

PACS 42.65.-k, 42.25.Ja, 42.65.Sf, 42.65.Tg, 05.45.-a

Приближенные решения неинтегрируемой задачи распространения эллиптически поляризованных волн в изотропной гиротропной нелинейной среде и периодические аналоги многосолитонных комплексов

В.А.Макаров, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов

Методом линеаризации получены приближенные решения одномерной неинтегрируемой задачи распространения эллиптически поляризованных световых волн в изотропной гиротропной среде с локальной и нелокальной составляющими керровской нелинейности и дисперсией групповых скоростей. Аналитически описана согласованная эволюция двух ортогональных циркулярно поляризованных компонент поля в том случае, когда их фазы линейно меняются с расстоянием. Определены условия возбуждения волн с регулярным и «хаотическим» изменением состояния поляризации. Проанализирован характер соответствующих нелинейных решений – периодических аналогов многосолитонных комплексов.

Ключевые слова: кубическая нелинейность, пространственная и частотная дисперсии, линейная и нелинейная гиротропность, нелинейное уравнение Шредингера, эллиптическая поляризация, поляризационный хаос, периодический аналог многосолитонного комплекса.

1. Введение

Распространение плоской эллиптически поляризованной волны через изотропную гиротропную среду с керровской нелинейностью и дисперсией групповых скоростей описывается системой нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) [1–5]:

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} - \frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial t^2} + i[\mp\rho_0 + (\sigma_1/2 \mp \rho_1) |A_{\pm}|^2 + (\sigma_1/2 + \sigma_2) |A_{\mp}|^2] A_{\pm} = 0. \quad (1)$$

Здесь $A_{\pm}(z, t)$ – медленно меняющиеся амплитуды двух ортогональных циркулярно поляризованных компонент поля, ω – частота, t – время в собственной (бегущей) системе координат; $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$ – константа, характеризующая дисперсию групповых скоростей второго порядка; k – волновое число. Параметры $\sigma_1 = 4\pi\omega^2 \chi_{xyxy}^{(3)} / (kc^2)$ и $\sigma_2 = 2\pi\omega^2 \chi_{xyxy}^{(3)} / (kc^2)$ заданы двумя независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности $\chi^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$, а $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2 \gamma_{0,1} / c^2$ – псевдоскалярными константами $\gamma_{0,1}$ линейной и нелинейной гирации. Последние учитывают пространственную нелокальность линейного и нелинейного откликов среды в случае сравнительно медленных изменений амплитуд компонент

поля на масштабах порядка длины волны в направлении распространения оси z [2, 4].

При произвольном значении σ_2 и учете нелокальной составляющей в нелинейной поляризации система (1) неинтегрируема [6–9] и для нее известен ряд численных [1–3] и аналитических частных [4, 5, 10–12] решений. Так, в [4] при условии линейной связи между A_+ и A_- найдены частные решения (1) в форме солитонных пар. В [5, 10] в предположении формирования волноводов единого профиля для циркулярно поляризованных компонент поля получены решения, в которых $|A_{\pm}|$ пропорциональны эллиптическим функциям Якоби [13], а $\arg\{A_{\pm}\}$ линейно зависят от z . В [11, 12] при тех же предположениях найдены точные и приближенные решения, в которых $\arg\{A_{\pm}\}$ нелинейно зависят от t и линейно от z . В этом случае в среде могут распространяться как эллиптически поляризованные кноидальные волны, так и волны с аперриодическим изменением состояния поляризации, внешне напоминающим поляризационный хаос. Отметим, что интегрируемые системы НУШ в условиях формирования волноводов единого профиля имеют сходные решения, описывающие распространение волн, фазы которых могут не зависеть [14] либо зависеть [15] от времени. Однако для интегрируемых систем НУШ существуют и другие решения – многосолитонные комплексы [16–19]. Их аналоги для неинтегрируемой задачи (1) неизвестны. Целью настоящей работы является поиск периодических аналогов многосолитонных комплексов, которые могут также оказаться актуальными и для целого ряда других задач, описываемых системой НУШ типа (1).

В настоящей работе с использованием подхода [12] проведен анализ одного из семейств приближенных решений неинтегрируемой задачи (1), в котором фазы циркулярно поляризованных компонент поля эллиптически поляризованной волны линейно изменяются по мере ее распространения. Определены условия возбуждения волн с регуляр-

В.А.Макаров, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru, v_petnikova@yahoo.com

Поступила в редакцию 13 ноября 2013 г., после доработки – 31 декабря 2013 г.

