + i\chi_f \gamma_s) \exp(-i\chi_f a_1) = 0. \quad (32) \end{aligned}$$

В случае ТЕ моды перераспределения энергии между компонентами электромагнитного поля не происходит.

Вывод подобных уравнений для ТОВЛ Люнеберга дан в наших предыдущих статьях (см., напр., [1–3, 5, 10]). Поскольку здесь верхний профиль линзы трансформируется при изменении аргументов y и z , то на всех этапах исследования этой волноведущей структуры необходим учет зависимости $h(y, z)$.

5. Сравнение численных результатов применения двух методов при описании волноведущих структур типа «рупор» и ТОВЛ Люнеберга

При использовании метода волноводов сравнения точные наклонные граничные условия в волноводе типа «рупор» заменяются приближенными горизонтальными [23, 24]. Для описания таких волноводов мы воспользуемся методом волноводов сравнения с целью установления аналитических и численных различий распространяющихся в них волноводных мод. В этом методе все уравнения для компонент электромагнитного поля волноводных ТМ мод совпадают с уравнениями (18)–(20), справедливыми для метода адиабатических мод. Таким образом, общие решения этих уравнений, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности, совпадают с решениями (21)–(24). В методе волноводов сравнения нерегулярные участки волновода заменяются набором регулярных участков разной высоты [23, 24], так что в (25)–(28) слагаемые, пропорциональные $\partial h / \partial z$, равны нулю. Следовательно, граничные условия для электромагнитного поля ТМ мод будут эквивалентны [23, 24] однородной системе линейных алгебраических уравнений, совпадающей с (29)–(32), если в ней формально положить $\tan \theta = 0$.

Различие между методом адиабатических волноводных мод и методом волноводов сравнения заключается в присутствии в граничных условиях (29)–(32) слагаемых, пропорциональных тангенсу угла наклона верхней плоскости «рупора». Эти слагаемые задают различия в дисперсионных кривых, а также в трансформации полей волноводных мод, распространяющихся в плавно-нерегуляр-

ном волноводе типа «рупор» или в ТОВЛ Люнеберга. Поскольку в таком волноводе эти вклады определяют различия в дисперсионных соотношениях только ТМ мод, продемонстрируем, как различаются их дисперсионные характеристики, на численных примерах.

Однородная система линейных алгебраических уравнений (29)–(32), эквивалентная системе граничных уравнений в методе адиабатических мод ($\hat{M}_{TM}(\beta, \theta)A(\beta, \theta) = 0$), имеет нетривиальное решение в случае выполнения условия совместности $\det \hat{M}_{TM}(\beta, \theta) = 0$. В методе волноводов сравнения аналогичная система линейных алгебраических уравнений имеет вид $\hat{M}_{TM}(\beta, 0)A(\beta, 0) = 0$ и допускает нетривиальное решение при выполнении условия совместности $\det \hat{M}_{TM}(\beta, 0) = 0$, которое в интегральной оптике называется дисперсионным соотношением.

На рис.2 демонстрируются количественные различия в распределениях коэффициента фазового замедления $\beta(z)$ квазиволноводных мод волновода типа «рупор», верхняя грань которого наклонена под углом $\theta = 5^\circ$ (для большей наглядности), вычисленных методом адиабатических мод и методом волноводов сравнения. Параметры сред волновода даны для длины волны лазерного излучения $\lambda = 0.9$ мкм. Аналогичные различия наблюдаются в ТОВЛ Люнеберга для всех лучей, идущих вдоль оси z .

Для ТЕ мод тангенциальные граничные условия в методе адиабатических мод не зависят явно от угла наклона θ и эквивалентны однородной системе линейных алгебраических уравнений (29)–(32) вида $\hat{M}_{TE}(\beta)B(\beta) = 0$. Они совпадают с тангенциальными граничными условиями в методе волноводов сравнения [23, 24]. Общая для обоих методов система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение при выполнении условия совместности $\det \hat{M}_{TE}(\beta) = 0$, также не зависящего явно от угла наклона θ .