ным и «хаотическим» изменением состояния поляризации. Проанализирован характер соответствующих нелинейных решений, неизвестных в настоящее время, – периодических аналогов многосолитонных комплексов [16–19].

2. Приближенное решение

Как и в работе [5], воспользуемся процедурой разделения переменных, положив

$$A_{\pm}(z, t) = r_{\pm}(t) \exp(ik_{\pm}z), \quad (2)$$

где κ_{\pm} – константы распространения, а $r_{\pm}(t)$ – вещественные функции. Подставляя (2) в (1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 r_{\pm}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r_{\pm}} = \frac{1}{k_2} [2\Delta\kappa_{\pm} + (\sigma_1 \mp 2\rho_1)r_{\pm}^2 + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_{\mp}^2] r_{\pm}, \quad (3)$$

где $\Delta\kappa_{\pm} = \kappa_{\pm} \mp \rho_0$. Систему (3) также можно рассматривать как систему уравнений, описывающую изменение декартовых координат материальной точки единичной массы с потенциальной энергией

$$U(r_-, r_+) = -\frac{1}{4k_2} [4\Delta\kappa_+ r_+^2 + 4\Delta\kappa_- r_-^2 + (\sigma_1 - 2\rho_1)r_+^4 + (\sigma_1 + 2\rho_1)r_-^4 + 2(\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2 r_-^2]. \quad (4)$$

Координаты \tilde{r}_-, \tilde{r}_+ положения точки равновесия находят из системы алгебраических уравнений

$$[2(k_{\pm} \mp \rho_0) + (\sigma_1 \mp 2\rho_1)\tilde{r}_{\pm}^2 + (\sigma_1 + 2\sigma_2)\tilde{r}_{\mp}^2] \tilde{r}_{\pm} = 0. \quad (5)$$

Поиск приближенных решений (1) сводится к получению системы линейных уравнений для малых отклонений $\xi_{\pm} = r_{\pm} - \tilde{r}_{\pm}$ от ненулевых координат положения равновесия,

$$\tilde{r}_{\pm}^2 = \frac{(\sigma_1 \pm 2\rho_1)\Delta\kappa_{\pm} - (\sigma_1 + 2\sigma_2)\Delta\kappa_{\mp}}{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}, \quad (6)$$

и к нахождению ее решений, которые даже после линеаризации задачи сохраняют, аналогично [12], зависимость полученного решения от нелинейных параметров среды. Минимум (6) существует, если $(\sigma_1 \mp 2\rho_1)/k_2 < 0$, $\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 < 0$ и $\tilde{r}_{\pm}^2 > 0$.

В окрестностях этого минимума известно вырожденное частное решение (1), для которого $\Delta\kappa_+ = \Delta\kappa_- = \Delta\kappa^{(d)}$ [5]:

$$A_{\pm}^{(d)}(z, t) = v \sqrt{\frac{-k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)}{(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}} \operatorname{dn}(vt, \mu) \times \exp\{iz[\pm\rho_0 + k_2v^2(2 - \mu^2)/2]\}. \quad (7)$$

Здесь $\operatorname{dn}(vt, \mu)$ – эллиптическая функция Якоби [13] с модулем $0 \leq \mu \leq 1$ и $v = \{2\Delta\kappa^{(d)}/[k_2(2 - \mu^2)]\}^{1/2}$. Нарушение условия $\Delta\kappa_+ = \Delta\kappa_-$ приведет к выходу решения (2) задачи как из семейства решений (7), так и вообще из класса вырожденных решений. На рис.1 в грациях серого цвета приведена карта распределения $U(r'_-, r'_+)$, где $r'_{\pm} = r_{\pm} \sqrt{\sigma_2/\rho_0}$, в окрестности точки равновесия (6) при $\Delta\kappa_+/\rho_0 = \Delta\kappa_-/\rho_0 = \Delta\kappa^{(d)}/\rho_0 = 3.767$ (рис.1,а) и $\Delta\kappa_+/\rho_0 = 5.4$, $\Delta\kappa_-/\rho_0 = 3.5$ (рис.1,б). Жирными линиями показаны зависимости $r'_+(r'_-)$, соответствующие частному решению (7) при том же значении $\Delta\kappa^{(d)}/\rho_0$ и $\mu = 0.95$.

После стандартной процедуры линеаризации $\xi_{\pm} = r_{\pm} - \tilde{r}_{\pm} \ll \tilde{r}_{\pm}$ получим систему уравнений

$$\frac{d^2 \xi_{\pm}}{dt^2} - \frac{2}{k_2} [(\sigma_1 \mp 2\rho_1)\tilde{r}_{\pm}^2 \xi_{\pm} + (\sigma_1 + 2\sigma_2)\tilde{r}_+ \tilde{r}_- \xi_{\mp}] = 0. \quad (8)$$

Начало координат систем ξ'_-, ξ'_+ и ζ'_-, ζ'_+ сдвинуто в точку, задаваемую радиус-вектором $\{\tilde{r}'_-, \tilde{r}'_+\}$ ($\tilde{r}'_{\pm} = \tilde{r}_{\pm} \sqrt{\sigma_2/\rho_0}$, $\xi'_{\pm} = \xi_{\pm} \sqrt{\sigma_2/\rho_0}$, $\zeta'_{\pm} = \xi_{\pm} \cos\alpha \mp \xi_{\mp} \sin\alpha$).

Сделаем замену переменных $\zeta_{\pm} = \xi_{\pm} \cos\alpha \mp \xi_{\mp} \sin\alpha$, где

$$\alpha = \arctan \{ [(\sigma_1 - 2\rho_1)\tilde{r}_+^2 - (\sigma_1 + 2\rho_1)\tilde{r}_-^2] / [2(\sigma_1 + 2\sigma_2)\tilde{r}_+ \tilde{r}_-] - \operatorname{sign}[(\sigma_1 + 2\sigma_2)\tilde{r}_+ \tilde{r}_-] \{ [(\sigma_1 - 2\rho_1)\tilde{r}_+^2 - (\sigma_1 + 2\rho_1)\tilde{r}_-^2]^2 (\sigma_1 + 2\sigma_2)^{-2} \tilde{r}_+^{-2} \tilde{r}_-^{-2} / 4 + 1 \}^{1/2} \}, \quad (9)$$

получим два уравнения, описывающих малые гармонические колебания материальной точки около положения равновесия:

$$\frac{d^2 \zeta_{\pm}}{dt^2} + \Omega_{\pm}^2 \zeta_{\pm} = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_{\pm}^2 = -k_2^{-1} \{ (\sigma_1 - 2\rho_1)\tilde{r}_+^2 + (\sigma_1 + 2\rho_1)\tilde{r}_-^2 \pm \sqrt{[(\sigma_1 - 2\rho_1)\tilde{r}_+^2 - (\sigma_1 + 2\rho_1)\tilde{r}_-^2]^2 + 4(\sigma_1 + 2\sigma_2)^2 \tilde{r}_+^2 \tilde{r}_-^2} \}. \quad (11)$$