Следует отметить, что для вычисления вертикального распределения электромагнитного поля квазиволноводной ТМ моды формул (21)–(24) недостаточно. Для вычисления полного электромагнитного поля соответствующей моды необходимо использовать формулу (2), в которую входит запаздывание фазы $\varphi(z)$. Последняя величина вычисляется с помощью метода численного интегрирования затабулированной величины $\beta(z)$.

Некоторые результаты сравнения метода волноводов сравнения и метода адиабатических мод, в котором используются точные наклонные граничные условия для

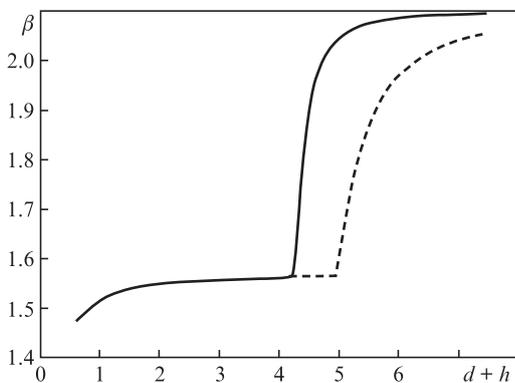


Рис.2. Дисперсионные кривые ТМ₀ моды, рассчитанные методом волноводов сравнения (сплошная кривая) и методом адиабатических мод (штриховая кривая), при изменении толщины d первого волноводного слоя от 0.61 до 4.0 и толщины h второго волноводного слоя от 0 до 3.5 (обе – в единицах λ).

ТОВЛ Люнеберга, приведены в наших статьях (см., напр., [1, 3, 5, 7, 10]). Следует напомнить, что у ТОВЛ Люнеберга дисперсионное уравнение $\det \hat{M}(\beta) = 0$ имеет вид нелинейного дифференциального уравнения в частных производных относительно h и алгебраического уравнения относительно векторного поля β :

$$F_{\text{disp}}\left(\beta, \beta_y, \beta_z; h, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}; n_s, n_f, n_{\text{layer}}, n_c; d\right) = 0.$$

При этом и сама матрица $\hat{M}(\beta)$, и ее определитель $\det \hat{M}(\beta)$ зависят от вещественного параметра $\beta \in [n_s, n_{\text{layer}}]$. Описание алгоритма расчета дисперсионной зависимости в нулевом приближении метода адиабатических мод дано в работах [4–9].

Из выражений для продольных компонент поля E_z, H_z соответствующих мод в нулевом по δ приближении вычисляются решения для E_y, H_x и E_x, H_y в нулевом по δ порядке. Таким образом, вычисляются все компоненты вертикального распределения квазиволноводных мод $\mathbf{E}(x; y, z)$ и $\mathbf{H}(x; y, z)$ в нулевом по δ приближении при любых значениях горизонтальных координат (y, z) с заданным распределением (профилем) толщины $h(y, z)$ и любых значениях координаты x .

Для сравнения метода адиабатических мод с методом Саутвелла использовалась матричная модель метода волноводов сравнения [4–9, 11]. Она получается при замене тангенциальных условий их горизонтальными приближениями, в которых слагаемые, содержащие $\partial h / \partial y, \partial h / \partial z$, обращаются в нуль, и дисперсионное соотношение $\det \hat{M}(\beta) = 0$ становится трансцендентным алгебраическим уравнением относительно h и $\beta = \beta_z$ и при любых (y, z) совпадает с дисперсионным соотношением регулярного волновода сравнения. Особенно важно подчеркнуть, что в рамках теоретической модели, использованной Саутвеллом, нет «гибридизации» волноводных мод. Это естественно, т. к. вместо строгих тангенциальных граничных условий в методе волноводов сравнения используются их горизонтальные проекции, т.е. приближенные граничные условия, допускающие раздельное описание ТЕ и ТМ мод. Алгоритм расчета вертикального распределения полей в матричной модели волноводов сравнения и в нулевом приближении модели адиабатических мод также описан в работах [4–10]. Отметим, что для решения однородной системы линейных алгебраических уравнений используется метод регуляризации Тихонова:

$$F((\mathbf{A}, \mathbf{B})_k) = \left\| \hat{M}\left(\beta, \beta_y, \beta_z; h, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)(\mathbf{A}, \mathbf{B})_k^T \right\|^2 + \alpha_1 \left(\left\| (\mathbf{A}, \mathbf{B})_k^T \right\|^2 - I_{\text{inc}} \right)^2 + \alpha_2 \left\| (\mathbf{A}, \mathbf{B})_k^T - (\mathbf{A}, \mathbf{B})_{k-1}^T \right\|^2 \rightarrow \min.$$

На рис.3 показано распределение электромагнитного поля в задней фокальной плоскости ТОВЛ Люнеберга (нормированное фокусное расстояние линзы $s = F/R = 1.5$, где $F = 1.5 R$; $R = 0.5$ см). Расчеты проведены в приближении метода адиабатических мод (нулевое приближение).

Полученные результаты указывают на возможность достижения сверхразрешения с помощью ТОВЛ Люнеберга, что несомненно будет способствовать улучшению характеристик, например, интегрально-оптического спектроанализатора [7, 10, 19]. Для получения кривых на рис.3 предварительно были рассчитаны обоими методами дисперсионные кривые и выполнена трассировка лучей в плоскости yz . Расчет производился для ТОВЛ Люнеберга

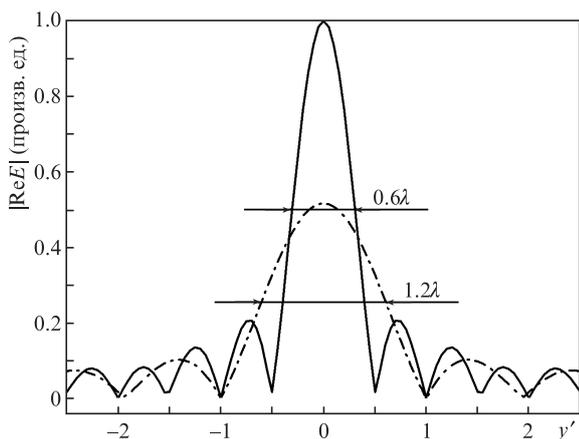


Рис.3. Распределения поля в задней фокальной плоскости для фокусного расстояния $F = 1.5R$, (y' дано в единицах λ). Сплошная кривая соответствует учету 99% апертуры линзы, а штрихпунктирная – 40%.

со следующими параметрами: нормированное фокусное расстояние линзы $s = 1.5$, нормированный радиус линзы $r = 1$, толщина регулярного волноводного слоя $d = 1.0665$ (в единицах λ). Коэффициент преломления подложки (SiO_2) $n_s = 1.470$, коэффициент преломления первого (регулярного) волноводного слоя (стекло марки Corning 7059) $n_f = 1.565$, коэффициент преломления второго волноводного слоя (Ta_2O_5) – ТОВЛ Люнеберга переменной толщины $h(y, z)$ $n_{\text{layer}} = 2.100$, коэффициент преломления покровного слоя (воздух) $n_c = 1.000$. Параметры сред волновода даны для длины волны лазерного ИК излучения $\lambda = 0.9$ мкм.

6. Заключение

В настоящей работе продемонстрированы некоторые важные результаты, свидетельствующие о различии в теоретическом и численном описании направляемых и квазинанправляемых мод плавно-нерегулярных волноводных структур типа «рупор» и ТОВЛ Люнеберга двумя методами: нулевым приближением метода адиабатических мод и методом волноводов сравнения.