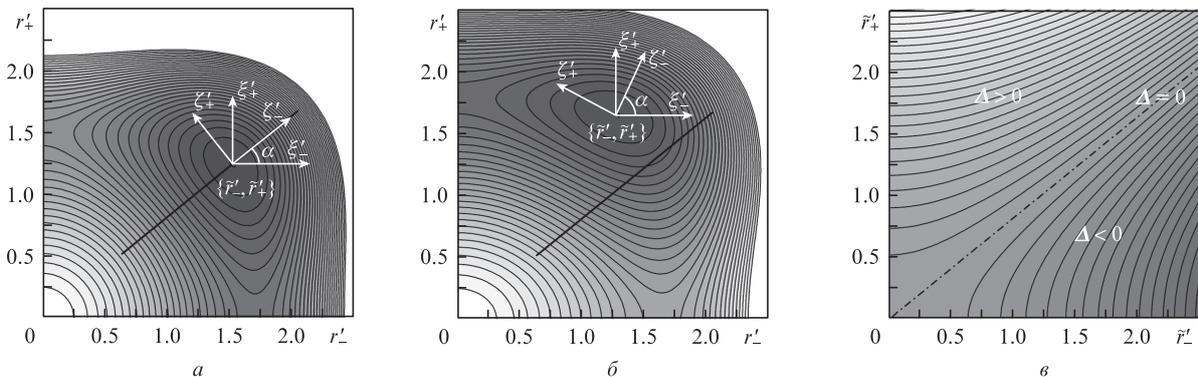


Рис.1. Карты распределений $U(\tilde{r}'_-, \tilde{r}'_+)$ в градациях серого цвета для $\Delta\kappa_+/\rho_0 = \Delta\kappa_-/\rho_0 = \Delta\kappa^{(d)}/\rho_0 = 3.767$ (а) и $\Delta\kappa_+/\rho_0 = 5.4$, $\Delta\kappa_-/\rho_0 = 3.5$ (б) и изменение $\Delta = (\Delta\kappa_+ - \Delta\kappa_-)/\rho_0$ при изменении положения точки равновесия, задаваемой радиус-вектором $\{\tilde{r}'_-, \tilde{r}'_+\}$ (в), при $\sigma_1/\sigma_2 = -3$, $\rho_1/\sigma_2 = 0.2$. Жирными линиями показаны зависимости $r'_+(r'_-)$, отвечающие частному решению (7) при том же значении $\Delta\kappa^{(d)}/\rho_0$.

Окончательно получим следующие выражения для амплитуд $r_{\pm}(t)$:

$$r_{\pm}(t) = \tilde{r}_{\pm} + \zeta_{\pm}^{(0)} \cos \alpha \cos(\Omega_{\pm} t + \phi_{\pm}) \pm \zeta_{\pm}^{(0)} \sin \alpha \cos(\Omega_{\pm} t + \phi_{\pm}). \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, дисперсия, гиротропия и нелинейность по-прежнему играют роль в решении (12), поскольку k_2 , $\rho_{0,1}$ и $\sigma_{1,2}$ задают значения \tilde{r}_{\pm} , α и Ω_{\pm} . Зависимости модулей амплитуд A_{\pm} от бегущего времени имеют характер биений двух гармонических составляющих на частотах Ω_{\pm} в окрестностях точек \tilde{r}_{\pm} .

Частные решения (7) не имеют линейного аналога ($\mu \rightarrow 0$), поскольку в этом пределе $\text{dn}(\gamma t, \mu) \rightarrow 1 - (\mu^2/2)\cos \Omega t$ и амплитуда осцилляций A_{\pm} в окрестностях точек \tilde{r}_{\pm} стремится к нулю. Однако частота этих осцилляций совпадает с частотой синфазных колебаний Ω_{-} и поэтому решение (7) все-таки можно считать нелинейной асимптотикой синфазного приближенного решения (12), вырожденного по собственным значениям. В то же время среди частных решений, найденных в [5], отсутствуют аналоги как противофазного решения (12), в котором $r_{\pm}(t)$ осциллируют на частоте Ω_{+} , так и решений общего характера в форме биений $r_{\pm}(t)$ на частотах Ω_{\pm} . На рис.2 показаны зависимости нормированных частот $\Omega'_{\pm}(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+}) = \sqrt{k_2/\rho_0} \Omega_{\pm}(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+})$ и угла $\alpha(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+})$ от положения точки равновесия $\{\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+}\}$. Легко убедиться, что частоты нормальных колебаний могут быть существенно разными, а угол изменяется практически от 0 до $\pi/2$. Поскольку компоненты поля r_{\pm} никогда не обращаются в нуль, в их спектрах имеется постоянная составляющая. Поэтому частоты нормальных колебаний Ω_{\pm} и вклады колебаний на этих частотах в компоненты r_{\pm} , заданные углом α (12), определяют ширины спектров результирующих биений. Эти ширины также могут быть существенно разными для компонент r_{\pm} .

В общем случае приближенные решения (12) являются линейными асимптотиками новых периодических (при соизмеримых нормальных частотах) решений, переходящих при увеличении их периода в аналоги многосолитонных комплексов [16–19], что кардинально отличает их от частных решений, найденных в [5].

Аналогичные приближенные решения можно построить и в тех случаях, когда минимумы $U(r_{-}, r_{+})$ (4) лежат на осях r_{\pm} , например

$$\tilde{r}_{+} = 0, \quad \tilde{r}_{-} = [-2\Delta\kappa_{-}/(\sigma_1 + 2\rho_1)]^{1/2}. \quad (13)$$

Решения такого типа будут сохранять зависимость только от части нелинейных параметров. В окрестности точки (13) квадратичная форма (4) становится диагональной, а координаты ξ_{\pm} – нормальными модами. За счет этого компоненты r_{\pm} всегда осциллируют на разных частотах, которые легко находятся через вторые производные потенциальной энергии $U(r_{-}, r_{+})$ в точке равновесия (13):

$$\omega_{+}^2 = \frac{2}{k_2} \left(\frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{\sigma_1 + 2\rho_1} \Delta\kappa_{-} - \Delta\kappa_{+} \right), \quad \omega_{-}^2 = \frac{4\Delta\kappa_{-}}{k_2}. \quad (14)$$

Заметим, что условия существования минимума (13) сводятся к требованиям $\omega_{\pm}^2 > 0$, $\tilde{r}_{-}^2 > 0$, и они отличаются от условий существования минимумов (6), для которых было получено приближенное уравнение (10) и нормальные частоты (11), поэтому из (10), (11) нельзя получить уравнение колебаний в окрестности (13) и частоты (14), а кроме того, теперь последние нельзя выразить через координаты минимума (13), как в (11).

Не останавливаясь здесь подробно на приближенном решении задачи (3) в окрестности точки равновесия (13), заметим лишь, что для соответствующих частных решений, полученных в [5], амплитуды компонент A_{\pm} пропорциональны эллиптическим функциям Якоби $\text{sn}(\gamma t, \mu)$ и $\text{dn}(\gamma t, \mu)$ [13]. В линейном пределе ($\mu \rightarrow 0$) их масштабный коэффициент γ и собственные значения имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \gamma|_{\mu \rightarrow 0} &= \frac{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}{(3\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)} (\Delta\kappa_{-} - \Delta\kappa_{+})|_{\mu \rightarrow 0}, \\ \Delta\kappa_{+}|_{\mu \rightarrow 0} &= -\frac{\gamma^2 k_2 (\rho_1^2 - \rho_1\sigma_1 - \sigma_2^2 - 2\rho_1\sigma_2)}{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}, \\ \frac{\Delta\kappa_{-}}{\Delta\kappa_{+}}|_{\mu \rightarrow 0} &= \frac{(\rho_1 + \sigma_2)(\sigma_1 + 2\rho_1)}{\rho_1\sigma_1 + \sigma_2^2 + 2\rho_1\sigma_2 - \rho_1^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

а амплитуды отклонений $r_{\pm} - \tilde{r}_{\pm}$ стремятся к нулю. Частоты их осцилляций в окрестности точки (13) равны γ и 2γ соответственно. Прямой подстановкой (15) в (14) легко убедиться в том, что при $\mu \rightarrow 0$ коэффициент γ совпадает с ω_{+} , тогда как $2\gamma \neq \omega_{-}$. Это значит, что и в окрестности минимума (13) приближенные решения являются линейными асимптотиками неизвестных в настоящее время периодических аналогов многосолитонных комплексов, отличающихся от найденных в [5] частных решений.

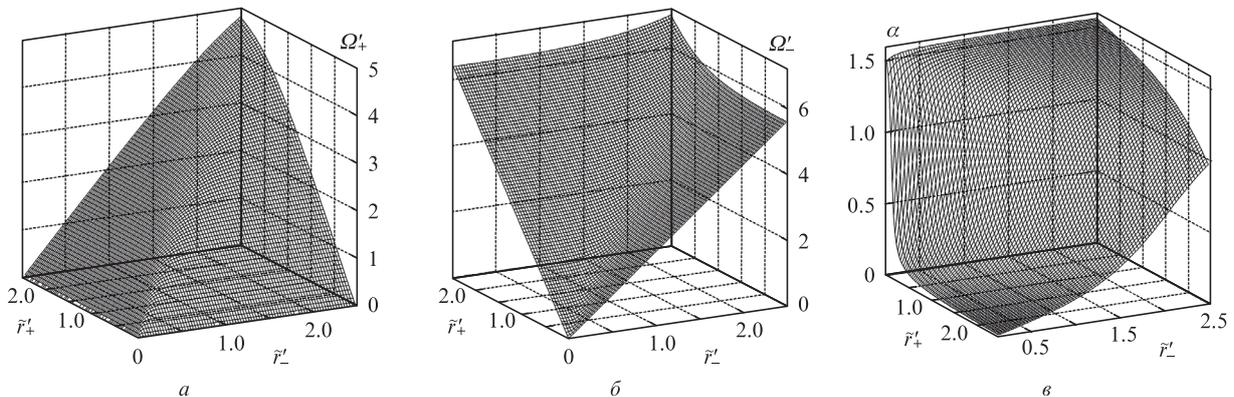


Рис.2. Изменение частот противофазных, $\Omega'_+(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+})$ (а), и синфазных, $\Omega'_-(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+})$ (б), нормальных колебаний и угла $\alpha(\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+})$ (в) при изменении положения точки равновесия, определяемой радиус-вектором $\{\tilde{r}'_{-}, \tilde{r}'_{+}\}$. Параметры среды те же, что и на рис.1.