Установлено, что даже нулевое приближение метода адиабатических мод вносит существенные отличия, которые проявляются в описании как полей квазирегулярных мод, так и дисперсионных соотношений. В нулевом приближении метода адиабатических мод обеспечивается трансформация линейной поляризации направляемых мод плавно-нерегулярного волновода типа «рупор», не приводящая к «гибридизации», а в случае ТОВЛ Люнеберга подобная трансформация ведет к перепутыванию квазирегулярных мод.

Новизна метода адиабатических мод заключается в подчинении приближенного решения электродинамической задачи «наклонным» граничным условиям на гра-

ницах раздела сред с учетом негоризонтальности касательных плоскостей к неплоским границам раздела сред плавно-нерегулярной волноводящей структуры. Это приводит к новым уравнениям для связанных векторных квазирегулярных адиабатических мод, к перепутыванию двух линейных поляризаций нерегулярного многослойного волновода и, как следствие, к появлению в результате моды с новым запутанным состоянием, для которой характерен эффект вращения плоскости поляризации.

1. Севастьянов Л.А., Егоров А.А. *Оптика и спектроскопия*, **105**, 632 (2008).
2. Егоров А.А., Севастьянов Л.А., Севастьянов А.Л. *Журнал радиоэлектроники*, № 6 (2008); <http://jre.cplire.ru/jre/jun08/4/text.pdf>.
3. Егоров А.А., Севастьянов Л.А. *Квантовая электроника*, **39**, 566 (2009).
4. Егоров А.А., Севастьянов А.Л., Ловецкий К.П. *Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика*, № 3, 55 (2009).
5. Егоров А.А., Севастьянов А.Л., Айрян Э.А., Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. *Математическое моделирование*, **22**, 42 (2010).
6. Egorov A.A., Sevastianov L.A., Sevastyanov A.L., Stavtsev A.V. *Bulletin of PFUR. Ser. Mathematics. Computer Science. Physics*, No. 1, 67 (2010).
7. Егоров А.А., Ловецкий К.П., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. *Квантовая электроника*, **40**, 830 (2010).
8. Егоров А.А., Ловецкий К.П., Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А. *Электронный журнал «Исследовано в России»*, 010, 96 (2011); <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2011/010.pdf>.
9. Аруян Е.А., Егоров А.А., Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Sevastyanov A.L. *Lecture Notes Comput. Sci.*, **7125**, 136 (2012).
10. Севастьянов Л.А., Егоров А.А., Севастьянов А.Л. *Ядерная физика*, **76**, 252 (2013).
11. Егоров А.А., Lovetskii K.P., Sevastyanov A.L., Sevastyanov L.A. *Techn. Dig. Intern. Conf. «ICONO/LAT 2013»* (Moscow, Russia, 2013, LAT-04 Diffractive Optics and Nanophotonics, p. 10).
12. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980).
13. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
14. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. *Дифракция и волновое распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989).
15. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. *Геометрическая теория дифракции* (М.: Связь, 1978).
16. Маслов В.П. *Теория возмущений и асимптотические методы* (М.: Изд. МГУ, 1965).
17. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П., Штарас А.Л. *Метод осреднения для уравнений с частными производными и его применения. Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. математики* (М.: ВИНТИ, 1988, т. 34, с. 215–241).
18. Southwell W.H. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 1004 (1977).
19. Хансперджер Р. *Интегральная оптика: Теория и технология* (М.: Мир, 1985).
20. Luneburg R.K. *The Mathematical Theory of Optics* (Providence, RI: Brown Univ. Press, 1944).
21. Маркузе Д. *Оптические волноводы* (М.: Мир, 1974).
22. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
23. Каценеленбаум Б.З. *Теория нерегулярных волноводов с медленно изменяющимися параметрами* (М.: Изд. АН СССР, 1961).
24. Шевченко В.В. *Плавные переходы в открытых волноводах (Введение в теорию)* (М.: Наука, 1969).