3. Эволюция состояния поляризации распространяющейся волны

Зависимость модулей амплитуд A_{\pm} от бегущего времени становится периодической в случае соизмеримых нормальных частот Ω_{\pm} либо при возбуждении только одного нормального колебания. Эволюцию состояния поляризации волн, соответствующих найденным приближенным решениям, можно описать с помощью параметров Стокса [20], связанных с комплексными амплитудами A_{\pm} соотношениями

$$S_0(z, t) = \frac{1}{2}[|A_+(z, t)|^2 + |A_-(z, t)|^2] = \frac{1}{2}(\tilde{r}_+^2 + \tilde{r}_-^2) + \zeta_+^{(0)}(\tilde{r}_+ \cos \alpha - \tilde{r}_- \sin \alpha) \cos(\Omega_+ t + \phi_+) + \zeta_-^{(0)}(\tilde{r}_+ \sin \alpha + \tilde{r}_- \cos \alpha) \cos(\Omega_- t + \phi_-), \quad (16)$$

$$S_1(z, t) = \text{Re}\{A_+(z, t)A_-^*(z, t)\} = \cos[(\kappa_+ - \kappa_-)z] \times [\tilde{r}_+ \tilde{r}_- - \zeta_+^{(0)}(\tilde{r}_+ \sin \alpha - \tilde{r}_- \cos \alpha) \cos(\Omega_+ t + \phi_+) + \zeta_-^{(0)}(\tilde{r}_+ \cos \alpha + \tilde{r}_- \sin \alpha) \cos(\Omega_- t + \phi_-)], \quad (17)$$

$$S_2(z, t) = \text{Im}\{A_+(z, t)A_-^*(z, t)\} = \sin[(\kappa_+ - \kappa_-)z] \times [\tilde{r}_+ \tilde{r}_- - \zeta_+^{(0)}(\tilde{r}_+ \sin \alpha - \tilde{r}_- \cos \alpha) \cos(\Omega_+ t + \phi_+) + \zeta_-^{(0)}(\tilde{r}_+ \cos \alpha + \tilde{r}_- \sin \alpha) \cos(\Omega_- t + \phi_-)], \quad (18)$$

$$S_3(z, t) = \frac{1}{2}[|A_-(z, t)|^2 - |A_+(z, t)|^2] = \frac{1}{2}(\tilde{r}_-^2 - \tilde{r}_+^2) - \zeta_+^{(0)}(\tilde{r}_+ \cos \alpha + \tilde{r}_- \sin \alpha) \cos(\Omega_+ t + \phi_+) - \zeta_-^{(0)}(\tilde{r}_+ \sin \alpha - \tilde{r}_- \cos \alpha) \cos(\Omega_- t + \phi_-). \quad (19)$$

При этом нормированные параметры Стокса $s_{x,y,z}(z, t) = S_{1,2,3}/S_0$ определяют декартовы координаты конца единичного вектора s , движущегося с изменением координаты и/или времени по сфере Пуанкаре [20]. Поскольку долгота $\Phi = \arctan(s_y/s_x) = (\kappa_+ - \kappa_-)z$ конца вектора s пропорциональна z , характер изменения поляризации по мере распространения естественно анализировать для ситуаций, когда бегущее время t меняется только за счет z . Как и в случаях, рассмотренных в [12], изменение состояния поляризации периодически только при периодическом изменении s_z и согласованном с ним изменении Φ . Первое требование совпадает с условием периодичности $|A_{\pm}|$, а второе сводится к условию соизмеримости частоты изменения s_z с $(\kappa_+ - \kappa_-)$.

Характер изменения состояния поляризации приближенного решения (12) иллюстрирует рис.3, на котором показаны траектории движения конца вектора Стокса по сфере Пуанкаре при выполнении первого и второго условий периодичности (синфазное и противофазное решения) и только второго условия (случай биений). В последней из трех рассмотренных ситуаций, несмотря на хорошо заметные биения в зависимостях $r'_{\pm}(t')$ на рис.3,з, движение конца вектора s по поверхности сферы Пуанкаре сохраняет практически периодический характер. Это лег-

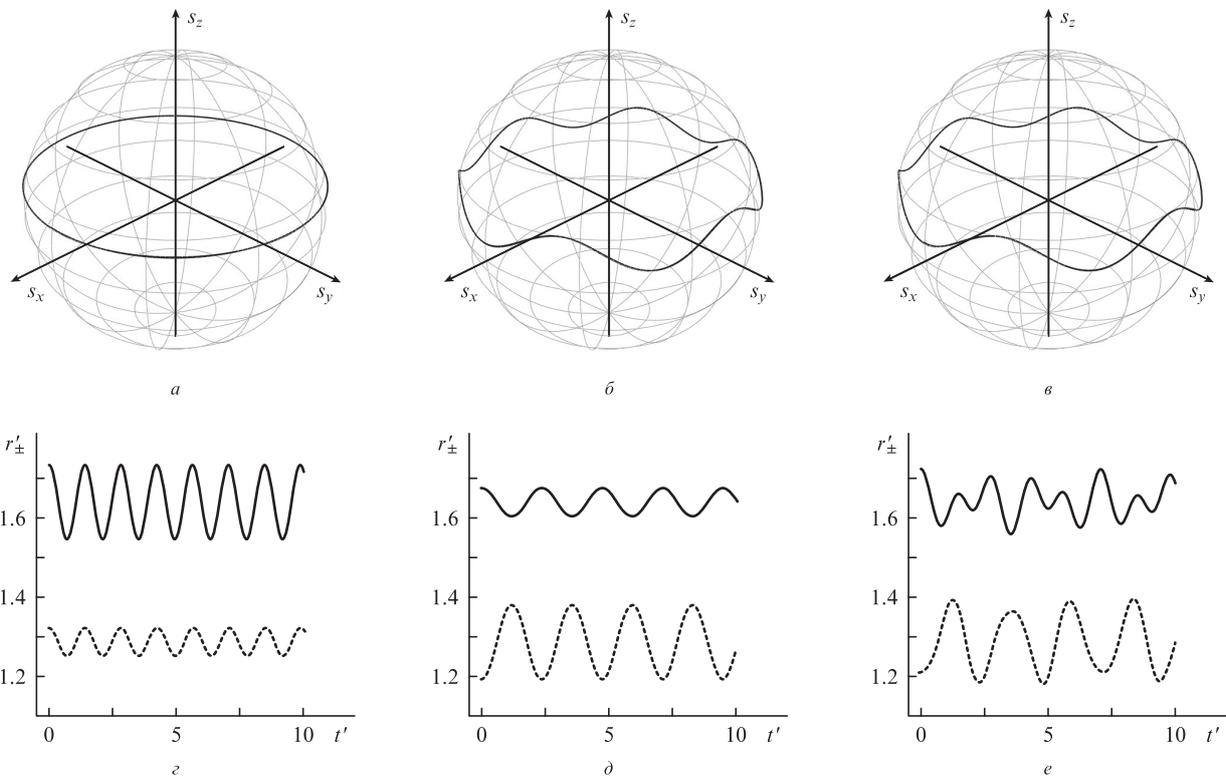


Рис.3. Траектории движения конца вектора Стокса по поверхности сферы Пуанкаре при $\Delta\kappa_+/\rho_0 = 5.4$, $\Delta\kappa_-/\rho_0 = 3.5$, $t = 2.751032z\sqrt{\rho_0 k_2}$ и $\phi_{\pm} = 0$ для синфазного (а) при $\zeta'_{+0} = 0.1$ и $\zeta'_{-0} = 0$, противофазного (б) при $\zeta'_{-0} = 0.1$ и $\zeta'_{+0} = 0$ и аперидического (е) при $\zeta'_{+0} = 0.1$ и $\zeta'_{-0} = 0.05$ решений ($\zeta'_{\pm 0} = \zeta_{\pm 0}\sqrt{\sigma_2/\rho_0}$). Зависимости $r'_{\pm}(t')$, соответствующие указанным режимам, показаны сплошными и пунктирными кривыми (з, д, е) ($t' = t\sqrt{\rho_0/k_2}$). Параметры среды те же, что и на рис.1.

ко объясняется характером зависимости s_z от амплитуд $\zeta_{\pm}^{(0)}$, которая с учетом их малости имеет вид

$$s_z(z, t) = \frac{\tilde{r}_-^2 - \tilde{r}_+^2}{\tilde{r}_-^2 + \tilde{r}_+^2} \left[1 + 4\zeta_+^{(0)} \tilde{r}_+ \tilde{r}_- \frac{\tilde{r}_+ \sin \alpha + \tilde{r}_- \cos \alpha}{\tilde{r}_+^4 - \tilde{r}_-^4} \right. \\ \left. \times \cos(\Omega_+ t + \phi_+) - 4\zeta_-^{(0)} \tilde{r}_+ \tilde{r}_- \frac{\tilde{r}_+ \cos \alpha - \tilde{r}_- \sin \alpha}{\tilde{r}_+^4 - \tilde{r}_-^4} \cos(\Omega_- t + \phi_-) \right]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что характер изменения состояния поляризации в случаях синфазных и противофазных колебаний определяется величинами $\tilde{r}_- \cos \alpha - \tilde{r}_+ \sin \alpha$ и $\tilde{r}_+ \cos \alpha + \tilde{r}_- \sin \alpha$ соответственно. При использованных в расчетах значениях параметров $\tilde{r}_- \cos \alpha - \tilde{r}_+ \sin \alpha \cong 0$ и, следовательно, компонента s_z для синфазного решения должна быть практически постоянной (рис.2,а). По этой же причине именно $\zeta_-^{(0)}$ определяет характер изменения s_z и в общем случае (рис.2,б).

Однако в последней ситуации при достаточно долгой эволюции конец вектора s , как и в [12], полностью заполнит часть поверхности сферы Пуанкаре, ограниченную неравенствами $s_{z \min} \leq s_z \leq s_{z \max}$ ($s_{z \min}$ и $s_{z \max}$ – минимальное и максимальное значения s_z), и возникнет режим, внешне напоминающий поляризационный «хаос».

4. Заключение

В работе получены приближенные (метод линеаризации в окрестности точек равновесия) решения неинтегрируемой задачи распространения плоских эллиптически поляризованных световых волн в изотропной гиротропной среде с локальной и нелокальной составляющими керровской нелинейности и дисперсией групповых скоростей. Аналитически описана согласованная эволюция двух ортогональных циркулярно поляризованных компонент поля в тех случаях, когда их фазы линейно меняются с расстоянием. Показано, что найденные приближенные решения являются асимптотиками неизвестных в настоящее время периодических аналогов многосолитон-

ных комплексов [16–19], которые кардинально отличаются от частных решений, найденных ранее в работе [5]. Определены условия возбуждения (ограничения на начальные условия и параметры среды) световых волн с регулярным и «хаотическим» изменением состояния поляризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00653-а).

1. Голубков А.А., Макаров В.А., Пережогин И.А. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия*, №1, 52 (2009).
2. Голубков А.А., Макаров В.А., Рахматуллина И.Г. *Квантовая электроника*, **19**, 1195 (1992).
3. Makarov V.A., Perezhogin I.A., Potravkin N.N. *Laser Phys.*, **19**, 322 (2009).
4. Макаров В.А., Петров К.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1011 (1993).
5. Макаров В.А., Пережогин И.А., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 117 (2012).
6. Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. Royal Soc. London A*, **456**, 2263 (2000).
7. Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed V.A. *Opt. Commun.*, **219**, 251 (2003).
8. Tsang S.C., Nakkeeran K., Malomed V.A., Chow K.W. *Opt. Commun.*, **249**, 117 (2005).
9. Chiu H.S., Chow K.W. *Intern. J. Computer Mathematics*, **87**, 1083 (2010).
10. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenomena*, **21**, 264 (2013).
11. Макаров В.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 1118 (2012).
12. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett.*, **10**, 075404 (2013).
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
14. Выслоух В.А., Кутузов В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **24** (10), 867 (1997).
15. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76**, 046611 (2007).
16. Akhmediev N.N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J.M. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4047 (1997).
17. Sukhorukov A., Akhmediev N. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4736 (1999).
18. Akhmediev N., Ankiewicz A. *Chaos*, **10**, 600 (2000).
19. Sukhorukov A.A., Ankiewicz A., Akhmediev N.N. *Opt. Commun.*, **195**, 293 (2001).
20. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973).